

【整番】 HE-02-TM-007	【標題】 熱過渡における肉厚断面の非定常温度分布の算定
分類：熱伝達／種別：設計メモ	作成年月：H21.8／改訂：Ver0.0(21.8) 作成者：N.Miyamoto

全 20 枚

0. 今では、熱過渡状態(急激な流体温度変化)において圧力容器、熱交あるいは配管の壁に生じる非定常温度分布は、コンピュータの FEM 計算で容易に得られる。しかし FEM 計算を行うには、プログラムマニュアルを読んでインプット操作等に通じなければならない。単純なモデル計算であればあるほど、その間の時間的ロスは大い。ここではコンピュータ計算によらない、線図データを用いた片側断熱平板モデルの非定常伝熱計算について紹介してみたい。

線図による非定常伝熱計算として古くからハイスラー法が知られている。これは理論解から得られた線図を用いて円柱/平板の温度変化を計算するものである。ただ構造物では、温度変化そのものものより急激な温度変化から生じる熱応力をカウントして疲労の可否をチェックする方が重要になるので、更にハイスラー法を加工する必要がでてくる。その点、下記文献による **McNeill-Brock 法** は、ハイスラー法に類似するものの、より実用的で扱い易くなっている。

Engineering Data File – Charts for transient temperatures in pipes

by D. R. McNeill and J. E. Brock (Heating, Piping & Air Conditioning, Nov. 1971)

McNeill-Brock 法は図 A のように流体に曝された片側断熱平板を計算対象にしており、以下のような利点がある。

- ・流体温度のステップ変化のみならず比例変化についても計算できる。
- ・ステップ変化と比例変化を組み合わせ、複雑な温度変化も扱える。
- ・ASME 規格に対応した線形/非線形温度分布を容易に得ることができる。

この方法は一般には伝熱管/配管/塔槽類など薄肉円筒構造に使用されている。薄肉円筒は平板を巻いたもので、板厚はその曲率に比べごく小さく曲率の影響が少ないので、その壁の断面をとれば、平板で近似できるからである。またこれらの構造物では、内部には液またはガスが流れ、外部には多くの場合、断熱材が巻かれているので、確かにその断面は”流体に曝された片側断熱平板”と見なせる。また仮に断熱がなくとも、片側断熱モデルを用いて安全側に初期段階の温度変化を推定することができる。

下図(c)に、本 TS で扱うモデルを示す。また、代表的な流体温度の変化パターンを図 B に示す。

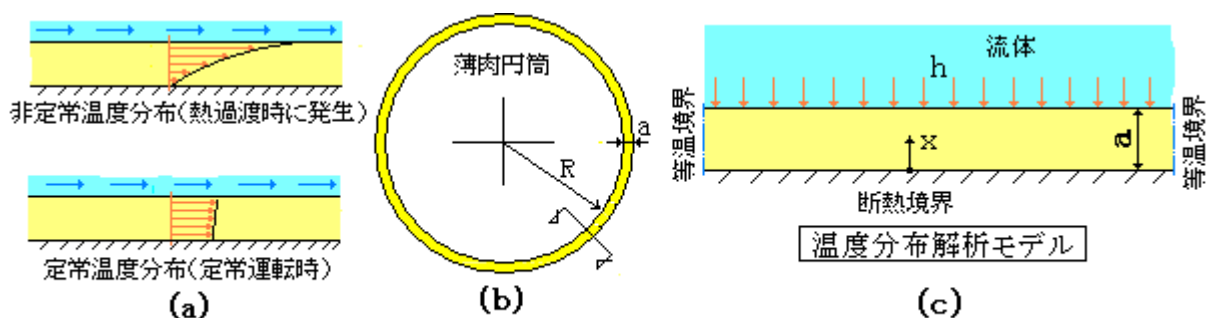
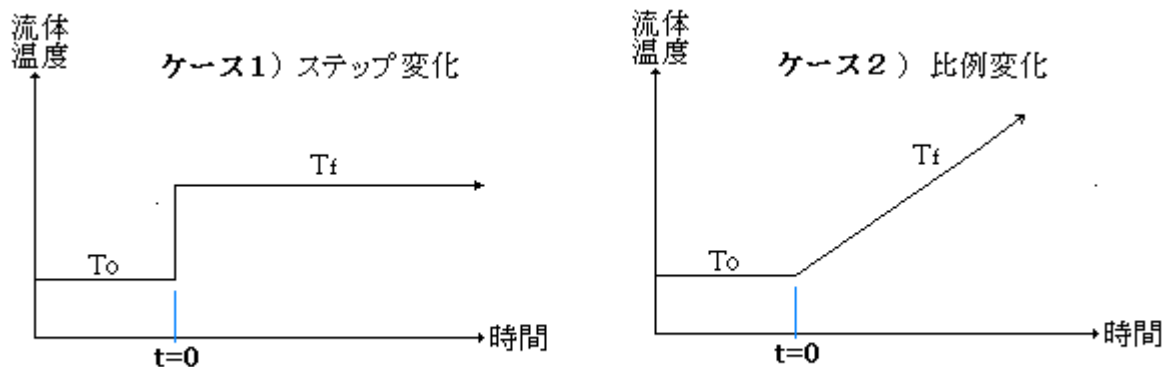


図 A 関連模式図



図B 流体温度変化パターン

1. 平板温度の計算式

(1) 流体温度の時間的变化に対する平板温度の変化は次の理論式で計算できる。

ケース 1 (ステップ変化) : $T(x,t) = T_0 + (T_f - T_0) [1 - \sum C_n \cos(m_n x/a) \exp(-m_n^2 \theta)]$ -----(a1)

ケース 2 (比例変化) : $T(x,t) = T_0 + (T_f - T_0) [1 - \sum C_n \cos(m_n x/a) \{1 - \exp(-m_n^2 \theta)\} / (m_n^2 \theta)]$ -----(a2)

ここで、 $C_n = 4 \sin m_n / \{ \sin(2m_n) + 2m_n \}$ 、 $m_n =$ 式 $[m_n \cdot \tan(m_n) = N_B]$ の n 次の根

$N_B =$ ビオ数(-) $[= ha/k]$ 、 $\theta =$ フーリエ数(-) $[= \alpha t / (3600a^2)]$

$h =$ 熱伝達率(kcal/m²hr°C)、 $a =$ 肉厚(m)、 $k =$ 板材料の熱伝導率(kcal/mhr°C)

$\alpha =$ 管材料の温度伝導率(m²/hr)、 $t =$ 流体温度変化開始後の経過時間(sec.)

$T_0 =$ 初期の一様温度分布(°C)、 $T_f =$ 時刻 t における流体の温度(°C)

$x =$ 肉厚方向の位置、但し断熱側表面より(m)、 $\sum \rightarrow n = 1 \sim \infty$ までの合計

理論式の導入については添付参照のこと。また熱伝達率 h については補足説明 1 を参照のこと

(2) 上記(a1),(a2)式は級数式で、その加工も含めると煩雑である。そこで McNeill-Brock 法ではグラフから係数を読んで、各時刻における板の温度を、次のような簡単な代数式で計算できるようになっている。

① 肉厚平均温度 : $T_A = T_0 + (T_f - T_0)A$ -----(b)

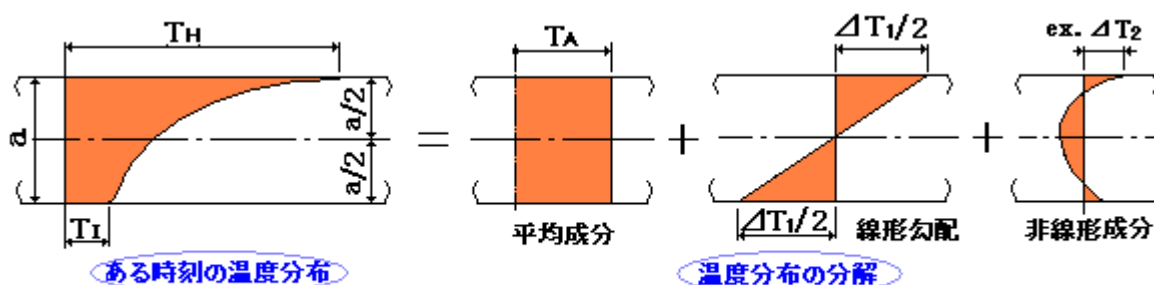
② 流体側表面温度 : $T_H = T_0 + (T_f - T_0)H$ -----(c)

③ 断熱側表面温度 : $T_I = T_0 + (T_f - T_0)I$ -----(d)

④ 線形温度勾配 : $\Delta T_1 = (T_f - T_0)L$ -----(e)

⑤ 非線形温度成分 : $\Delta T_2 = (T_f - T_0)N$ -----(f)

$T_A, T_H, T_I, \Delta T_1, \Delta T_2$ は ASME⁽¹⁾ 等で定義されるものと同じで下図の通り。補足説明 2 を参照のこと。



図C 板断面の非定常温度分布の分解

係数 A,H,I,L,N は、図 1a~1e 及び 図 2a~2e から読み取る。各係数には 1,2 の添え字がついているがこれはケースを意味している。

添え字 "1" → ケース 1 (流体温度がステップ変化するとき)

添え字 "2" → ケース 2 (流体温度が比例変化するとき)

グラフの横軸[$\log_{10} \theta$]のフーリエ数 θ 、およびビオ数 N_B は前項(1)に同じ。フーリエ数 θ は、流体温度変化開始後の時刻 t とともに変わる。従ってこのグラフから得られる係数は、ある時刻の値であり、時間経過と共にその値は変化する。

