【整番】SE-25-TM-005	【標題】パイプホイップに関する情報（Blevins 文献紹介と運用）	
分類：構造(過渡/衝撃)／種別：技術メモ	作成年月：H29.6／改訂：Ver.0.0 (H29.7)	作成者：N. Miyamoto

全 20 枚

動力プラント(特に Nuclear)の配管では、**パイプホイップ**という**流体-構造連成現象**が設計課題になることがある。乃ちパイプがグロスな形で破断し支持を失ったパイプが大きくホイップして周辺の人員や設備に被害を及ぼすという不安である。通常、配管が破断に至るまでには亀裂進展➞漏洩という多分に冗長な過程があってこの種の不安は日常の設備点検を介して排除されることが多い。それ故パイプホイップが Nuclear 以外のプラント設備で問題にされることは殆どないように思う。しかし TS 作成者には、可燃性ガス配管に欠陥があってこれが成長して破断した時どうなるかといった議論が客先からでてとりあえずサポートを強化した記憶がある。確かに一般プラントの配管と云えども、潜在的な欠陥/異常な腐食/過剰な減肉など進行性の材料損傷に水撃のような衝撃が加わってギロチン的な破断が起きる可能性は全く否定できない。特にレベル 2 クラスの大規模地震によって発生する事象にはパイプホイップに類似した現象も含まれるような気がする。

パイプホイップとその緩和用レストレント[8]については Nuclear 関係で十分なノウハウの蓄積があり動的な安全性解析も確立されているようである。それはさておいて**過渡振動の基本的な理解も兼ねて**、本 TS では **Blevins の流体振動テキストのホイップ現象のダイナミックに関する記述**[1] を紹介しその運用について議論をしてみたい。

1. ホイップ現象のダイナミックス(Blevins テキストの内容紹介)

以下、パイプホイップに関する **Blevins のテキスト**[1]の **10.6 節**の記述内容(意訳)を記す。

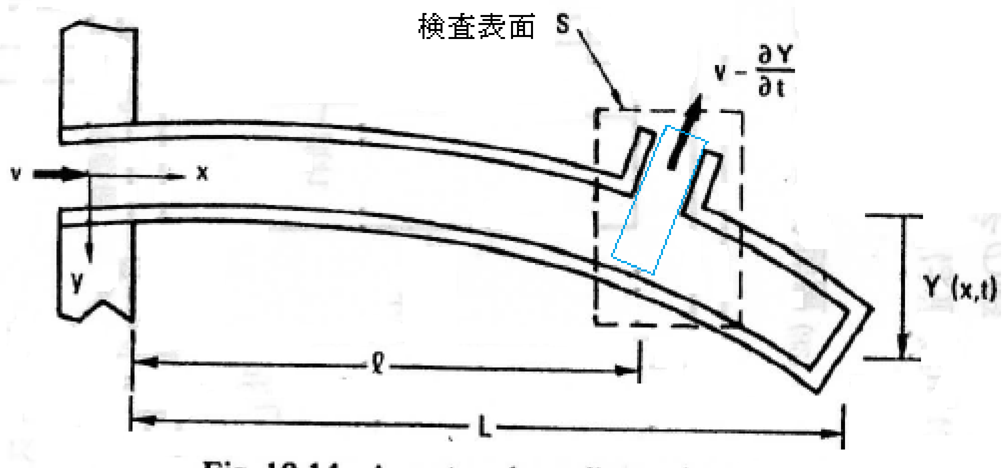


Fig. 10-14 A ruptured cantilever pipe.
（カンチレバーパイプの破断モデル）

10.6 パイプホイップ

ほとんどのパイプにはキズがあり、たいていのパイプには何らかの腐食がある。もしパイプの傷が危険な長さに成長して腐食が管壁を十分に腐食すれば速やかにパイプ断面は破断する。もしそのパイプが高圧設備の 1 部なら破損部分から流体が噴き出して空中に飛散する。破損パイプからの流体の噴出しによって曲管に衝動的な反力が派生しパイプはむち打って人や構造物の要所に打撃を与える。動力プラントの設計者が 2 次災害の引き金にならないようにむち打ちが予想されるパイプ周りにレストレントや防護壁を設置するのはこの理由からである。

結果的には流体輸送管の不安定現象に類似しているが、パイプ欠陥に由来しパイプの分岐部や曲り部あるいは周接続部でブレークする点でその様相はかなり異なっている。

流体は管軸に直角に噴出し、流体反力が不安定を増進するというよりもむしろパイプを直かに曲げる傾向にある(→強制振動的である)。たいていの場合、むち打ちパイプは隣接する構造物を叩き応答が平衡に達する前に塑性変形する。従って本節の解析では、パイプホイップを瞬間的な流体荷重の作用によるパイプの過渡的な応答として扱う(→過渡振動問題として扱う)。

基本的な解析の前提は次の通り。

(1) 流体力は主に管軸に直角に作用する。
(2) パイプは一様で直交モードをもっている。
(3) 変形は小さくパイプの応答は線形である。

これらの仮定は弾性限界を越えて変形したパイプあるいは隣接構造物と衝突した後のパイプの応答の解析にはそぐわないが、たいていのパイプホイップの初期変形解析にはフィットしている。

パイプに生じる反力は **Fig. 10-14** の検査体積を用いて次の運動量の式から評価できる(＊1)。

$$\mathbf{F}=-\left[\int_{S'} p\,\mathbf{n}\,ds+d\left(\int_V \rho\,\mathbf{U}dV\right)/dt+\int_{S'} \rho\,\mathbf{U}(\mathbf{U}\,\mathbf{n})ds\right] \quad \text{-----(10-50)}$$

ここで、F＝パイプ上のベクトル流体反力、n＝空間に固定され容積 V を囲う検査表面 S から外向きの法線単位ベクトル、S'＝流体流れに連なる S 部分、U＝検査表面 S に関するベクトル流体速度、V=検査体積部の容積、P＝流体圧力

もし検査体積内の流体が大気圧まで減圧され、検査体積内の流体質量が小さくなれば、(10-50)式右辺の最初の２つの積分は無視でき、変形しないパイプ軸に直交する流体反力は、

$$F_y=\rho A[v-\partial Y(\ell,t)/\partial t]^2 \quad \text{------------------------------------(10-51)}$$

ここで　v＝変形しないパイプ軸に直交し破断位置 $x=\ell$ において撓み速度[$\partial Y(\ell,t)/\partial t$]で離れて曲がってゆくパイプの流体速度成分、Y＝パイプの撓み、 ρ＝流体密度、A＝流体噴流軸に直角な破断断面の面積、

(10-51)式で与えられる流体反力はパイプに係る流体速度 v と破断点のパイプ撓み速度によって変化する。もしパイプ撓み速度がパイプに係る流体速度に達し　$\partial Y(\ell,t)/\partial t=v$　になれば、パイプ反力は零になる。しかし実際には、流体噴流の初期の速度はパイプの応答速度をかなり越えるので

$$F_y=\rho Av^2 \quad \text{-------------------------------------(10-52)}$$

としても十分正確である。この単純化された流体力によって系の応答は線形モデルで扱える。以下この流体力を解析に用いる。

$x=\ell$ における瞬間的な流体噴流の発生に応答して曲がる細長い一様なパイプの運動方程式は、次式で与えられる(＊2)。

$$\begin{aligned} EI\{\partial^4 Y(x,t)/\partial x^4\}+m\{\partial^2 Y(x,t)/\partial t^2\} &= 0 \quad (t<0\ \text{あるいは}\ x\neq\ell), \\ &= \rho Av^2 \quad (x=\ell\ \text{および}\ t\geqq 0) \quad \text{--------(10-53)} \end{aligned}$$

ここで　E＝パイプ材の弾性係数、I＝パイプ断面 2 次モーメント、m＝(パイプ＋流体)の単位長さ当たり質量、ℓ＝破断位置までのスパン、Y＝軸直変位(撓み)

パイプの減衰および管内の流動効果 即ち(10-9)式の第 2、第 3 項は無視されている**(＊3)**。

この場合、(10-53)式の解はモーダル解法を用いて得られる**(＊4)**。その場合、次のような解のフォームが仮定される。

$$Y(x,t)=\Sigma y_j(t)\,\phi_j(x) \quad (j=1,2,3\cdots N \text{ 以下同}) \text{ ------------------(10-54)}$$

ここで　$\phi_j(x)$＝パイプの自由振動に伴うモード形状(固有関数)、$y_j(t)$＝撓みの時間変化

これらのモード形は幾何形状の境界条件に合致し、パイプスパンにわたって直交である**(＊5)**と仮定される。

$$\int_0^L \phi_j(x/L)\,\phi_k(x/L)\,d(x/L)=0 \qquad (j\neq k) \text{ ----------------------------(10-55)}$$

(10-54)式を、運動方程式、$\phi_k(x)$(ここで k は任意の整数)を通しで乗じて得られた合成方程式、及び x＝0～L の延長パイプスパンで積分された方程式に代入すると、正規モードの直交性から個々のモードにおける応答を表わした一組の線形常微分方程式が得られる**(＊6)**。

$$\ddot{y}_j(t)+\omega_j^2 y_j(t)=0 \quad (t<0)$$
$$=\rho v^2 A\,\phi_j(\ell)\,/\,\{mL\int_0^L \phi_j^2(x/L)\,d(x/L)\} \quad (t\geqq 0) \text{ ------(10-56)}$$

ここで　ω_j＝　j モードのパイプの自由振動に伴う固有振動数(rad./s)

もし破断の瞬間にパイプが全く動いていないなら、初期条件は、

$$y_j(0)=\dot{y}_j(0)=0 \qquad \text{--(10-57)}$$

(10-56)式の過渡応答の解および(10.57)式の初期条件は Duhamel の積分で与えられる。その結果は次のようになる**(＊7)** (この結果は(10-56)式に代入することで証明できる)。

$$y_j(t)=[\rho v^2 A\,\phi_j(\ell)\,/\,\{\omega_j^2\, mL\int_0^L \phi_j^2(x/L)\,d(x/L)\}]\,(1-\cos\omega_j t) \text{ -----------(10-58)}$$