2. 例題

(1) 外径 318.5mm、肉厚 6.9mm の炭素鋼鋼管がある。通常は 10°C の水が流れているが、時々 90°C (殆ど大気圧) の熱水が 2m/s で急激に流入する。この場合の $T_A, T_H, T_I, \Delta T_1, \Delta T_2$ の変化を、1sec. から 4sec. 間隔でみてみたい。

計算に使用する物性

水： 熱伝導率 $\lambda = 0.583 \text{ kcal/mhr}^\circ\text{C}$ 、動粘度 $\nu = 0.328 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 、比熱 $C_p = 1.005 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C}$

粘性係数 $\eta = 0.323 \times 10^{-4} \text{ kgs/m}^2$ 、

炭素鋼：温度伝導率 $\alpha = 0.0425 \text{ m}^2/\text{hr}$ 、熱伝導率 $k = 43 \text{ kcal/mhr}^\circ\text{C}$

ステップ変化として計算する。まず熱伝達率 h を求める。

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4} = 0.023 \times (1.86 \times 10^6)^{0.8} \times 1.97^{0.4} = 3127$$

$$Re = Vd/\nu = 2 \times 0.3047 / 0.328 \times 10^{-6} = 1.86 \times 10^6,$$

$$Pr = C_p \eta / (\lambda / 3600) = 1.005 \times 9.81 \times 0.323 \times 10^{-4} / (0.583 / 3600) = 1.97$$

$$h = (\lambda / d) Nu = (0.583 / 0.3047) \times 3127 = 5983 \text{ kcal/m}^2\text{hr}^\circ\text{C}$$

ビオ数： $N_B = ha/k = 5983 \times 0.0069 / 43 = 0.96$

フーリエ数： $\theta = \alpha t/a^2 = (0.0425 / 0.0069^2) t = 893 t$

温度計算の結果は次のようになる。

時刻 (t)	横軸 $\log_{10} \theta$	ビオ数 N_B	平均成分		内表面温度		外表面温度		線形勾配		非線形成分	
			A_1	T_A	H_1	T_H	I_1	T_I	L_1	ΔT_1	N_1	ΔT_2
1sec.	-0.61	0.96	0.17	23.6	0.38	40.4	0.06	14.8	0.30	24.0	0.05	4
5sec.	0.094	0.96	0.61	58.7	0.68	64.4	0.53	52.4	0.14	11.2	0.03	2.4
9sec.	0.350	0.96	0.82	75.6	0.87	79.6	0.77	71.6	0.08	6.4	0.01	0.8
13sec	0.510	0.96	0.91	82.8	0.93	84.4	0.89	81.2	0.04	3.2	0.005	0.4

なお実際のビオ数 N_B は変化するが、ここでは簡便のため一定とした。計算結果では、線形温度勾配 ΔT_1 は、約 1sec. でピークになっている。

(2) 上記の例題で、9sec.で水温が90°Cまで上昇する場合はどうなるか？

この場合、下図のような流体温度の時間変化モデルを設定する。即ち9sec.間で10°Cから90°Cまで線形に上昇した後、そのまま上昇する①のラインと、それと対称に下降する②のラインに分離するとする。この場合、①から②を引き去れば、90°C一定のラインになる(但し②の原点は0°C)。計算は以下による。

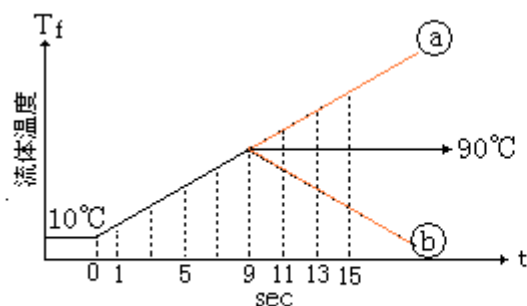
0～9 sec : 各時刻の流体温度を $T_f = 10 + (t/9) \times 80$ から求め、その温度における流体物性からビオ数 N_B を求め、これとフーリエ数 θ を用いて、図 2a～2e から係数 $A_2 \sim N_2$ を読みとり(b)～(f)式から各温度を計算する。

9～11sec. : ①のラインについては上記を延長する形で温度を計算する(但し N_B は何れの時刻も90°Cの時の値を用いる)。②ラインについては、 $T_f = 90 - \{(t-9)/9\} \times 80$ から流体温度を求め、上記と同様に温度を計算する。但し

- N_B は何れの時刻も、①のラインに合わせて90°Cの時の値を用いる。
- フーリエ数は9 sec.を0 sec.として(例えば11sec.は2 sec.として)計算する。
- (b)～(f)式の初期温度 T_0 は0とする。

①の計算値と②の計算値を合算したものが、計算結果になる。

15 sec までの計算結果を表 A に示す。例題(1)に比べ、温度上昇は遅れている。



時刻	0sec	1sec	5sec	9sec
流体温度	10°C	19°C	54°C	90°C

時刻	11 sec	13 sec	15 sec
流体温度①	108°C	126°C	143°C
流体温度②	-18°C	-36°C	-53°C

図D 流体温度の時間変化モデル

表 A 板温度計算結果(1/2)

時刻 t	横軸 $\log_{10} \theta$	N_B	T_f (°C)	平均成分		内表面温度		外表面温度	
				A_2	T_A	H_2	T_H	I_2	T_I
1 sec.	-0.61	0.58	19	0.054	10.5	0.18	11.6	0.014	10.1
5 sec.	0.094	0.78	54	0.30	23.2	0.45	29.8	0.25	21.0
9(0) sec.	0.35	0.96	90	0.50	50.0	0.61	58.8	0.44	45.2
11 sec. (2 sec.)	0.44 -0.30	0.96	108 -18	0.57 0.17	65.9 -3.1	0.65 0.35	73.7 -6.3	0.51 0.09	60.0 -1.6
					62.8		67.4		58.4
13 sec. (4 sec.)	0.51 -0.00	0.96	126 -36	0.62 0.31	81.9 -11.2	0.69 0.46	90.0 -16.6	0.55 0.22	73.8 -7.9
					70.7		73.4		65.9
15 (6 sec.)	0.57 0.17	0.96	143 -53	0.66 0.40	97.8 -21.2	0.75 0.54	110.0 -28.6	0.62 0.35	92.5 -18.6
					76.6		81.4		73.9

表 A 板温度計算結果(2/2)

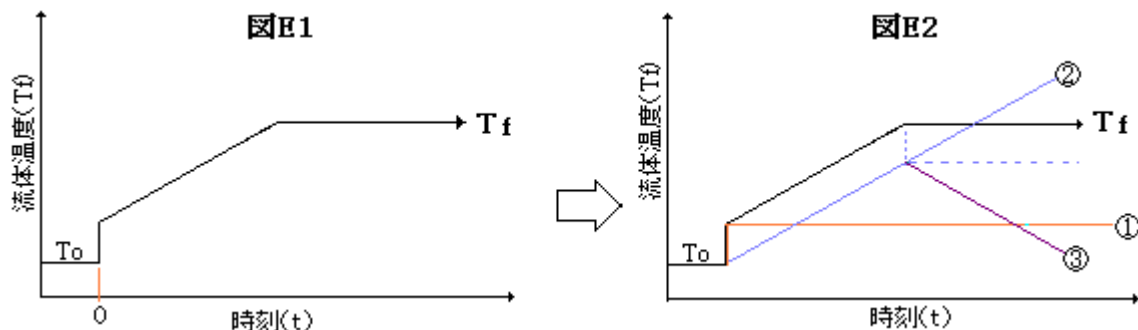
時刻 t	横軸 $\log_{10} \theta$	N_B	T_f (°C)	線形勾配		非線形成分			
				L_2	ΔT_1	N_2	ΔT_2		
1 sec.	-0.61	0.58	19	0.15	1.4	0.038	0.34		
5 sec.	0.094	0.78	54	0.19	8.4	0.036	1.6		
9(0) sec.	0.35	0.96	90	0.16	12.8	0.032	2.6		
11 sec.	0.44	0.96	108	0.13	12.7	0.029	2.8		
(2 sec.)	-0.30	0.96	-18	0.25	-4.5	0.040	-0.7		
					8.2		2.1		
13 sec.	0.51	0.96	126	0.13	15.1	0.025	2.9		
(4 sec.)	-0.00	0.96	-36	0.24	-8.6	0.05	-1.8		
					6.5		1.1		
15	0.57	0.96	143	0.12	16.0	0.022	2.9		
(6 sec.)	0.17	0.96	-53	0.20	-11	0.04	-2.1		
					5		0.8		

(3) 図 E1 のように流体温度が変化する。板の分布温度を計算する上で、これをどう分解すればよいか？

図 E2 のように、この温度変化は、①+②+③になっている。

- ① 初期温度 T_0 よりステップ状に立ち上がり継続するライン
- ② 初期温度 T_0 より比例状に立ち上がってゆくライン
- ③ ライン②の中途から比例状に立ち下がってゆくライン

①,②による温度変化を個別に計算し、結果を合算する。さらに③による温度変化を、前(2)項のように計算して合算する。実質的に①+②-③の形になる。



このように、複雑な折れ線状の温度変化も、ステップ変化と比例変化を使って計算できる。但し相当厄介になってミスしやすくなる。コンピュータによる FEM 計算が望ましい。

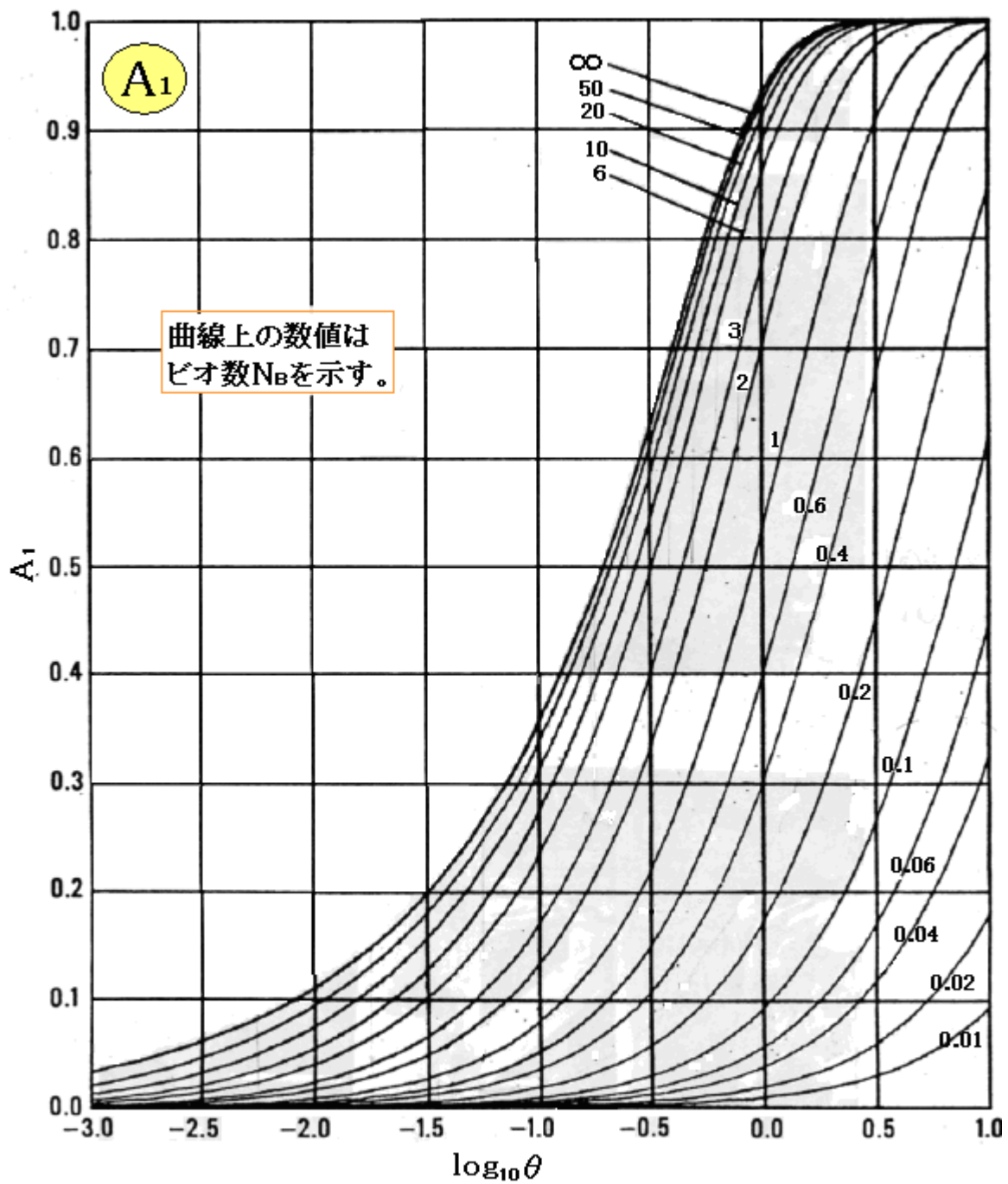


図 1a ケース1 (ステップ変化) - A_1 データ

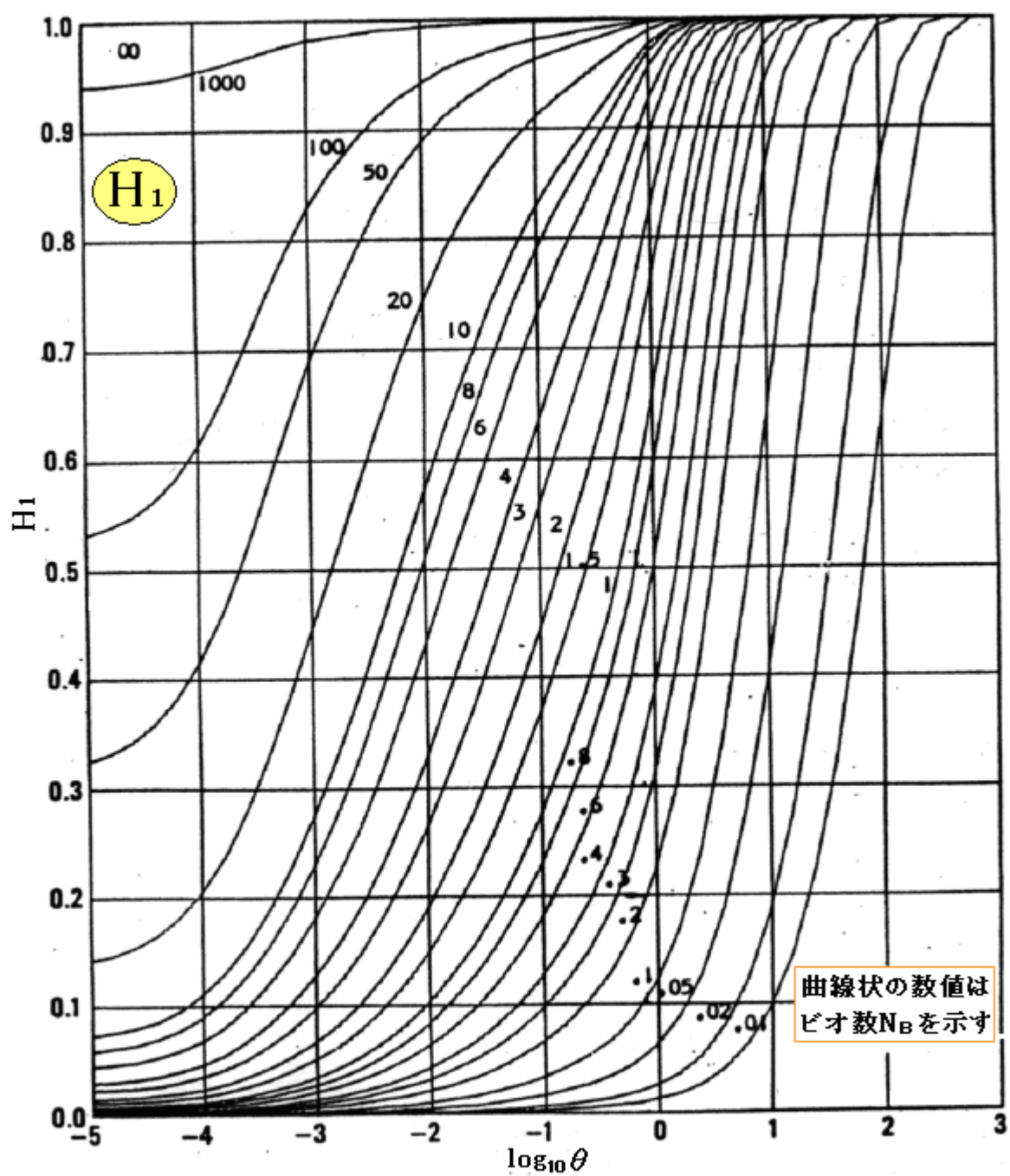


図 1b ケース1 (ステップ変化) - H_1 データ

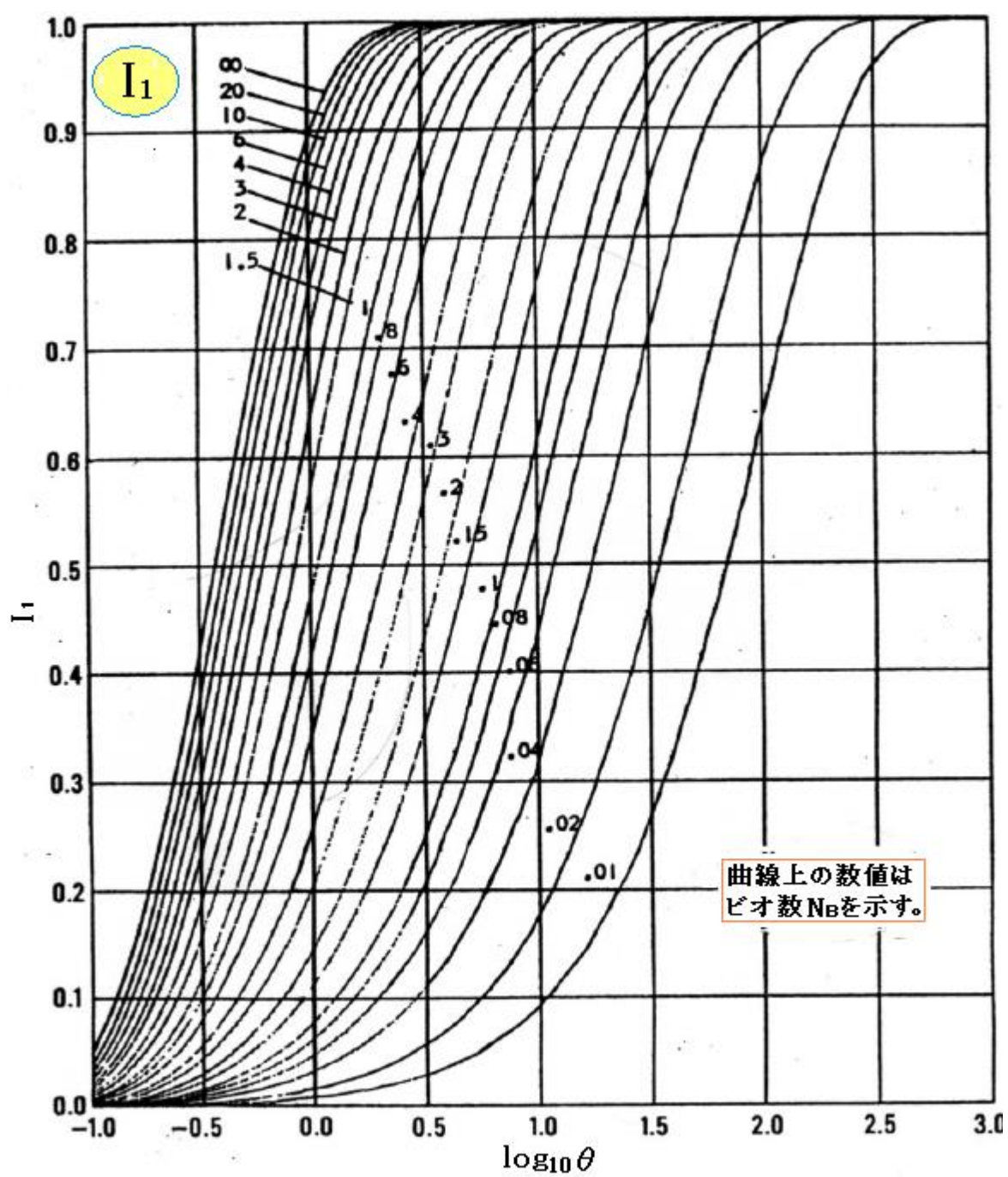