この解は、動的応答が無視され流体力が静的に作用している場合の定常変位廻りに変動する。そのサイクルは減衰が無視されているのである範囲で繰り返される。モーダル変位 $y_j(t)$の振幅はモーダル固有振動数ω_jの平方に反比例する。モーダル固有振動数はモード数とともに増加するので、応答は通常その最初の 2,3 のモードに支配される。例えば、もし破断が Fig.10-14 に示されるようにカンチレバーの先端(ℓ＝L)で起きてその 1 次モードの応答振幅が 1.0 であるなら、2 次と 3 次の振幅はそれぞれ 0.0255 と 0.00324 になる。

$\phi_j(L)/\int_0^L \phi_j^2(x/L)\,d(x/L)$はこれらのモードに対し一定なので、最初の 3 つのモードの固有振動数は 1 →6.26→17.5 の割合で増加する。

構造減衰は減衰項 $2\zeta_j\omega_j\dot{y}_j(t)$ (→ζ_jは j モードの減衰ファクタ)を(10-56)式の左辺に加えることで解析の中に組み込むことができる。その結果、過渡応答の解は次のようになる。

$$y_j(t)=[\rho v^2 A\,\phi_j(\ell)\,/\,\{\omega_j^2\, mL\int_0^L \phi_j^2(x/L)\,d(x/L)\}]$$
$$[1-\{e^{-\zeta_j\omega_j t}/(1-\zeta_j^2)^{0.5}\}\cos\{(1-\zeta_j^2)^{0.5}\omega_j t-\phi\}] \text{ ------(10-59)}$$

ここで　$\phi=\zeta_j/(1-\zeta_j^2)^{1/2}$

これらの減衰過渡応答の解は **Fig.10-15** に示される。減衰は動的応答を定常応答まで減退させる効果があるが、$\zeta_j \omega_j t \ll 1$ である限り動的応答を顕著に減退させることはない。

破断パイプを通る流体流速は時間とともに変化する。破断の瞬間、流体は運転流速で流れる。流体リザーバ圧力と大気圧の違いで圧力差が変化して、破断のあと急速に、流速は最大速度まで加速される。それからシステムのブローダウンと圧力の解放につれて流速は次第に減退する。

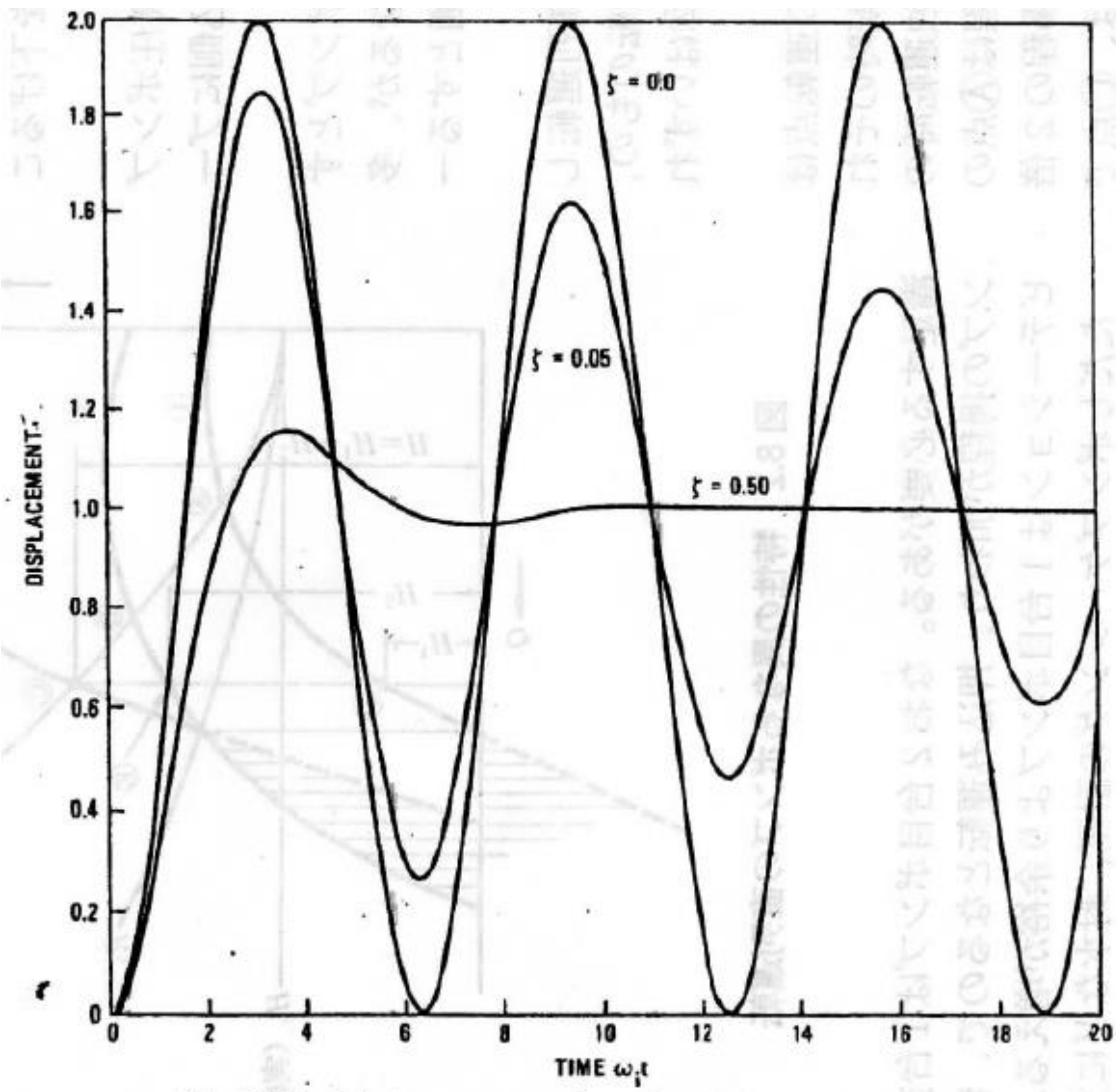


Fig. 10-15 Displacement as a function of time and damping.
(時間と減衰の関数としての変位)

次のように流速が近似的な指数関数で近似できるなら、

$$v = 0 \ (t<0),\quad v_o e^{-Kt} \ (t \geqq 0) \qquad \text{------------------------------------}(10\text{-}60)$$

クローズドフォームの解が、破断パイプの減衰無しの応答について Duhamel の積分を用いて得ることができる。(10-60)式を(10-56)式に代入すれば、その解は次のようになる(＊8)。

$$y_j(t)=[\rho A v_o^2/(mL\omega_j)][\phi_j(\ell)/(4K^2+\omega_j^2)][1/\int_0^L \phi_j^2(x/L)d(x/L)]$$
$$x[\sin\omega_j t\{2K(1-e^{-2Kt}\cos\omega_j t)+\omega_j e^{-2Kt}\sin\omega_j t\}$$
$$-\cos\omega_j t\{\omega_j(1-e^{-2Kt}\cos\omega_j t)-2K e^{-2Kt}\sin\omega_j t\}]$$

---------------------(10-61)

この解は、もし 2Kt≪1 なら　一定流速に対する近似解を与える。なおパイプ曲げとしてパイプに以下のモーメントが誘起される(＊9)。

M＝EI{∂²Y(x,t)/∂x²}＝EIΣy_j(t){∂² ϕ_j(x)/∂x²}　(Σ→j＝1,2,3…N の和)---(10-62)

ここで　E＝管材の弾性係数、I＝管断面 2 次モーメント、

一般に最初の 2,3 モードが(10-62)式のモーメントを支配する。多くの場合、パイプの曲げはパイプが弾性的に保持できる最大モーメントを越え、パイプは降伏し塑性変形する。降伏パイプの動的解析は塑性ヒンジに接続されたパイプセグメントモデルか FEM 弾塑性モデルのいずれかを用いて行う。

[上記の式の記述は読みづらい所もあるので原文の式のコピーを下記に示す。]

$$y_j(t) = \frac{\rho A v^2 \psi_j(\ell)}{\omega_j^2 \mathrm{m} L \int_0^L \psi_j^2(x/L)\, d(x/L)}(1-\cos\omega_j t) \qquad \text{(10-58)}$$

$$y_j(t) = \frac{\rho v^2 A\, \psi_j(\ell)}{\omega_j^2 \mathrm{m} L \int_0^L \psi_j^2(x/L)\, d(x/L)}\left[1-\frac{e^{-\zeta\omega_j t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_j t-\phi\right)\right] \qquad \text{(10-59)}$$

$$\begin{aligned} y_j(t) = {} & \frac{\rho A v_0^2}{\mathrm{m} L\omega_j}\,\frac{\psi_j(\ell)}{4K^2+\omega_j^2}\,\frac{1}{\int_0^L \psi_j^2(x/L)\,d(x/L)}\{\sin\omega_j t\,[2K(1-e^{-2Kt}\cos\omega_j t) \\ & +\omega_j e^{-2Kt}\sin\omega_j t)]-\cos\omega_j t\,[\omega_j(1-e^{-2Kt}\cos\omega_j t) \\ & -2Ke^{-2Kt}\sin\omega_j t]\} \end{aligned} \qquad \text{(10-61)}$$

$$M = EI\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(x,t) = EI\sum_{j=1}^{N} y_j(t)\frac{\partial^2\psi_j(x)}{\partial x^2} \qquad \text{(10-62)}$$

【　補足説明　】

(＊1)　ニュートンの第 2 法則によれば、[流体力合計＝流体モーメンタム(運動量)の変化]　即ち、

検査表面に作用する力＝検査体積内の運動量変化

＋検査体積内に流入する運動量―検査体積から流出する運動量

左辺の検査表面に作用する力としては次のようなものが挙げられる。

① 体積力→流体要素の重力による

② メカニカルフォース→外部入力やインターナルによる流体抵抗などによる

③ 流体直交力→流入側/流出側の検査表面に作用する流体静圧や粘性応力による

④ 流体粘性力→流れの壁面に生じる粘性せん断応力(摩擦抵抗)による

一般には②は特殊なので除外して、上記の関係は下記のような式で表される[6]。

$$\vec{F}_s + \vec{g}\int_{\underline{V}} \rho \, d\underline{V} - \int_S p\hat{n}\,dA + \int_S \vec{\tau}\,dA = \frac{d}{dt}\int_{\underline{V}} \rho\vec{V}\,d\underline{V} + \int_{\underline{V}} \rho\vec{V}(\vec{V}-\vec{V}_b)\cdot\hat{n}\,dA$$

ここで $\vec{F}s$＝検査表面Sに作用する流体力以外のフォース、$\underline{V}$＝検査体積。S＝検査表面積
dA＝検査表面の微少面積、$\vec{V}$＝流入ベクトル流速、$\vec{V}b$＝流出ベクトル速度、
dt＝微少時間、$\vec{\tau}$＝接面平均せん断応力、p＝流体静圧、$\vec{g}$＝重力ベクトル加速度、
$\hat{n}$＝dAに直角な外向きの単位ベクトル、ρ ＝流体密度

左辺の第 2, 4 項は本ケースでは無視できる。また右辺の流出側のベクトル速度 V_b も消散するので

$$\vec{F}_s = \int_S p\hat{n}\,dA + \frac{d}{dt}\int_{\underline{V}} \rho\vec{V}\,d\underline{V} + \int_{\underline{V}} \rho\vec{V}\vec{V}\cdot\hat{n}\,dA$$

右辺の符号を反転させると壁面の反力が得られる。表示は変えているが、(10-50)式に該当する。

(＊2) 梁の運動方程式は、例えばテキスト[2]によれば以下のように得られる。

梁の要素に作用する曲げモーメント M と曲率 R の関係は次のようになる。

$1/R = -M/EI$　　(但し EI＝曲げ剛性)

曲率 R は微少撓み u の状態で

$1/R = (\partial^2u/\partial x^2)\,/\{1+(\partial u/\partial x)^2\} \fallingdotseq \partial^2u/\partial x^2$

から、弾性撓み曲線は次式のようになる。

$EI\,(\partial^2u/\partial x^2) = -M(x)$

一方、梁要素のせん断力 Q は、

$Q = dM/dx = -(\partial/\partial x)\{EI\,(\partial^2u/\partial x^2)\}$

になる。梁要素の運動方程式は、下図(b)から

$\rho\,Adx\,(\partial^2u/\partial t^2) = Q + dQ/dx - Q + q(x,t)dx = dQ/dx + q(x,t)dx$

これに $dQ/dx = d^2M/dx^2$ の関係を用いて

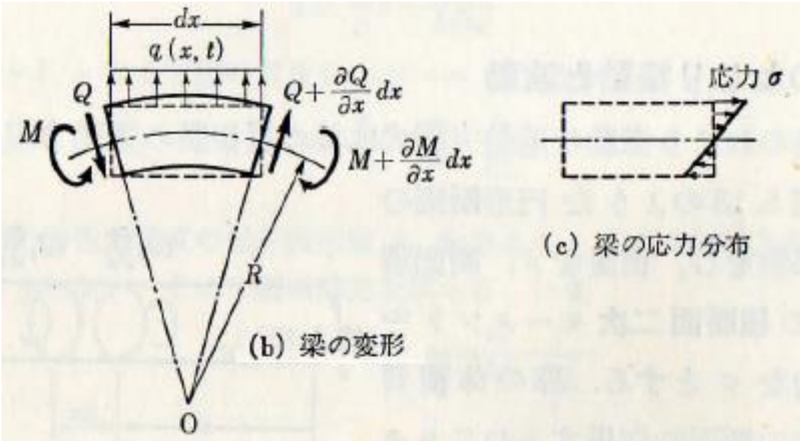
$\rho\,A\,(\partial^2u/\partial t^2) = -(\partial^2/\partial x^2)\{EI\,(\partial^2u/\partial x^2)\} + q(x,t) = -EI\,(\partial^4u/\partial x^4) + q(x,t)$

ここで単位質量 $\rho A \rightarrow m$、撓み $u \rightarrow Y(x,t)$、外力 $q(x,t) \rightarrow 0(t \leqq 0)$ないし $\rho v^2A(t>0)$とすれば

$EI(\partial^4Y(x,t)/\partial x^4) + m(\partial^2Y(x,t)/\partial t^2) = 0$　($t<0$ あるいは $x \neq \ell$)、

$= \rho Av^2$ ($x=\ell$および $t \geqq 0$)

すなわち(10.53)式が得られる。



(＊3) (10-9)式は流体輸送管の自由振動を表わすもので次式で与えられている(1)。

$$EI(\partial^4Y/\partial x^4)+\rho Av^2(\partial^2Y/\partial x^2)+2\rho Av\{\partial^2Y/(\partial x\,\partial t)\}+m(\partial^2Y/\partial t^2)=0$$

(＊4) モーダル解析は自由振動の解を利用するもので系の固有関数（固有モード形状)が用いられる。梁のモーダル解析の要点は以下のようになる(7)。

梁の自由振動の方程式、即ち加振力が作用しない時の強制振動方程式は、

$$EI\{\partial^4Y(x,t)/\partial x^4\}+m\{\partial^2Y(x,t)/\partial t^2\}=0 \qquad \text{------------------(a)}$$

この式の解は、変数分離形の $Y(z,t)=\phi(x)z(t)$ で表わされる。これを自由振動式に代入して

$$(1/\phi)\{d^4\phi(x)/dx^4\}=-\{m/(EI)\}(1/z)\{d^2z(t)/dt^2\}=\text{一定} \qquad \text{--------------(b)}$$

梁の幾何的/運動的境界条件を用いてこれを解くと、解を構成する $\phi(x)$、$z(t)$の式が得られる。例えば両端単純支持梁では境界条件が、たわみ零 即ち $Y(0,t)=Y(L,t)=0$、およびモーメント零即ち$\partial^2Y(0,t)/\partial x^2=\partial^2Y(L,t)/\partial x^2=0$ であるから、

$$\phi(0)=\phi(L)=0,\quad \phi''(0)=\phi''(L)=0$$

これらを(b)式に適用して、次の結果を得る。

$$z(t)=A\sin\omega_n t+B\cos\omega_n t \qquad \text{但し}\ \omega_n=(n\pi/L)^2(EI/m)^{1/2}\text{、}A,B=\text{定数}$$

$$\phi_n(x)=\sin(n\pi x/L)$$

$n=1,2,3,\cdots$であるから、(b)の完全解 [(a)式の一般解]は、質量 m に依存しない形で

$$Y(x,t)=\Sigma(A\sin\omega_n t+B\cos\omega_n t)\sin(n\pi x/L) \quad (n=1\sim\infty)$$

ϕ_nは構造物(梁)の固有モード(固有関数)でω_nは構造物(梁)の固有角振動数である。固有モード形状及び固有振動数は、ティピカルな梁形状について振動テキスト/便覧で与えられている。

さて加振力 $F(x,t)$が作用する時の強制振動方程式は

$$EI\{\partial^4Y(x,t)/\partial x^4\}+m\{\partial^2Y(x,t)/\partial t^2\}=F(x,t) \qquad \text{------------------(c)}$$

(c)式の特解も自由振動の展開式と同じフォームで近似できる。即ち

$$Y(x,t)=\Sigma\phi_n(x)y_n(t) \quad (n=1\sim\infty) \qquad \text{- ---------------------------(d)}$$

この表式を(a)式に代入すると

$$\Sigma[EI\phi_n''''(x)y_n(t)+m\phi_n(x)y_n''(t)]=F(x,t) \quad (n=1\sim\infty)$$

ここで $\phi_n''''(x)=(p_n^2/c^2)\phi_n(x)$ であるから

$$\Sigma[EI(p_n^2/c^2)y_n(t)+my_n''(t)]\phi_n(x)=F(x,t)$$

$c^2=EI/m$、 $p=\omega_n$であるから

$$\Sigma[\omega_n^2y_n(t)+y_n''(t)]m\phi_n(x)=F(x,t)$$

$\phi_j(x)$を辺々に乗じて、梁全長(0～L)で積分すると

$[\omega_n^2 y_n(t)+y_n''(t)]\int_0^L m\phi_n(x)\phi_j(x)dz=\int_0^L F(x,t)\phi_j(x)dx$

固有モードの直交性(＊5)より、

$n\neq j$ のとき $\int_0^L m\phi_n(x)\phi_j(x)dx=0$

$n=j$ のとき $\int_0^L m\phi_n(x)\phi_j(x)dx=\int_0^L m\phi_n^2(x)dx \neq 0$

であるから、

$[\omega_n^2 y_n(t)+y_n''(t)]\int_0^L M\phi_n^2(x)dx=\int_0^L F(x,t)\phi_n(x)dx$

$\downarrow$

$y_n''(t)+\omega_n^2 y_n(t)=\int_0^L F(x,t)\phi_n(x)dx\,/\,\{\int_0^L m\phi_n^2(x)dx\}$ ---------------------------------(e)

この常微分方程式を解けば、(d)式左辺の $y_n(t)$が得られ更に梁の任意位置・時刻の応答変位量 $Y(z,t)$が得られる。この(e)式の右辺は**一般化フォース**と呼ばれる。(e)式は一般化フォースに応答する１セットの１次元バネ支持構造物の運動を記述している。この等価な構造物の応答量$[\phi_n(x)y_n(t)]$の合計即ち(d)式が連続構造物の応答に対して一つの近似解を与える。