図1c ケース1(ステップ変化) - I_1 データ

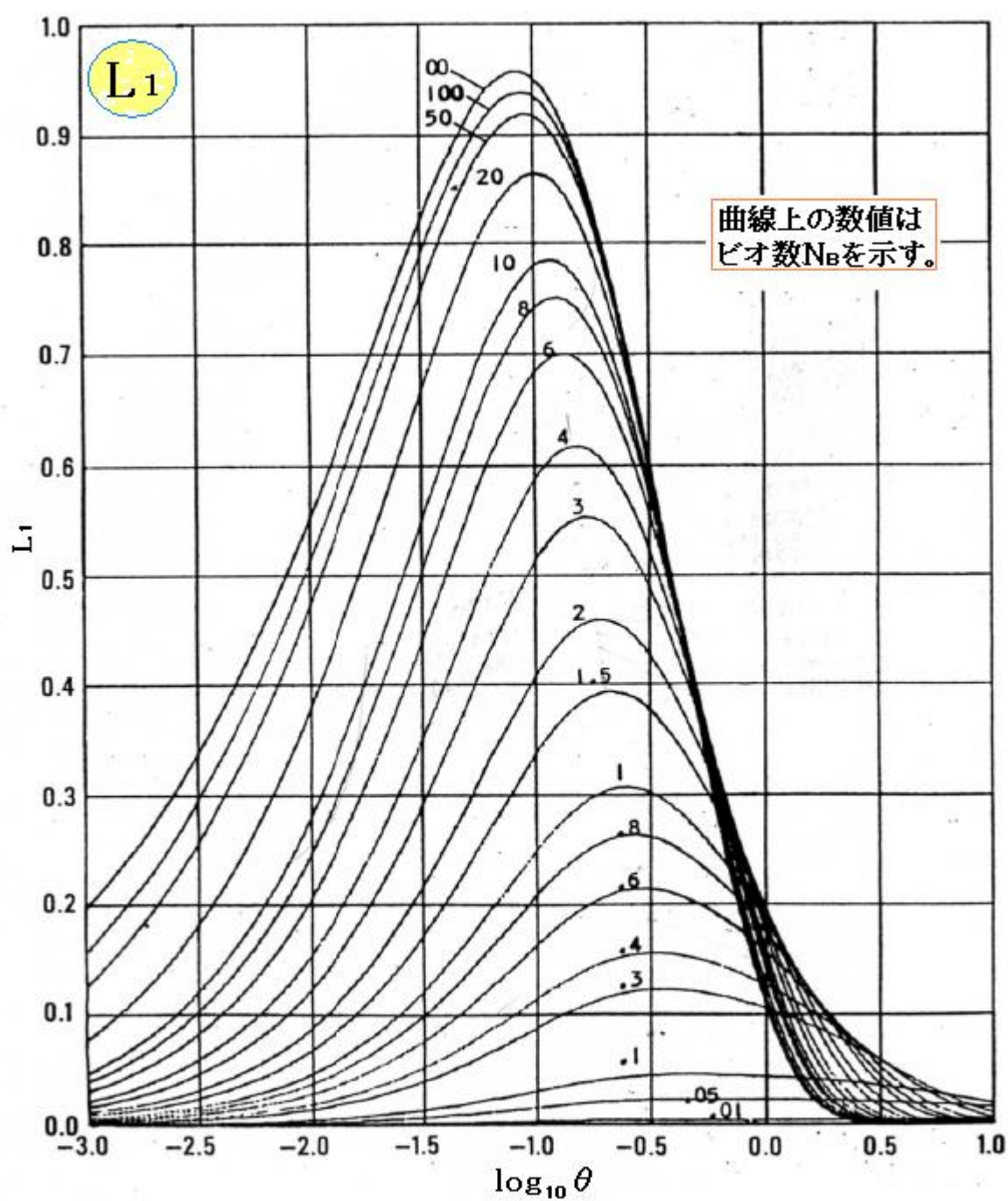


図 1d ケース1 (ステップ変化) - L_1 データ

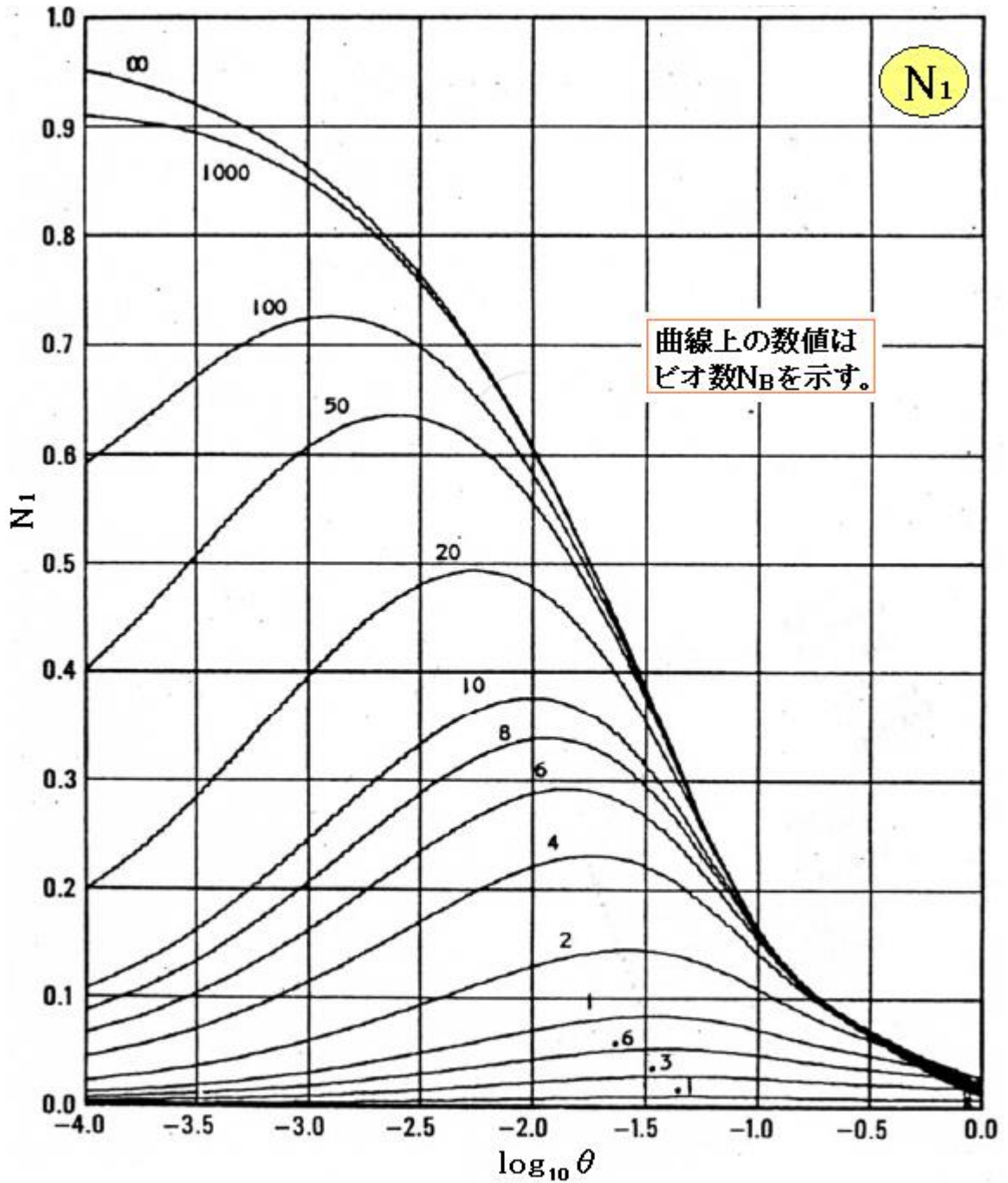


図1e ケース1(ステップ変化)- N_1 データ

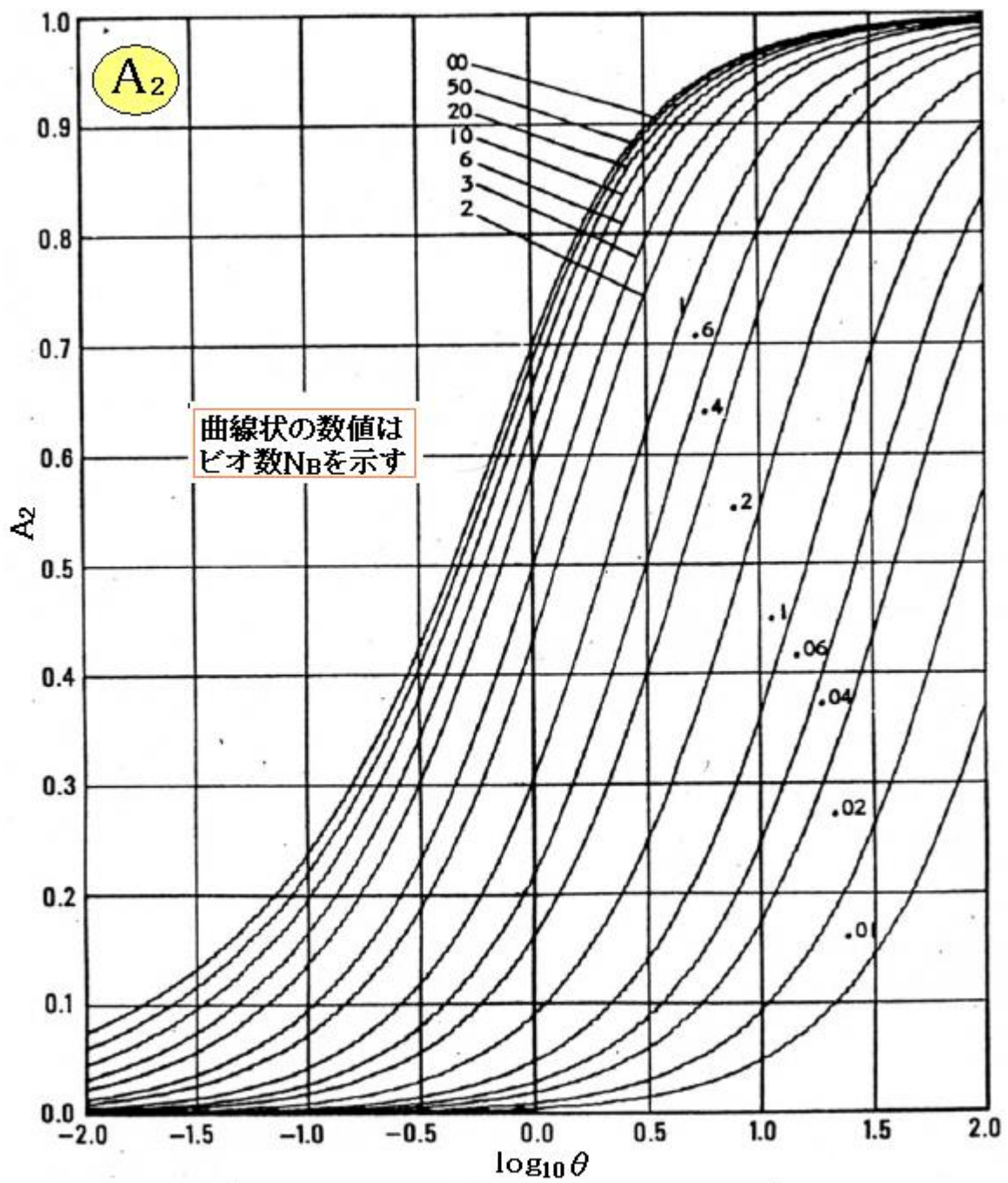


図2a ケース2(比例変化) - A_2 データ

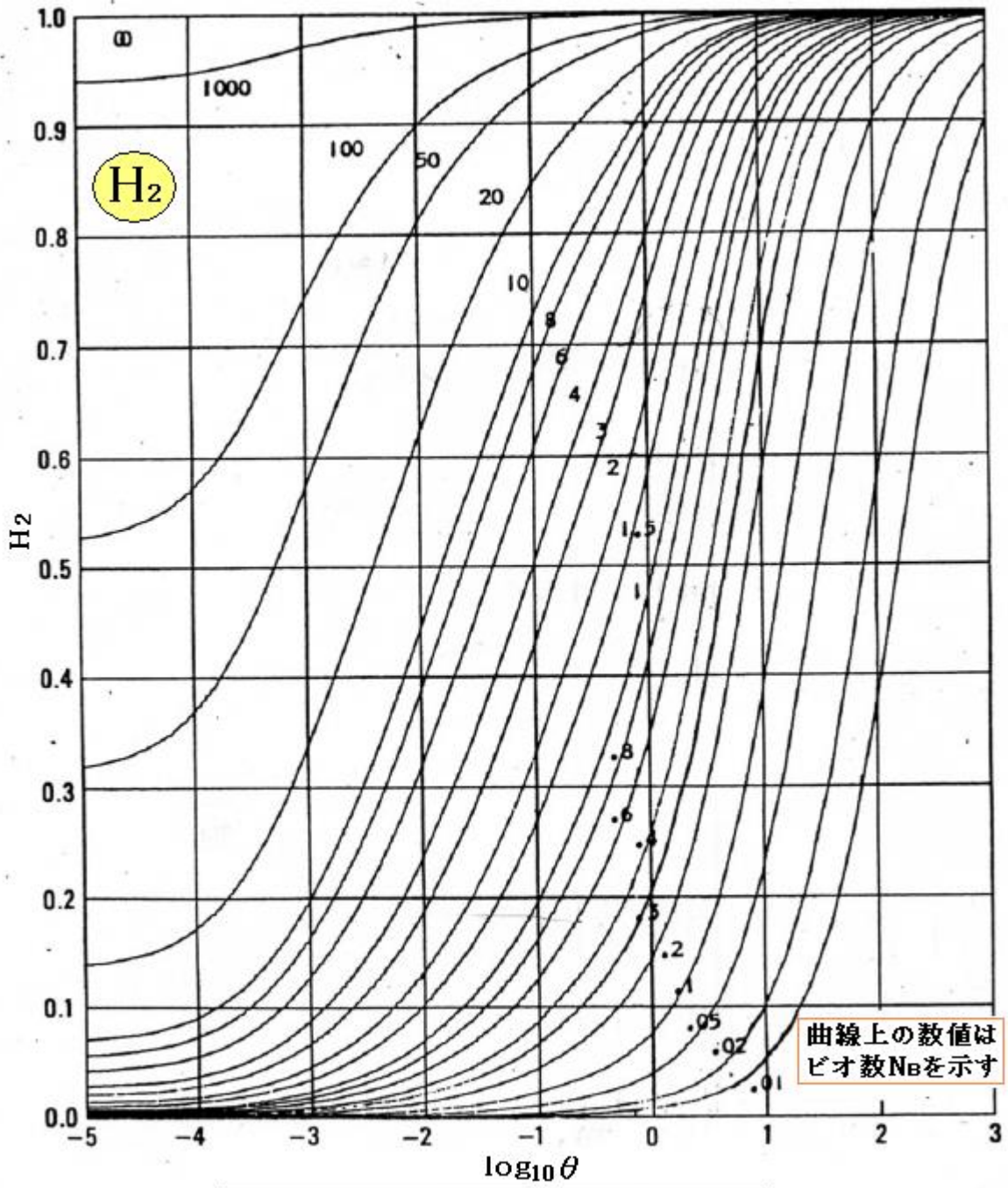


図2b ケース2(比例変化)- H_2 データ

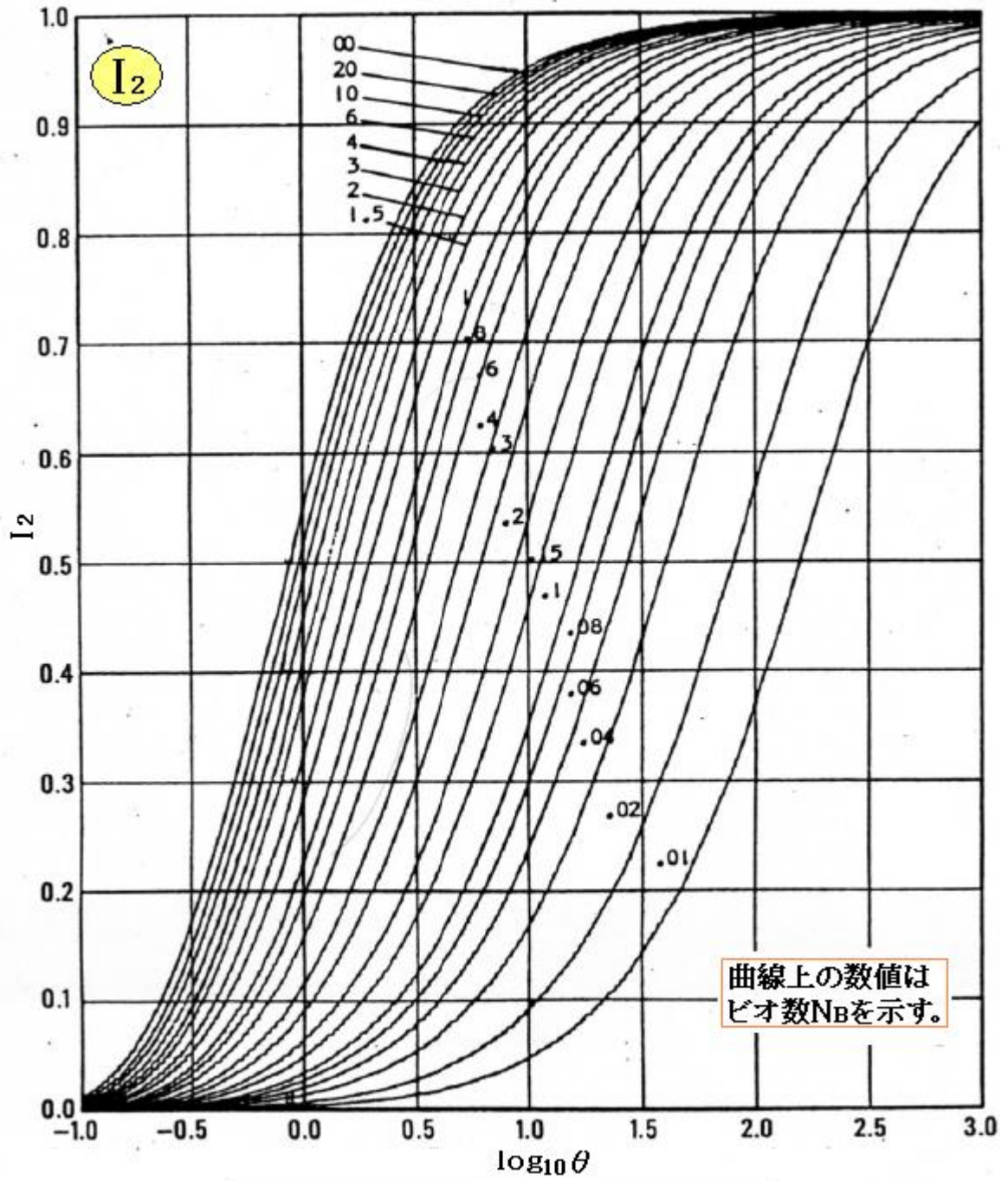