このように、固有モードの直交性[即ち $\int_0^L\phi_i\phi_j dx=0$]が保有されているなら、偏微分方程式(c)式を一組の等価な常微分方程式(e)式に変形することが出来る。構造物が直交性を持たない場合でも(e)式は任意モードの構造物の応答に対して**一つの近似解を与える**。もし構造物(梁)の質量がスパンに沿って変化するなら、固有モードの直交性はない。ただ質量変化がモード形状に大きな影響を与えないなら、**単位長さ当りの等価質量**を定義して(e)式は適用できる。

(＊5) 以下テキスト(2)に従って記述。外力が作用しない場合の運動方程式、即ち自由振動方程式は、

$EI\partial^4Y/\partial x^4+m\partial^2Y/\partial t^2=0 \rightarrow \partial^2Y/\partial t^2+c^2\partial^4Y/\partial x^4=0$　　但し $c^2=EI/m$

弦と同様に梁の任意の点 z は一定の運動をするので、一般解として $Y(x,t)=\phi(x)y(t)$が想定できる。これに上式に代入して、

$\phi(x)y''(t)+c^2\phi''''(x)y(t)=0$

$y''(t)/y(t)=-c^2\phi''''(x)/\phi(x)=-p^2$（y,t に相互依存がなく p^2 は変数分離形の定数になる）

$\downarrow$

$\phi''''(x)-(p^2/c^2)\phi(x)=0$

m,n 番目の固有関数は、

$\phi_m''''(x)=\alpha_m^4\phi_m$　$(\alpha_m^4=p_m^2/c^2)$

$\phi_n''''(x)=\alpha_n^4\phi_n$　$(\alpha_n^4=p_n^2/c^2)$

上の式にϕ_n、下の式にϕ_mを乗じて、辺々、差し引いて積分をとると

$\int_0^L[\phi_n\phi_m''''-\phi_m\phi_n'''']dx=(\alpha_m^4-\alpha_n^4)\int_0^L\phi_m\phi_n dx$

公式 $\int F'f\,dx=Ff-\int Ff'\,dx$ を用いて、左辺を２回積分すると

左辺$=[\phi_n\phi_m'''-\phi_m\phi_n'''+\phi_m'\phi_n''-\phi_m''\phi_n']_0^L$

梁の境界条件は、

① 自由端：　$\phi''=0,\ \phi'''=0$

② 支持端：　$\phi=0,\ \phi''=0$

③ 固定端：　$\phi=0,\ \phi'=0$

であるから、いずれの場合も左辺は零になる。即ち、

$(\alpha_m^4-\alpha_n^4)\int_0^L\phi_m\phi_n dx=0$

$m\neq n$ のときは、$(\alpha_m^4-\alpha_n^4)\neq 0$ であるから **$\int_0^L\phi_m\phi_n dx=0$ →梁の固有関数の直交性**と云う。

$m=n$ のときは、$(\alpha_m^4-\alpha_n^4)=0$ であるから、**$\int_0^L\phi_m\phi_n dx=\int_0^L\phi_m^2 dx\neq 0$**

(＊6) 上記**(＊4)**と同じやり方で常微分方程式を求める。但し固有角振動数ω_nは既知とする。

$$EI\{\partial^4 Y(x,t)/\partial x^4\}+m\{\partial^2 Y(x,t)/\partial t^2\}=\rho v^2 A$$

この解を $Y(x,t)=\Sigma y_j(t)\phi_j(x)$　とおいて　上式に代入すると

$$\Sigma[\omega_j^2 y_j(t)+y_j''(t)]m\phi_j(x)=\rho v^2 A$$

$\phi_k(x)$を辺々に乗じて、梁全長(0～L)で積分すると

$$[\omega_j^2 y_j(t)+y_j''(t)]\int_0^L m\phi_j(x)\phi_k(x)dz=\int_0^L(\rho v^2 A)\phi_k(x)dx$$

固有モードの直交性**(＊5)**より、

$$j\neq k \text{ のとき } \int_0^L m\phi_j(x)\phi_k(x)dx=0$$

$$j=k \text{ のとき } \int_0^L m\phi_j(x)\phi_k(x)dx=\int_0^L m\phi_j^2(x)dx \neq 0$$

であるから、

$$[\omega_j^2 y_j(t)+y_j''(t)]\int_0^L m\phi_j^2(x)dx=\int_0^L(\rho v^2 A)\phi_j(x)dx$$

$$\downarrow$$

$$y_j''(t)+\omega_j^2 y_j(t)=\int_0^L(\rho v^2 A)\phi_j(x)dx/\{m\int_0^L\phi_j^2(x)dx\}$$

ここで　x を x/L と無次元化し更に荷重作用点を $x=\ell$とすれば、

$$\mathbf{y_j''(t)+\omega_j^2 y_j(t)=(\rho v^2 A)\phi_j(\ell)/\{mL\int_0^L\phi_j^2(x/L)d(x/L)\}}\quad \text{((但し } t\geqq 0)$$

$t<0$ のときは　右辺は零である。

(＊7) ここでは過渡振動の解(**添付 B** 参照)を求めるに際して[ステップ関数**➞**Duhamel 積分]を用いている。しかし解法としては[インパルス関数**➞**たたみ込み積分]の方が、手間が少ないので、ここでは後者を採る(解法的には十分相関性あり)。また運動方程式には減衰項が含まれていないが、後述の(10‐59)式の説明を兼ねて下記の減衰項を含めた運動方程式を考える。

$$\mathbf{y_j''(t)+2\zeta\,\omega_j y'(t)+\omega_j^2 y_j(t)=(f_o/m)\,\delta(t)}$$

$$\mathbf{f_o=(\rho v^2 A)\phi_j(\ell)/\{L\int_0^L\phi_j^2(x/L)d(x/L)\}}$$

ここで、ω_j=j 次固有角振動数、ζ＝減衰定数、$\delta(t)$＝単位インパルス関数,

まず上記の運動方程式をラプラス変換する。変換公式によれば

$$\mathcal{L}(y'')=s^2Y(s)-sy(s)-y'(0)、\mathcal{L}(y')=sY(s)-y(0)、\mathcal{L}(y)=Y(s)、\mathcal{L}[\delta(x)]=1$$

である。また $t=-0$ では $y(0)=y'(0)=0$ なので、

$$s^2Y(s)+2\zeta\,\omega_j sY(s)+\omega_j^2 Y(s)=f_o/m \quad\rightarrow\quad Y(s)/f_o=1/(s^2+2\zeta\,\omega_j s+\omega_j^2)$$

逆変換して次の関係を得る。ここで **h(t)は衝撃応答関数**(伝達関数)である。

$$\mathbf{y(t)/f_o=[1/\{m\omega_j(1-\zeta^2)^{0.5}\}]e^{-\zeta\omega_j t}\sin\{\omega_j(1-\zeta^2)^{0.5}t\}\ =h(t)}$$

以上はインパルス関数に対する衝撃応答である。この応答をベースに継続して作用する衝撃荷重に対する応答を求めるため、次のたたみ込み積分を行う。

$$\mathbf{y(t)=\int h(t)f(t-\tau)d\tau=\int_0^L[1/\{m\omega_j(1-\zeta^2)^{0.5}\}]e^{-\zeta\omega_j t}\sin\{\omega_j(1-\zeta^2)^{0.5}t\}\cdot f_o\,d\tau}$$

この場合、積分公式　$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\{e^{ax}/(a^2+b^2)\}(a\sin bx-b\cos bx)$を用いると

$$y(t)=\{f_o/(m\omega_j^2)\}[1-\{e^{-\zeta\omega_j t}/(1-\zeta^2)^{0.5}\}\{\zeta\sin\{\omega_j(1-\zeta^2)^{0.5}t$$

$$+(1-\zeta^2)^{0.5}\cos\{\omega_j(1-\zeta^2)^{0.5}t\}]$$

さらに$\zeta=\sin\phi$、$(1-\zeta^2)^{0.5}=\cos\phi$ とおくと

$$y(t)=\{f_o/(m\omega_j^2)\}\{1-\{e^{-\zeta\omega_j t}/(1-\zeta^2)^{0.5}\}\cos\{\omega_j(1-\zeta^2)^{0.5}t-\phi\}\}$$

ここで　$f_o=(\rho v^2 A)\phi_j(\ell)/\{L\int_0^L\phi_j^2(x/L)d(x/L)\}$であるから、

$$\mathbf{y(t)=[(\rho v^2 A)\phi_j(\ell)/\{\omega_j^2 mL\int_0^L\phi_j^2(x/L)d(x/L)\}]}$$

$$\mathbf{x\{1-\{e^{-\zeta\omega_j t}/(1-\zeta^2)^{0.5}\}\cos\{\omega_j(1-\zeta^2)^{0.5}t-\phi\}\}}$$

即ち、(10‐59)式が得られる。減衰無し$\zeta=0$ とすると

$$y(t)=[(\rho v^2A)\phi_j(\ell)/\{\omega_j^2 mL\int_0^L\phi_j^2(x/L)d(x/L)\}]\{1-\cos\omega_j t\}$$

となって(10-58)式が得られる。

(＊8)　上記(＊7)の結果は荷重 f_o が時間変化しないことを前提にしている。ここで排出流速 v が時間変化し $t\geqq 0$ において $v=v_oe^{-Kt}$ であるなら y(t)のたたみ込み積分式は次のように変る。

$$y(t)=\int h(t)f(t-\tau)d\tau=\int_0^L[1/\{m\omega_j(1-\zeta^2)^{0.5}\}]\,e^{-\zeta\omega jt}\sin\{\omega_j(1-\zeta^2)^{0.5}t\}\cdot f_o{}'e^{-2K\tau}d\tau$$

但し $f_o{}'=(\rho v_o^2A)\phi_j(\ell)/\{L\int_0^L\phi_j^2(x/L)d(x/L)\}$

(10-61)式はこの積分の結果得られらたものと思われる。ただ $v=v_oe^{-Kt}$ のように指数関数的に減少するのであれば設計的な意義は殆どないような気がする。

(＊9) (10-62)式は微分項 $\{\partial^2\phi_j(x)/\partial x^2\}$ を含んでいる。これを長さ L の片持ち梁について微分すると次の結果が得られる。

$$M=EI\Sigma y_j(t)\{\partial^2\phi_j(x)/\partial x^2\}=EI\Sigma y_j(t)[-(\lambda_j/L)^2(\sin\lambda_j+\sinh\lambda_j)\{\cos(\lambda_j/L)x+\cosh(\lambda_j/L)x\}$$
$$+(\lambda_j/L)^2(\cos\lambda_j+\cosh\lambda_j)\{\sin(\lambda_j/L)x+\sinh(\lambda_j/L)x\}]$$

なお、片持ち梁では固有関数は次式で与えられる。

$$\phi_j(x)=(\sin\lambda_j+\sinh\lambda_j)\{\cos(\lambda_j/L)x-\cosh(\lambda_j/L)x\}$$
$$-(\cos\lambda_j+\cosh\lambda_j)\{\sin(\lambda_j/L)x-\sinh(\lambda_j/L)x\}]$$

2. Blevins テキストのパイプホイップ式の運用

(1)　Blevins テキストの 10.6 の内容はどちらかというとパイプホイップ現象を引用して過渡振動問題扱い(解き方)を例示したもので、直ちにその結果を設計に使用できる訳ではない。

パイプヒップ現象は非定常問題なので、もし正確を期すなら水撃解析や弾塑性解析が必要になるが、Nuclear 以外のプラント設計ではそのようなアクションは過剰になる。設計者が知りたいのは重要度の高い特定配管の特定部位におけるホイップの規模やオーダーであることが多い(要は設計の目安を得たい…)。この場合、10.6 節で 与えられる解が利用できないか？　設計的に重要と思われる以下の事項について、Blevins テキストの運用を考えてみる。

① 破断時の反力➞ブローダウン推力の設定
② Blevins モデルの適用➞近似的な運用
③ 破断パイプ先端の最大変位➞Blevins 解の使用及び塑性変形の考慮
④ 破断パイプ付け根の応力➞破断の連鎖

(2) まず①について。Blevins は下図(a)のように破断口に検査体積を設け破断時の反力(ブローダウン推力)をセットしている。即ち

反力 $F=-[\int_{s'}p\,n\,ds+d(\int_v\rho UdV)/dt+\int_{s'}\rho U(U\,n)ds]$　➞　破断時の反力 $F_y=\rho v^2A$

F 式の右辺第 1 項は、流体圧 pn が検査表面 S のうち出入口の流れ面積 S' (➞A_e,A_i) にのみに作用するところから、次の式で表される。

$\int_{s'}p\,n\,ds \fallingdotseq P_iA_i-P_eA_e$　(但し P_e,P_i＝出入口静圧、A_e,A_i＝出入口流れ面積)

また第 2 項及び第 3 項も次のように表わされる。

$$d(\int_v\rho UdV)/dt=(1/2)V\{(d\rho/dt)(v_i+v_e)+\rho(dv_i/dt+dv_e/dt)\}$$
$$\int_{s'}\rho U(U\,n)ds=[\rho_iv_i^2-\rho_ev_e^2]A$$

いずれの項も時間変化する。結果的に F 式は次のように表現できる。

$$F(t)=-[[P_iA_i-P_eA_e]_t+\underline{(1/2)V\{(d\rho/dt)(v_i+v_e)+\rho(dv_i/dt+dv_e/dt)\}}+A[\rho_iv_i^2-\rho_ev_e^2]_t]$$

本ケースのように検査体積 V が小さい場合、右辺[ ]内の第 2 項は無視できるので

$$F(t) \fallingdotseq -[\,[P_iA_i - P_eA_e]_t + A[\rho_i v_i^2 - \rho_e v_e^2]_t\,]$$

で十分近似できる[**下図(b)**参照]。いずれにしろ破断口の検査体積は他の流体体積に繋がっているので単独で挙動することはない。圧力波の伝播も含めて系全体の**過渡流れ解析**が必要になる。

下図(c)に過渡流れ解析による<u>ブローダウン推力の解析値と実験値の比較例</u>[(3)]を示す。実験の事情から 0～0.02sec の間で実験値にスプリットがでているが、総じて解析によって衝撃荷重が掴めることがわかる。解析結果では t＝0 においてインパルス関数に近い応答が現れるから、Blevins の衝撃応答の解はある程度近似的な解を与えていると思う。

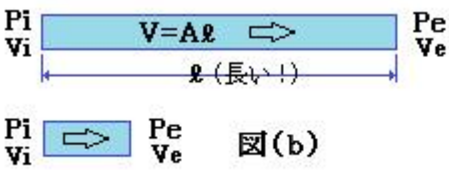
さて Blevins は反力 F に対して[ρv^2A]を与えているが、流体流速 v についての情報はない。破断発生 t＝0 において当然 $v_i = v_e = 0$ であるから、$F(0) = -[P_iA_i - P_eA_e]_{t=0}$ となる。この場合 P_e は大気圧 P_a に、また $A_i \fallingdotseq A_e$ に比定できるので、

$$F(0) \fallingdotseq -(P_i - P_a)A$$

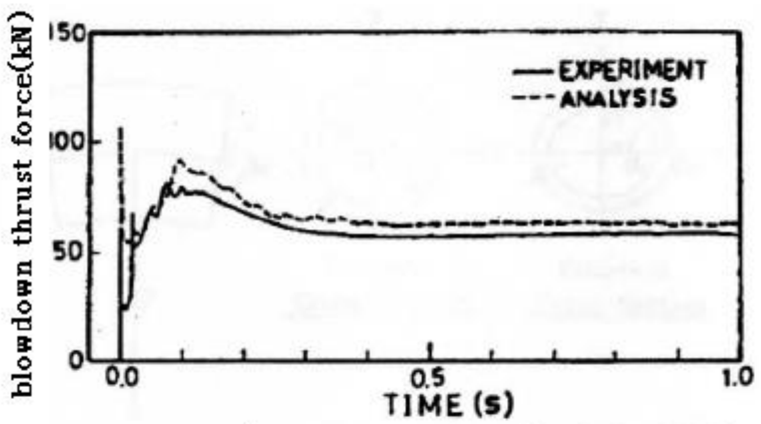
これが下図(c)に見られる初期のインパルスに該当するようだ。Blevins テキストでは時間経過とともに $P_i \rightarrow P_a$ に、$v_e \rightarrow$ 零に収束し定常に移行するとしているが、v_i については何もふれていない。多分、運動量保存則 $P_i + \rho v_i^2A = P_e + \rho v_e^2A$ において $v_i = v$、$v_e = 0$ から $(P_i - P_a) = -\rho v^2A$ とし、これを上記の F(0)式に代入して $\mathbf{F_y = \rho v^2A}$ としたのではないかと思われる。

結論的には <u>$F_y \fallingdotseq (P_i - P_a)A$</u> をもって構造計算用のブローダウン推力とすればいいと思われる。

図(a)



図(b)



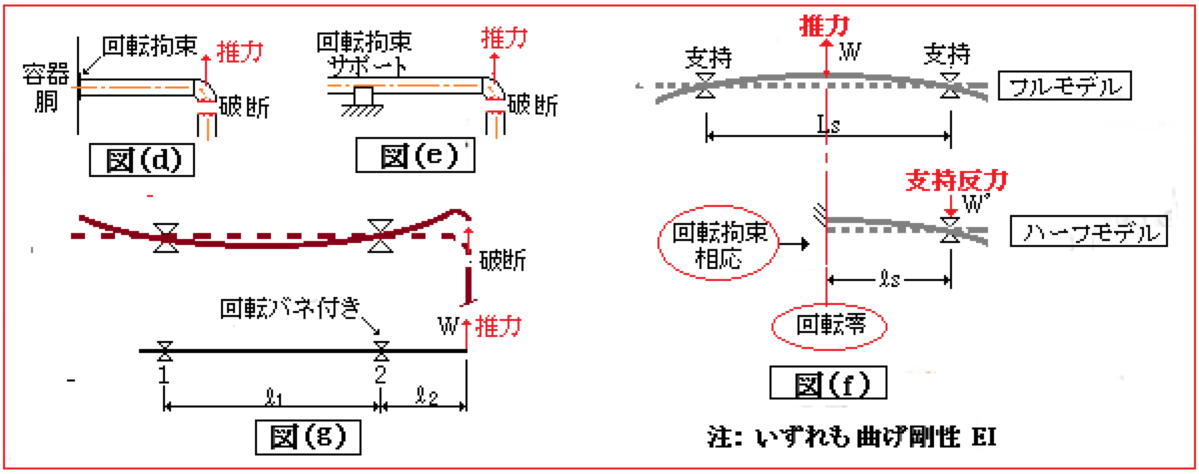
図(c) ブローダウン推力の変化(解析と実験の比較)
[文献(3)より引用]

(3) 次に②について。Blevins のモデルは固定－自由のカンチレバー構造になっている。これは**下図(d)(e)**のような構造に対して適用できると思われる。**下図(f)**は一見して適用できないように見えるが、スパンの中央で回転零なのでスパン中央で固定、支持点で自由と見なせる。故にハーフモデルでは固定-自由のカンチレバー構造になる。図からわかるように、$\ell_s = L_s/2$、$W' = W/2$ である所から ハーフモデルの静的撓みは $\delta' = W'\ell_s^3/(3EI) = (W/2)(L_s/2)^3/(3EI) = WL_s^3/(48EI)$ になり、フルスパンモデルの撓み $\delta = WL^3/(48EI)$ と同じになる。とはいっても両者の動的パラメータ(固有関数/固有振動数)は異なるので同一応答とは云い難い。ただ、エンジニアリング的には

1 次モード辺りではハーフモデルの応答の方が大きくなる見込み

があるようなので**両端支持のフルモデルをハーフモデルで置き換えて応答計算していいのか**もしれない(もちろん<u>この置き換えについては安全性を検証する必要がある</u>)。なお、<u>連続支持配管</u>