図2c ケース2(比例変化)- I_2 データ

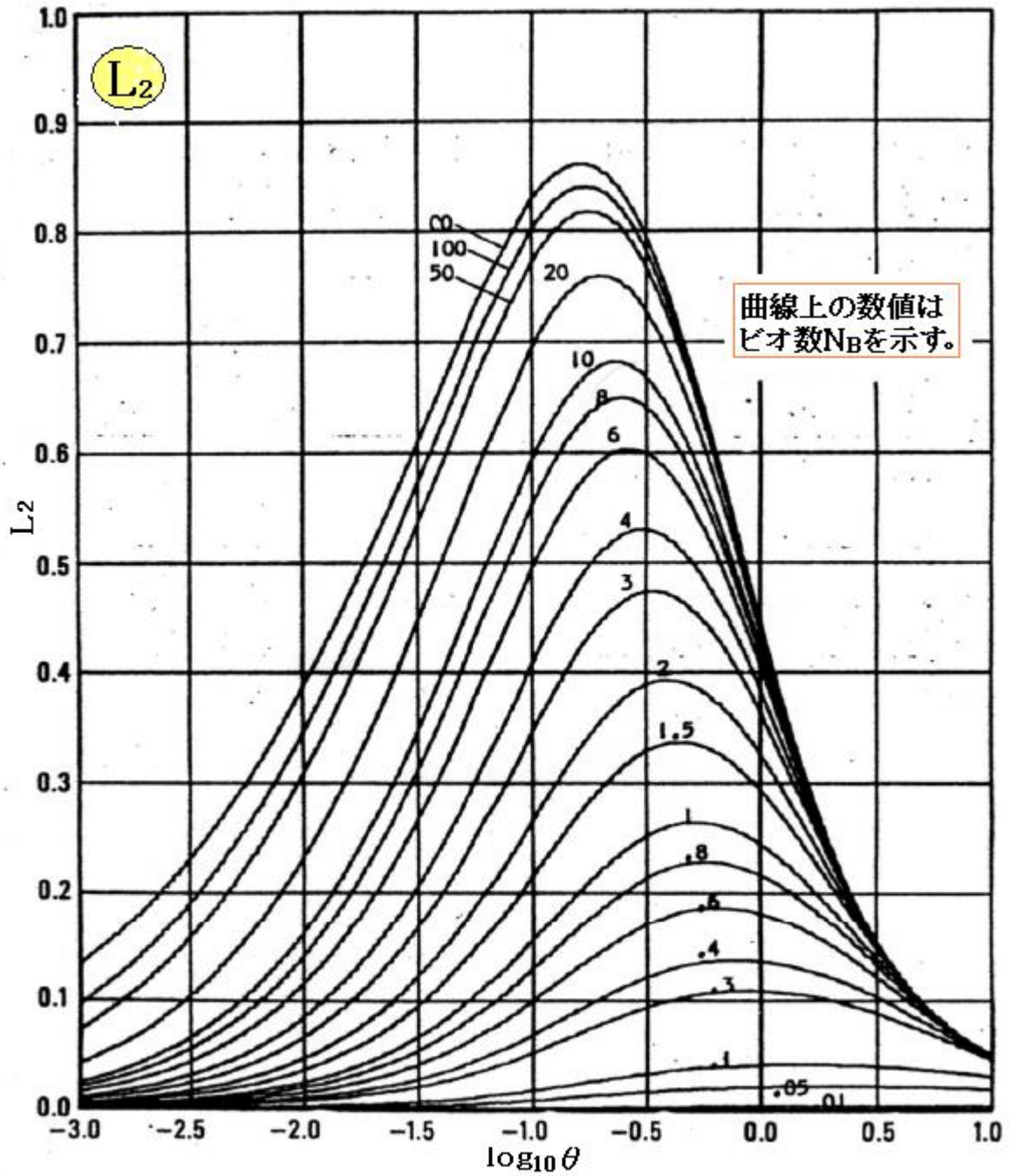


図2d ケース2(比例変化)- L_2 データ

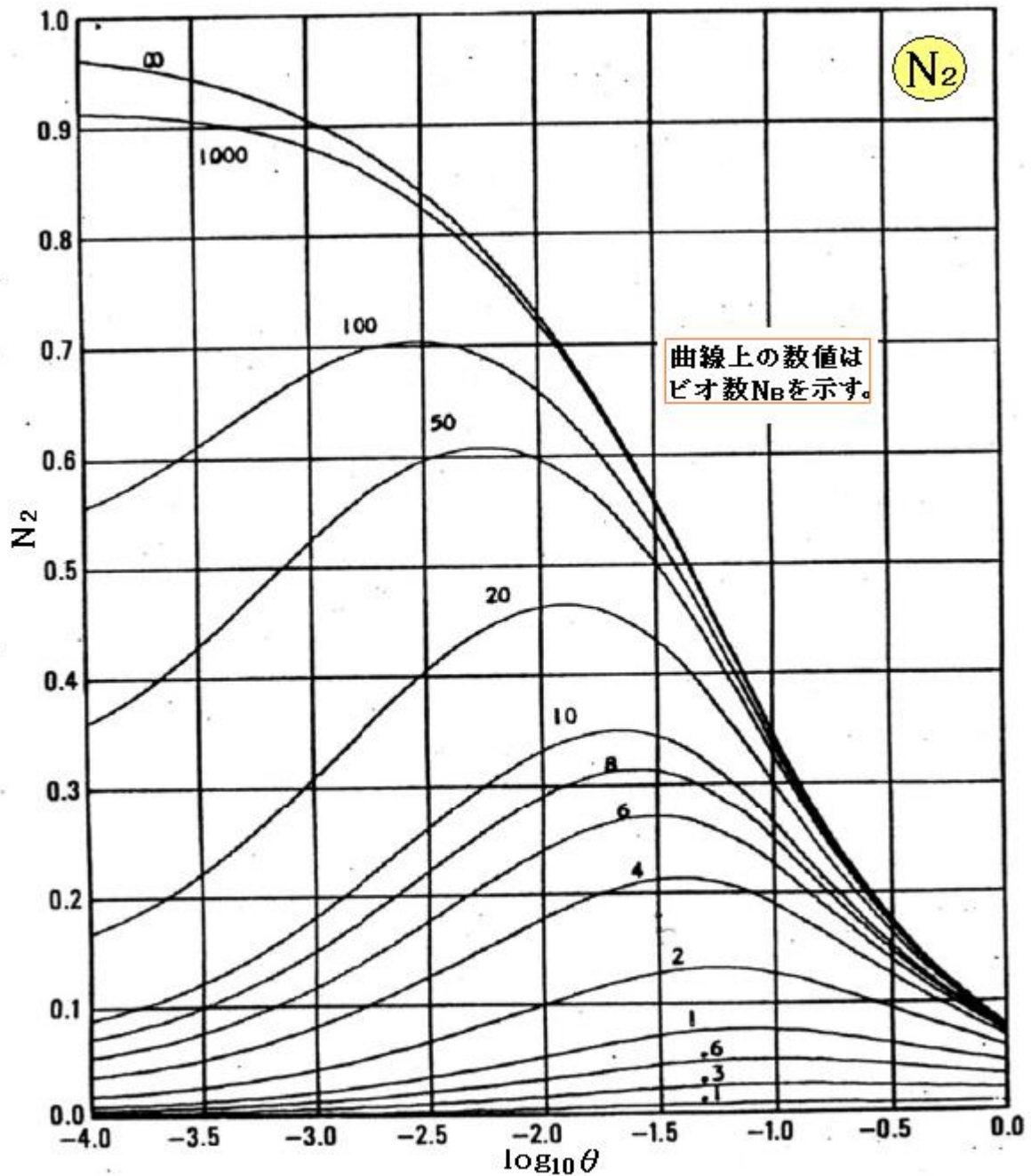


図2e ケース2(比例変化)-N₂データ

[補足説明 1 : 熱伝達率(境膜係数) h について]