では支持点の拘束が増加するので、ハーフモデルは更に安全側に使用できると思う。また図のようにスパン中央に推力がなくても、適宜、スパン長など調整して安全側に見積りすればよい。



図(g)は破断パターンとして最も発生確率が高い。この場合、支持点 2 は固定端ではないのでカンチレバー構造とは云い難いが、支持点 2 には次のような回転バネ K_θ が効いている。

支持点回転変位 $\theta = M\ell_1/(3EI)$ → $M = (3EI/\ell_1)\theta$ → $K_\theta = 3EI/\ell_1$

この場合、支持点のモーメントは $M=W\ell_2$ であるから、

$\theta = W\ell_1\ell_2/(3EI)$ → 支持点 2 の回転による先端の撓み $\delta' = \theta\ell_2 = W\ell_1\ell_2^2/(3EI)$

また支持点から先端までのせん断分布による先端の撓みは梁公式より $\delta'' = W\ell_2^3/(3EI)$ なので

先端の撓み $\delta = \delta' + \delta'' = W\ell_1\ell_2^2/(3EI) + W\ell_2^3/(3EI) = \{W\ell_1\ell_2^2/(3EI)\}(1+\ell_2/\ell_1)$

従ってカンチレバー構造に対し$[(\ell_1+\ell_2)/\ell_1]$倍 になる。前述と同じように、この倍率は安全側に Blevins モデルの応答計算結果に適用できる可能性がある。即ち

推定される先端変位 $Y(L)$ → $\{(\ell_1+\ell_2)/\ell_1\}$x[カンチレバー構造での Max,$Y(x,t)$]

(4) 次に③について。Blevins モデルは曲げ剛性 EI による弾性解析によっているので、その変形には自ずと限りがある。しかし Blevins も云っているようにホイップによる大半のパイプ曲げは弾塑性域にはいると予想される。特にパイプ固定端がいわゆる塑性関節(塑性ヒンジ)化すればパイプ自由端は大きく飛び跳ねて変形する。ブローダウン推力を受けるパイプ自由端がどれほど動くかは設備設計上重要である。ただ弾塑性問題を FEM の助けなしで解くのは難しい。ただ一般プラント設備では特に厳密な解は必要とされず**単に About な変形量がわかればいい**。そこであくまで目安計算ということで、以下にパイプ端撓みの簡易予測法を思案してみたい。なお煩雑になるのを避けて Fig.10-14 の推力はカンチレバーの先端 $x=L$ に作用するものとする(即ち $\ell=L$ とおく)。

まず始めにカンチレバーの付根に作用するモーメント M_3 と、その指標としての降伏モーメント M_y と全塑性モーメント M_p を求める。付根のモーメント M_3 は次の手順で求める。

① 固有角振動数($\omega_1, \omega_2, \omega_3\cdots$)を求める。片持ち梁の場合

$\omega_j = (\lambda_j/\ell)^2\{EI/\{\rho A\}\}^{0.5}$　　但し $\lambda_1=1.875$、$\lambda_2=4.694$、$\lambda_3=7.855$、…

② 固有関数 $\phi_j(x)$に係る次の各パラメータを求める。

$x=L$ における $\phi_j(L)$、および　その自乗積分 $\int_0^1 \phi_j^2(\eta)d\eta$ (但し $\eta = x/L$)

なお 片持ち梁については

$$\phi_j(x)=(\sin\lambda_j+\sinh\lambda_j)\{\cos(\lambda_j/L)x-\cosh(\lambda_j/L)x\}$$
$$-(\cos\lambda_j+\cosh\lambda_j)\{\sin(\lambda_j/L)x-\sinh(\lambda_j/L)x\}]$$
$$\phi_j(\eta)=(\sin\lambda_j+\sinh\lambda_j)\{\cos(\lambda_j\eta)-\cosh(\lambda_j\eta)\}$$
$$-(\cos\lambda_j+\cosh\lambda_j)\{\sin(\lambda_j\eta)-\sinh(\lambda_j\eta)\}]$$

パラメータ $\int_0^1\phi_j^2(\eta)\,d\eta$ は式を複雑になるので、**数値積分**に依るのがよい。

③ (10-58)～(10-60)式の何れかで各次の時間変位 $y_j(t)$ を求める。通常は(10-58)式で十分であるが、減衰比ζの効果が期待できるところでは(10-59)式を用いる。(10-60)式は一般的ではない。時間 t については $\cos\omega_j t$➞0 になる時刻で変位がピークになるので例えば $t=t_p=(\pi/2)/\omega_1=T_1/4$ (但し T_1=1 次固有周期)を採って $y_j(t_p)$ を計算する。

④ M_3 を次式即ち(10-62)式で計算する。但し x＝0 とする。

$$M_3=EI\Sigma y_j(t)\{\partial^2\phi_j(x)/\partial x^2\}$$
$$=EI\Sigma y_j(t)[-(\lambda_j/L)^2(\sin\lambda_j+\sinh\lambda_j)\{\cos(\lambda_j/L)x+\cosh(\lambda_j/L)x\}$$
$$+(\lambda_j/L)^2(\cos\lambda_j+\cosh\lambda_j)\{\sin(\lambda_j/L)x+\sinh(\lambda_j/L)x\}]$$

⑤ 更に先端撓み $Y(L,t_p)$ を次式より求める。

$Y(L,t_p)=\Sigma y_j(t_p)\phi_j(L)$ （➞弾性理論によるもの）

降伏モーメント M_y はパイプ曲げによってパイプ外面で降伏が起きるときのモーメントを云い

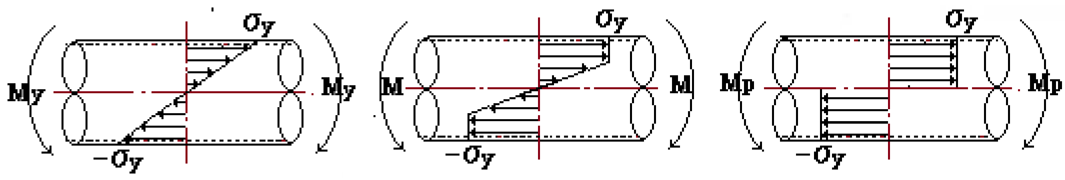
$\sigma=M/Z$ ➞ $M=\sigma Z$ ➞ $\mathbf{M_y=\sigma_y Z_e}$ （σ_y＝降伏応力、Z_e＝弾性断面係数）

全塑性モーメント M_p はパイプ全断面で降伏が起きるときのモーメント(を云い、

$\mathbf{M_p=\sigma_y Z_p}$ （σ_y＝降伏応力、Z_p＝塑性断面係数）

Z_e は通常の弾性計算に用いる断面係数(＝$\pi R^2 t$)、Z_p は塑性断面係数でパイプの場合

$\mathbf{Z_p=1.27\,Z_e}$ ➞ 即ち Z_e の 1.27 倍



(h) 降伏モーメント状態 (弾性限界)　(i) 中間モーメント状態 My＜M＜Mp　(j) 全塑性モーメント状態 (完全弾塑性仮定)

上記で得られた発生モーメント M_3 と My, M_p を比較することで、次の評価が得られる。

$M_3 \leqq M_y$ ➞ カンチレバー全域が弾性域にあり Blevins モデルの解が利用できる。

$M_y < M_3 < M_p$ ➞ カンチレバーは弾性域と弾塑性域になり Blevins 解は利用できない

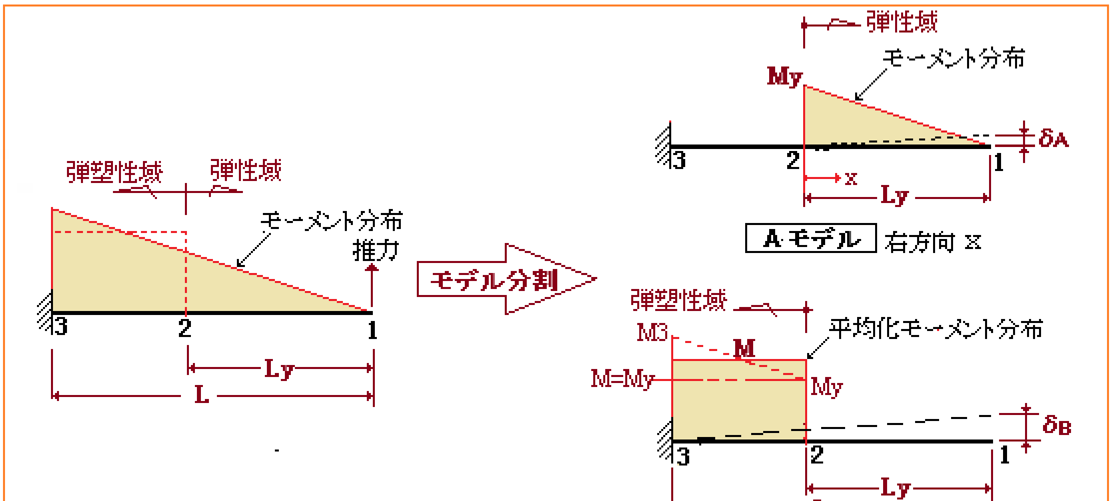
$M_3 \geqq M_p$ ➞ カンチレバー付根が塑性化で不安定になるので設計的には認められない。

$M_3 < M_y$ の場合は　ステップ⑤で求めた弾性理論による $Y(L,t_p)$ を以って先端撓み δ_o とする。

$\boldsymbol{\delta_o=Y(L,t_p)=\Sigma y_j(t_p)\phi_j(L)}$ --(a)

$M_y < M_3 < M_p$ では、カンチレバー前方で弾性域、後方で弾塑性域になる。この状態は多分 FEM によらざるをえないがここでは**下図(k)**のように弾性域(➞A モデル)と弾塑性域(➞B モデル)に別けて扱う。この場合、弾性域の区間長 Ly は次式による。

$M_y/M_3=L_y/L$ ➞ $\mathbf{L_y=(M_y/M_3)L}$



図(k) モデル分割

まず A モデルよりその先端撓み δ_A を求める。後述のように $(Y_3/Y_y)=K_R$ の関係があるのでこの場合の先端撓み δ_A は次式で近似できる。

$\delta_A \fallingdotseq (1/K_R)\,\delta_o$　　ここで δ_o＝(a)式から得られた先端撓み

次いで B モデルを用いその先端撓み δ_B を求める。この場合、付根モーメント M を純曲げによるモーメントとみなし、撓み Y の関係を下図(ℓ)のように線形で近似する。この図から

$(Y_3-Y_y)/(Y_p-Y_y)=(M_3-M_y)/(M_p-M_y)$

$\rightarrow\ Y_3/Y_y=[\{(M_3-M_y)/(M_p-M_y)\}\{(Y_p/Y_y)-1\}+1]=K_R$

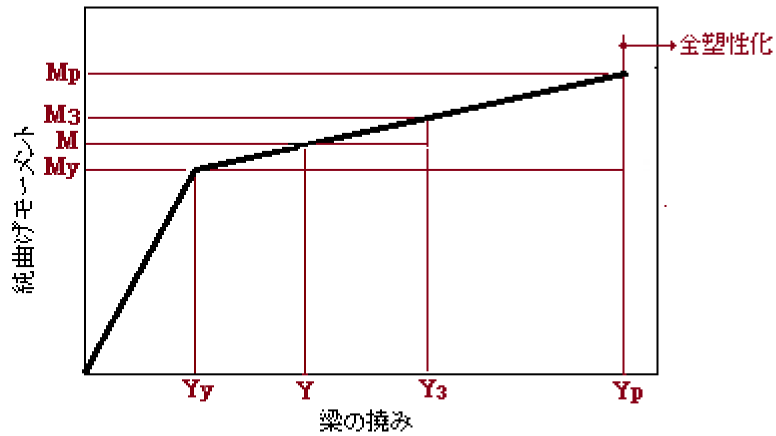
B モデルで用いる平均化されたモーメント(純曲げモーメント)を M_y と M_3 の中間にとって

$M=(M_3+M_y)/2$、$Y=(Y_3+Y_y)/2$

そしてこの場合の Y 式に上記の $Y_3/Y_y=K_R$ の関係を用い

$(Y/Y_y)=(1+K_R)/2$　　ここで $K_R=\{(M_3-M_y)/(M_p-M_y)\}\{(Y_p/Y_y)-1\}$

を得る。この式は Max.弾性変位と弾塑性変位の About な相関を示すもので、弾塑性補正係数ということになる。



図(ℓ) モーメント−撓み関係(線形近似)

ここで B モデルに立ち戻って、M を M_y においた先端変位(撓み)は、梁公式[5]から、

$\delta_B'=\{M_yL^2/(2EI)\}\{1-(L_y/L)^2\}$

これはMax.弾性ひずみに該当するので、実際撓みδ_Bはこれに弾塑性補正係数を乗じて。

$$\delta_B=(1/2)(1+KR)\,\{M_yL^2/(2EI)\}\{1-(L_y/L)^2\}$$

となる。この撓みはもともと線形分布のモーメントを平均化したもので、オリジナルの3/4に減少しているので、4/3(＝1.333)以上を乗じて補正する必要がある(ここでは1.5を乗じる)。即ち

$$\boldsymbol{\delta_B=1.5\text{x}0.5(1+K_R)\,\{M_yL^2/(2EI)\}\{1-(L_y/L)^2\}}$$

トータルの先端撓みδ_oは、δ_Aとδ_Bの和とみていいので、次のようになる。

$$\boldsymbol{\delta_o = Y_1(L_y,t) + 0.75(1+K_R)\,\{M_yL^2/(2EI)\}\{1-(L_y/L)^2\}} \quad \text{-------------------(b)}$$

この式の第2項のパラメータはM_3, M_y, M_p, L, L_y, (Y_p/Y_y)である。現状、前の5つは既知であるが、塑性と弾性の撓み比**(Y_p/Y_y)**は不明である。これについては以下のように設定する。

テキスト(4)の7.2節によれば、塑性材の撓み曲線は次式で与えられる。

$$d^2y/dx^2=(M/FI_n)^{1/n} \quad \rightarrow \quad d^2y_p/dx^2=(M_p/FI_n)^{1/n}$$

ここでF＝塑性係数、n＝加工硬化指数、I_n＝塑性断面2次モーメント

この式をカンチレバーにつき2回積分して　$y_p=\int_0^L(M_p/FI_n)^{1/n}\,\text{x}\,dx=(M_p/FI_n)^{1/n}(L^2/2)$、

弾性材の場合はn＝1でF＝Eであるから　$y_y=\int_0^L(M_y/EI)\,\text{x}\,dx=(M_y/EI)(L^2/2)$、

従って　塑性材vs弾性材の撓み比(y_p/y_y)は次のようになる。

$$(y_p/y_y)=(M_p/FI_n)^{1/n}/(M_y/EI)$$

この(y_p/y_y)は、(a)式のパラメータ(Y_p/Y_y)にかなり近いと考えられるので

$$\boldsymbol{(Y_p/Y_y)\fallingdotseq(M_p/FI_n)^{1/n}/(M_y/EI)}$$

なお　塑性断面2次モーメントI_nと弾性断面2次モーメントIは次式で与えられる。

$$I_n=2\int_0^{\pi}(r\cos\theta)^{n+1}\,t\,r\,d\theta=\boldsymbol{2\,t\,r^{n+2}\int_0^{\pi}(\cos\theta)^{n+1}d\theta}$$

$$I=2\int_0^{\pi}(r\cos\theta)\,t\,r\,d\theta=2\,t\,r^2\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\boldsymbol{\pi r^3 t}$$

ここで　θ＝円周角、r＝パイプ平均径　である。I_nは数値積分で求める。

以上、1次モードで近似したカンチレバーの最大先端撓みδ_oは(a),(b) 式から得られる。多少複雑になったので計算手順を **添付A** に示す。

(5)　次に ④の破断パイプ付根の応力について。

破断したカンチレバー管の付根が塑性ヒンジに近づくと、不安定化してこの部分で2次的な破損が起きる可能性がある。設備的には漏洩量が増加するわけではないが、更に周辺設備に損傷を拡げるかも知れないので、当然、付根に発生する長手方向の1次応力は議論の対象になる。

その場合、対象になる応力は、

①推力による梁曲げ応力、②自重/慣性力/外荷重による梁曲げ応力、③内圧に軸方向応力

が考えられる。もちろん①が支配的になるはずであるが、②③も決して無視できないような気がする。②の場合、配管が片持ち梁になる自重/慣性力/外荷重の負担が加速を伴って急増する。また③の場合は破断直後に水撃圧が派生する。これらについて正確に予測するのは難しい。方便になるが、静的に予測される応力に動荷重係数のMax値2を乗じておけばいいのでないか？即ち

$$\text{発生応力}=M_3/Z_e+2(\sigma_{gs}+\sigma_{ex}+\sigma_p)$$

ここで　(M_3/Z_e)＝付根モーメントによる曲げ応力、σ_{gs}＝自重や地震慣性力による付根応力、σ_{ex}＝風など外力による付根応力、σ_p＝内圧による軸方向応力

付根応力の限界をどうみるか？　ASME Sect.3のNC3650では事故状態について　1.8Syを

許容値にしている。これは材料の引張強さレベルになり限界値としては妥当と思われる。故に

$$M_3/Z_e + 2(\sigma_{gs} + \sigma_{ex} + \sigma_p) \leqq 1.8S_y$$

（ここで S_y＝破断時の温度における材料降伏応力）

が破断パイプ付根の評価基準になると考える。

引用文献/テキスト類）

(1) R. D. Blevins“Flow-induced Vibration“ (Van Nostrand Reinhold Co.)
10. Vibrations of a pipe containing a fluid flow　10.6 Pipe Whip
(2) 坂田「エンジニアリング-サイエンス講座 11 振動と波動の工学」
5.4　梁の波動と振動　3.3　強制振動 （F 過渡振動）
(3)「配管破断時のブローダウン推力と配管の動的応答の解析」宮崎（JSME Vol.51 No.461）S60
(4) W. Johnson & B. Mellor “Plasticity for Mechanical Engineer“ Dept. 7 （清田訳）
(5) 土木学会編「構造力学公式集」　表 5.1～5.3
(6) R.D.Blevins “Applied Fluid Dynamics Handbook“(Von Nostrand Reinhold Co.)
5.5 Conservation of momentum
(7) FE-19-TM-033 「配管振動評価基準 ASME OM3－簡易法レビュ-」
(8) Regulatory Guide 1.46 Protection against Pipe Whip inside Containment (U.S AEC)

＜次ページ以下に**添付** A、B を示す＞

添付Ａ　カンチレバー配管破断時の先端撓みの見積り手順

計算モデル → Fig.10-14 (但しℓ＝L)、モード次数 j＝1 のみ　(＊1)

↓

パラメータの設定

L, r, t,　x , η , E, F, n,　σ_y,　ζ ,　λ_1, F_y,　m,

↓

$I=\pi r^3 t$、$Ze=\pi r^2 t$,　$Z_p=1.27\pi r^2 t$

↓

$\omega_1=(\lambda_1/L)^2(EI/m)^{0.5}$

↓

x＝L

$\phi_1(x)=(\sin\lambda_1+\sinh\lambda_1)\{\cos(\lambda_1/L)x-\cosh(\lambda_1/L)x\}$

$\quad -(\cos\lambda_1+\cosh\lambda_1)\{\sin(\lambda_1/L)x-\sinh(\lambda_1/L)x\}]$

↓

$\phi_1(L)=\phi_1(x)$

↓

$\int_0^1\phi_1^2(\eta)\,d\eta$　(→数値積分)