円筒内面は対流伝熱面になる。その場合の熱伝達係数 h (kcal/m²hr°C)は次式で計算できる⁽²⁾。

$$h = (\lambda/d)Nu \quad \text{-----(a)}$$

$$Nu = 4.12 \quad (\text{層流の場合})$$

$$Nu = 0.023Re^{0.8}Pr^{0.4} \quad (Pr > 0.1 \text{ の場合})$$

$$Nu = 0.027Re^{0.8}Pr^{1/3}(\eta_b/\eta_w)^{0.14} \quad (\text{粘性係数の温度依存が大きい場合})$$

$$Nu = 5 + 0.025Pe^{0.8} \quad (Pr < 0.1 \text{ の液体金属など、Seban-Shimazaki 式})$$

$$Nu = 1.22 \times 10^4 M^{0.8}/d^{0.2} \quad (1\text{atm}, 0 \sim 100^\circ\text{C} \text{ の空気の近似式})$$

$$Nu = (2.2 + 0.03t_b) \times 10^4 M^{0.8}/d^{0.2} \quad (1\text{atm}, 20 \sim 100^\circ\text{C} \text{ の水の近似式})$$

ここで、 N_u =ヌセルト数(-)、 λ =流体の熱伝導率(kcal/mhr°C)、 d =管内径(m)、
 Re =レイノルズ数(= $v d / \nu$)、 Pr =プラントル数[= $C_p g \eta / (\lambda / 3600)$]、
 Pe =ペクレ数(= $GC_p d / \lambda$)、 v =流速(m/s)、 ν =動粘度(m²/s)、
 C_p =流体の定圧比熱(kcal/kg°C)、 η =粘性係数(kg s/m²)、 t_b =流体平均温度(°C)
 G = 単位時間/単位断面積当たりの重量流量(kg/m²hr)、 g =重力加速度(9.81m/s²)
 M =単位時間/単位断面積当たりの質量流量(kghr/m³)、
 η_b =平均流体温度での粘性係数(kgs/m²)、 η_w =管壁温度での粘性係数(kgs/m²)

なお、気体に比べて液体の熱伝達係数は高くなる。例えば低圧気体では 100kcal/m²hr°C程度、一方、液体の場合は 1000kcal/m²hr°Cを超える。従って急激な熱過渡(熱衝撃)を受ける場合、大きな温度差がでて深刻な熱応力が発生する。

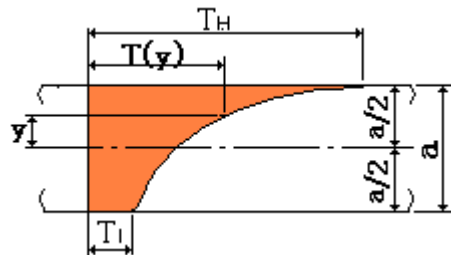
[補足説明 2-ASME における薄肉円筒の温度分布定義]

配管コード類(例えば ASME Sect. III NB)などでは薄肉円筒に生じる熱応力を計算するため、図 C のように、板厚方向の温度分布を 3 つの成分(平均成分、線形勾配、非線形成分)に分離している。

このうち、平均成分は肉厚(板)断面に分布する温度の平均をとったものである。即ち

$$T_A = (1/a) \int_{-a/2}^{a/2} T(y) dy \quad (y \text{は板中央にとった原点からの距離、下図参照})$$

この平均温度は肉厚断面に等分布しているため、円筒の長手方向の平均伸び(縮み)になる。塔槽類ではこの伸びが拘束されることはないため、熱応力はでない。配管ではサポートなどで拘束されて熱応力がでる。いわゆる熱膨張応力で、コードルールで制限される。



線形勾配は、断面分布の温度をならして直線勾配にしたもの。即ち

$$\Delta T_1 = (12/a^2) \int_{-a/2}^{a/2} y T(y) dy$$

この温度勾配では、自己拘束によってモーメントが派生して、次のような熱曲げ応力が発生する。

$$\sigma_1 = E \alpha \Delta T_1 / \{2(1-\nu)\}$$

コードでは、他の応力成分と組み合わせて、2次応力として評価される。

非線形分布は、実際の温度分布から、 T_A 、 ΔT_1 を引き去った残余で、以下で定義できる。

$$\Delta T_2 = \text{Max.} [|T_H - T_A| - |\Delta T_1/2|, |T_I - T_A| - |\Delta T_1/2|, 0]$$

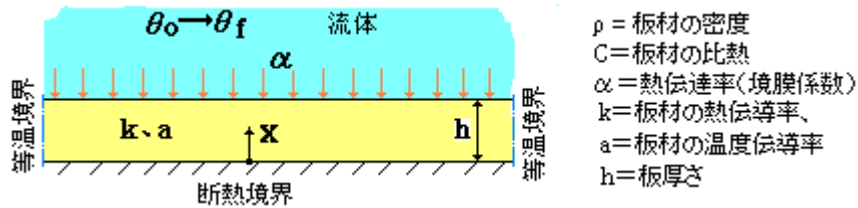
この温度分布では、次のような表面応力成分が発生する。

$$\sigma_2 = E \alpha \Delta T_2 / (1-\nu)$$

コードでは、他の応力成分と組み合わせて、繰返し応力として疲労評価される。

添付一片側断熱平板モデルの非定常温度分布式の導出

以下 McNeill 文献に基づき、下記の片側断熱平板モデルの、ステップ変化による非定常温度分布の式を導く(但し TS 作成者の方で多々、追記補足している)。本文と記号定義に違いがあるので注意。



(1) 直角座標系の熱伝導方程式は次のようである。

$$C \rho \partial \theta / \partial t = \partial (k \partial \theta / \partial x) / \partial x + \partial (k \partial \theta / \partial y) / \partial y + \partial (k \partial \theta / \partial z) / \partial z$$

一次元の場合は、

$$C \rho \partial \theta / \partial t = \partial (k \partial \theta / \partial x) / \partial x \quad \rightarrow \quad \partial \theta / \partial t = \{k / (C \rho)\} (\partial^2 \theta / \partial x^2) = a (\partial^2 \theta / \partial x^2)$$

無次元表示 $n = x/h$ 、 $N = (a/h^2)t$ 、 $T = (\theta - \theta_0) / (\theta_f - \theta_0)$ を用いると

$$\partial T / \partial N = (\partial^2 T / \partial n^2) \quad \text{-----(a)}$$

この偏微分方程式を変数分離(一般解法)によって求める。 $T = XY$ とおくと

$$X''Y = XY' \quad \rightarrow \quad X''/X = Y'/Y \quad (X \text{ は } n \text{ に、} Y \text{ は } N \text{ に対応する})$$

X, Y は独立変数であるから定数 μ を共有している。故に

$$X''/X = \mu, \quad Y'/Y = \mu \quad \text{-----(b), (c)}$$

この2つの連立微分方程式の解(X, Y)の積がこの問題の解である。ここで μ は正、負 or 零の実数である。

まず、 $\mu > 0$ のときは、 $\mu = \omega^2$ とおいて(c)式より $Y = C_2 \exp(\omega^2 N)$ である。故に $T = XY$ において $N \rightarrow \infty$ のとき $T \rightarrow \infty$ になる。然るに、後述の境界条件(4)では $T = 1.0$ であるから、 $\mu > 0$ はありえない。

次に $\mu = 0$ のときは (b)(c)式より

$$X'' = 0 \quad \rightarrow \quad X' = A \quad \rightarrow \quad X = An + B$$

$$Y' = 0 \quad \rightarrow \quad Y = C$$

$$\therefore T = XY = (An + B)C = ACn + BC = A'n + B'$$

ここで、境界条件(2)(3)において、 $n = 0$ では $\partial T / \partial n = 0$ 、 $n = 1$ では $\partial T / \partial n = (1 - T)/m$ であるから、

$$[\partial T / \partial n]_{n=0} = A' = 0, \quad [\partial T / \partial n]_{n=1} = A' = (1 - T)/m$$

これは、明らかに A' が特別な場合の解のみを示すので、 $\mu = 0$ もあり得ない。

次に、 $\mu < 0$ のときは、 $\mu = -\omega^2$ とおいて、(b)(c)式より、

$$X'' = -\omega^2 X, \quad Y = -\omega^2 Y$$

この乗微分方程式の解は、

$$X = A \cos(\omega n) + B \sin(\omega n), \quad Y = C' \exp(-\omega^2 N)$$

であることから、

$$T = \exp(-\omega^2 N) \{A \cos(\omega n) + B \sin(\omega n)\} + C' \quad (\text{ここで } C' \text{ は特殊解、また } A = AC', \quad B = BC')$$

ω, A, B は多項式であるから、この方程式の一般解は、次のように表わされる。

$$T = \sum \exp(-\omega_j^2 N) \{A_j \cos(\omega_j n) + B_j \sin(\omega_j n)\} + C' \quad \text{-----(d)}$$