ここで　$\phi_1(\eta)=(\sin\lambda_1+\sinh\lambda_1)\{\cos(\lambda_1\ \eta)-\cosh(\lambda_1\ \eta)\}$

$\quad -(\cos\lambda_1+\cosh\lambda_1)\{\sin(\lambda_1\ \eta)-\sinh(\lambda_1\ \eta)\}]$

↓

$t_p=(\pi/2)/\omega_1$、　$\phi=\zeta/(1-\zeta^2)^{0.5}$

↓

$y_1(t_p)=[F_y\phi_1(L)/\{\omega_1^2\ mL\int_0^L\phi_1^2(\eta)d\eta\}]$

$\quad \cdot[1-\{e^{-\zeta\omega_1 t}/(1-\zeta^2)^{0.5}\}\cos\{(1-\zeta^2)^{0.5}\omega_1 t-\phi)\}]$

↓

$Y(L,t_p)=y_1(t_p)\cdot\phi_1(L)$

↓

x＝0

$M_3=EI\ y_1(t_p)\ [-(\lambda_1/L)^2(\sin\lambda_1+\sinh\lambda_1)\{\cos(\lambda_1/L)x+\cosh(\lambda_1/L)x\}$

$\quad +(\lambda_1/L)^2(\cos\lambda_1+\cosh\lambda_1)\{\sin(\lambda_1/L)x+\sinh(\lambda_1/L)x\}]$

↓

$M_3=|M_3|$

$M_y=\sigma_y Z_e$、$M_p=\sigma_y Z_p$

↓

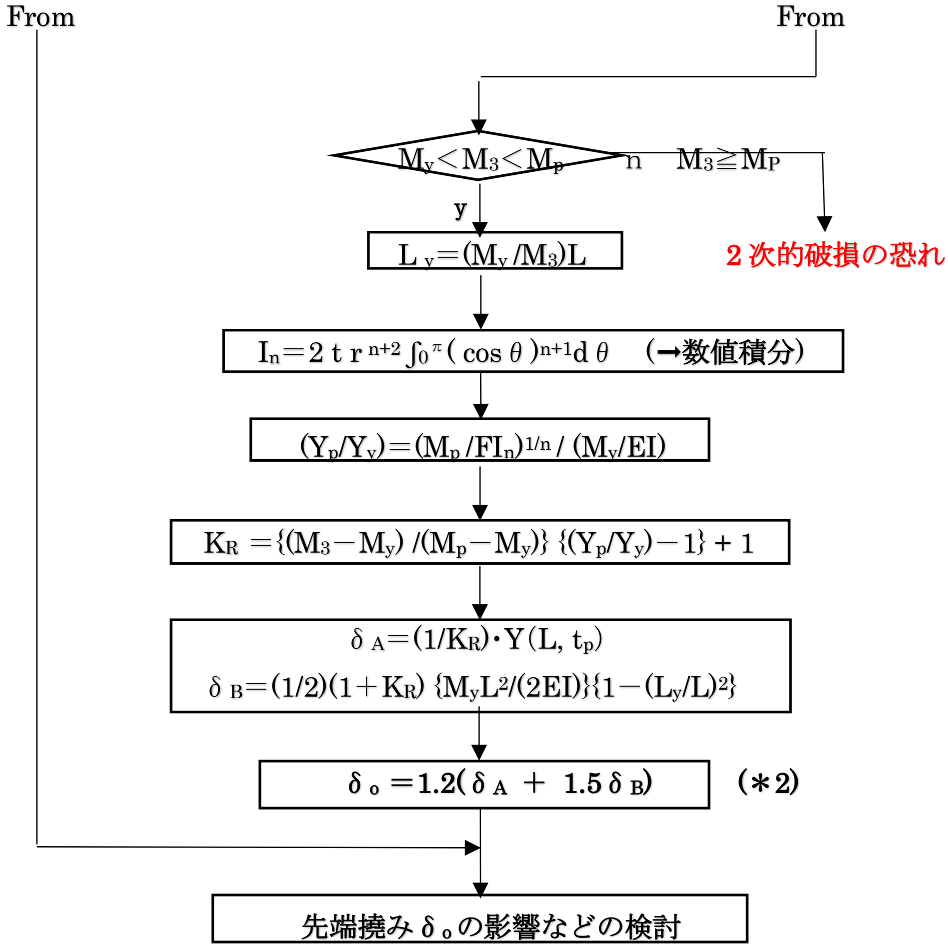
$M_3\leqq M_y$　→ n: Next

y ↓

$\delta_o=Y(L,t_p)$

↓

Next　　　　Next



【　記号説明　】

L＝カンチレバー長さ(m),、x＝長手方向位置(m)、η＝長手方向位置(-)(＝x/L)
r＝パイプ平均径(m)、 t＝パイプ肉厚(m), θ＝円周角(rad.)、
E＝弾性係数(ヤング率)(kgf/m^2), F＝塑性係数(kgf/m^2)(＊3)、n＝加工硬化指数(-)(＊3)、
σ_y＝降伏応力(kgf/m^2)、 ζ＝減衰比(0.01～0.02), λ_1=1 次振動係数(＝1.875)、
F_y＝ブローダウン推力(kgf)、m＝単位長さ当たりの配管質量(kgs^2/m^2)(＝w/g)、
w＝単位長さ当りの配管重量(外装/内容物含む)(kg/m)、g＝重力加速度 9.81m/s
I＝断面 2 次モーメント(弾性材)(m^4)、I_n＝弾性 2 次モーメント(塑性材)、
Z_e＝断面係数(弾性)(m^3)、Z_p＝断面係数(塑性)(m^3)、
M_p＝全塑性モーメント(kgf-m)、M_y＝降伏モーメント(kgf-m)、
M_3＝レバー付根のモーメント(kgf-m)、t_p＝ピーク時間(sec.)、 ϕ＝位相角(rad.)、
ω_1＝1 次固有角振動数(Rrad./s)、
δ_o＝トータル先端撓み(m)、 δ_A＝A モデル先端撓み(m)、 δ_B＝B モデル先端撓み(m)
Y_p＝モーメント M_p による撓み(m)、Y_y＝モーメント M_y による撓み(m)、
$\phi_1(x)$＝固有関数(-)　$y_1(t)$＝時間 t での撓み(m)、$Y_1(x,t)$＝位置 x/時間 t での撓み(m)

注記（＊1）簡便のため推力作用位置を自由端にする(この方が一般的)。また梁構造物では1 次モードが支配的になるので j＝1 のみで計算する。
（＊2） 2 次以上のモードの寄与も含めて更に 1.2 倍する。
（＊3）材料データ/塑性力学テキストによる。

【　添付 B : 過渡振動のあらまし　】

過渡振動は非定常状態において非周期的な衝撃荷重が、ある程度軟らかい弾性体に加えられて発生する振動である。勿論振動テキストに詳しいがここでは quick reference 的に要約してみた。

梁構造に加えられる衝撃のタイプは様々であるが、ここではデルタ関数 δ (t)や単位ステップ関数 u(t)及び一般の時間関数 f(t)で与えられる衝撃荷重を考え、これに対する梁の応答を夫々衝撃応答、ステップ応答あるいは一般応答といっている。表 B1 にこれらの運動/応答式をまとめた。また
表 B2 に一般応答の場合の 3 つの解法のあらましをしめす。表 B3 にラプラス変換解の一例を示す。

表 B.1　過渡振動の挙動式一覧

運動方程式	**衝撃応答**	$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=\frac{f_0}{m}\delta(t)$
	ステップ応答	$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=\frac{f_0}{m}u(t)$
	一般応答	$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=\frac{f(t)}{m}$
初期条件	**衝撃応答**	$x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0$
	ステップ応答	$\dot{x}(0)=\dot{x}_0=0,\ x(0)=x_0=0$
	一般応答	$t=-0$ のとき静止 $x(0)=x_0=0,\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0=0$
伝達関数	**衝撃応答**	$\frac{X(s)}{f_0}=\frac{1}{m(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}=H(s)=\mathcal{L}[h(t)]$
	ステップ応答	$\frac{X(s)}{f_0}=\frac{1}{m(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)s}=\frac{1}{k}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)}-\frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)}\right\}$
	一般応答	$X(s)=\frac{1}{m(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}F(s)=H(s)F(s)=\mathcal{L}[\mathrm{h(t)}f(t)]$
応答関数	**衝撃応答**	$\frac{x(t)}{f_0}=\frac{1}{\mathrm{m}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t=h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$
	ステップ応答	$\frac{x(t)}{f_0}=\frac{1}{k}\left\{1-e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)\right\}=A(t)$
	一般応答	〜

(注)　使用記号については通常の振動テキストの例によるものとする(煩雑になるので説明割愛)。

表B２　一般応答の場合の解法

(１) ラプラス変換による解法 ⟶ 具体的な加振力fの関数形が与えられ、ラプラス変換F(s)が定まるときは逆ラプラス変換による

(２) たたみ込みによる解法 ⟶ 入力をインパルスの重ね合わせと考え各インパルス関数(デルタ関数,ステップ関数など)に対する応答を重ね合わせるもの

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)F(s)]=h*f=f*h=\int_0^t h(\tau)f(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

(３) デュハメル積分による解法 ⟶ 入力をステップ関数の重ね合わせと考え各ステップ関数に対する応答を重ね合わせるもの

$$x(t)=f(0)A(t)+\int_0^t \dot{f}(\tau)A(t-\tau)d\tau$$

表B3　衝撃応答の場合のラプラス変換による解

【衝撃応答における運動方程式の解】

条件）　$x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0$

運動方程式の ラプラス変換 から得られる 応答変位:

$$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]=\frac{sx_0+\dot{x}_0+2\zeta\omega_n x_0}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}+\frac{f_0}{m}\frac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$=x_0\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)}+\frac{f_0}{m}\frac{1}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)}+\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)}$$

１項と２項は 減衰自由振動の解

上記を逆変換して得られる応答変位:

$$x=x_0e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\frac{f_0}{m}\frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t$$

以上