(2) 境界条件を次のようにセットする。まず、

まず $t=0$ において、温度は一様分布 θ_0 であるから、 $N=0$ において $T=0$ 、
次に $t>0$ において、 $x=0$ 即ち $n=0$ (外表面) では 断熱境界の故に $\partial T/\partial n=0$ になる。また $x=h$ 即ち $n=1$ (内表面) では 境膜係数の存在に拠って $\partial T/\partial n=(1-T)/m$ になる(*1)。

次に $t=\infty$ になると壁温は θ_f になって定常伝熱状態になるので $T=1.0$ である。

N は t に対応する。以上を整理すると、

- (1) $N=0$: $T=0$
- (2) $N>0, n=0$: $\partial T/\partial n=0$
- (3) $N>0, n=1$: $\partial T/\partial n=(1-T)/m$ (但し $m=k/\alpha h$)
- (4) $N=\infty$: $T=1.0$

まず 境界条件(2)については (d)式を1回、偏微分すると

$$\partial T/\partial n = [\sum \exp(-\omega_j^2 N) \omega_j (-A_j \sin \omega_j n + B_j \cos \omega_j n)]_{n=0} = \sum \omega_j B_j = 0 \quad \text{故に} \quad B_j = 0$$

次に境界条件(4)については

$$[T]_{N=\infty} = C' = 1.0 \quad \text{よって} \quad C' = 1.0$$

次に境界条件(3)については、上記の結果を用いて

$$\partial T/\partial n = [\sum \exp(-\omega_j^2 N) \omega_j \{-A_j \sin(\omega_j n) + B_j \cos(\omega_j n)\}]_{n=1} = -\sum A_j \exp(-\omega_j^2 N) \omega_j \sin \omega_j = (1-T)/m$$

(d)式より $T = \sum \exp(-\omega_j^2 N) A_j \cos(\omega_j n) + 1$ 。これを上式に代入すると、

$$m \omega_j \sin \omega_j = \cos \omega_j \quad \text{------(e)}$$

次に境界条件(1)については

$$[T]_{N=0} = \sum A_j \cos \omega_j n + 1 = 0$$

この多項式から係数 A_j を求めるには、関数の直交性を利用する。一般に

$$f(x) = a_1 \Phi_1(x) + a_2 \Phi_2(x) + \dots + a_j \Phi_j(x) + \dots$$

とすれば、両辺に $\Phi_j(x)$ を掛けて x の上下限 a - b で積分すればよい。すなわち

$$\int_a^b f(x) \Phi_j(x) dx = a_1 \int_a^b \Phi_1(x) \Phi_j(x) dx + a_2 \int_a^b \Phi_2(x) \Phi_j(x) dx + \dots + a_j \int_a^b \Phi_j^2(x) dx + \dots$$

直交関数の性質より Φ の自乗形以外全てが零であるから、

$$a_j = \int_a^b f(x) \Phi_j(x) dx / \int_a^b \Phi_j^2(x) dx$$

$$f(\omega_j n) = \sum A_j \cos(\omega_j n) = -1 \quad \text{、} \quad \text{ここで} \quad x \rightarrow \omega_j n, \quad 0 \leq \omega_j n \leq \omega_j \quad \text{であるから}$$

$$A_j = \int_0^{\omega_j} (-1) \cos(\omega_j n) d(\omega_j n) / \int_0^{\omega_j} \cos^2(\omega_j n) d(\omega_j n) = -\sin \omega_j / \{(1/4) \sin(2\omega_j) + (1/2) \omega_j\}$$

$$= -4 \sin \omega_j / \{\sin(2\omega_j) + 2\omega_j\}$$

(3) 以上の結果より、一般解(d)式は次のようになる。

$$T = 1 - \sum \exp(-\omega_j^2 N) [4 \sin \omega_j / \{\sin(2\omega_j) + 2\omega_j\}] \cos(2\omega_j) \quad \text{------(f)}$$

ω_j は(e)式より求められるが、(e)式は無数の根を持っている。

$$\omega_j \tan \omega_j = 1/m = (\alpha h/k) \quad \rightarrow \quad \text{ビオ数 } N_B$$

McNeill-Brock の式は、(f)式において

$$T = \{T(x,t) - T_0\} / (T_f - T_0), \quad N = \theta \text{ (フーリエ数)}, \quad \omega_j = m n$$

$$C_n = 4 \sin \omega_j / \{\sin(2\omega_j) + 2\omega_j\}, \quad n = x/a \quad (\text{厚さ } h \text{ を } a \text{ に表示替え})$$

とおくことで得られる。即ち、

$$T(x,t) = T_0 + (T_f - T_0) [1 - \sum C_n \cos(m_n x/a) \exp(-m_n^2 \theta)]$$

$$m_n \tan m_n = N_B \quad (\text{ここで } m_n \text{ は 式 } [m \cdot \tan(m) = N_B] \text{ の } n \text{ 次の根})$$

以上、ステップ変化の場合、比例変化の式も同じようなやり方で導くことができる。

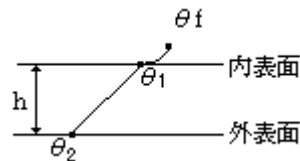
(*1) 平板の伝熱では、 $q = \alpha(\theta_f - \theta_i) = (k/h)(\theta_1 - \theta_2)$ であるから $(\theta_1 - \theta_2)/h = (\alpha/k)(\theta_f - \theta_i)$ 、
左辺は線形温度勾配で、 $\partial\theta/\partial x$ に置き換えることができるので $\partial\theta/\partial x = (\alpha/k)(\theta_f - \theta_i)$ 。

一方、 $\partial T/\partial n = \{h/(\theta_f - \theta_o)\}(\partial\theta/\partial x)$ なので、これに上式を代入して

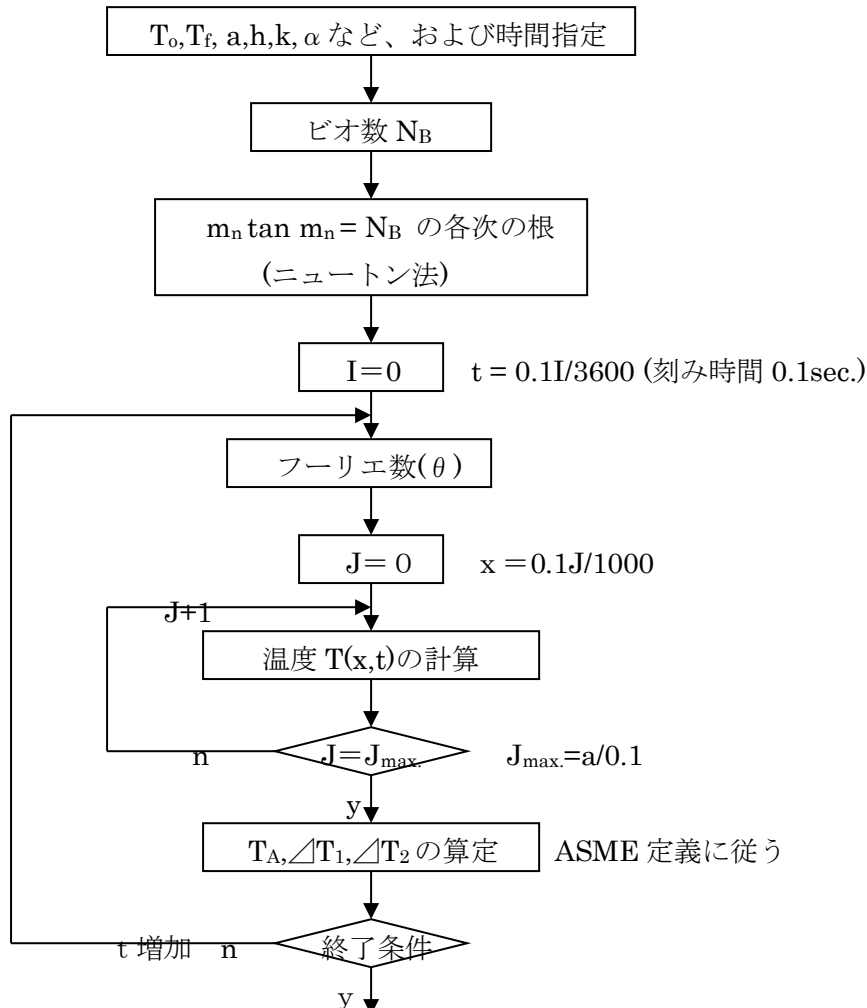
$$\begin{aligned} \partial T/\partial n &= (h\alpha/k) \{(\theta_f - \theta_i)/(\theta_f - \theta_o)\} = [1/\{k/(\alpha h)\}] \{(\theta_f - \theta_o) - (\theta_1 - \theta_o)\}/(\theta_f - \theta_o) \\ &= \{1 - (\theta_1 - \theta_o)/(\theta_f - \theta_o)\}/m \quad [\text{ただし } m = k/(\alpha h)] \end{aligned}$$

ここで $x = h$ において $\theta = \theta_1$ であるから、

$$\partial T/\partial n = \{1 - (\theta - \theta_o)/(\theta_f - \theta_o)\}/m = (1 - T)/m$$



(4) 本文(a1)式の計算はコンピュータによる。その概略フローは以下の通り。



- (0) Engineering Data File—Charts for transient temperature in pipes
by D. R. McNeill and J. E. Brock (Heating, Piping & Air Conditioning, Nov. 1971)
- (1) ASME Sect. III NB component NB-3650
- (2) JSME 「伝熱工学資料(第 3 版)」基礎—B—c