

【整番】FE-30-TM-001	【標題】タンクのパルジング/スロッシングに関する情報
分類：流れ(その他)／種別：技術メモ	作成年月：H24.11／改訂：Ver0.0 (H24.12)
	作成者：N.Miyamoto

全 26 枚

構成 1. はじめに

2. タンク動揺から生じる現象 2.1 現象全般、2.2 パルジングについて、2.3 スロッシングについて  
 3. タンク揺動に対する対策 3.1 強度の維持(法規制の内容)、3.2 スロッシングの緩和抑制

## 1.はじめに

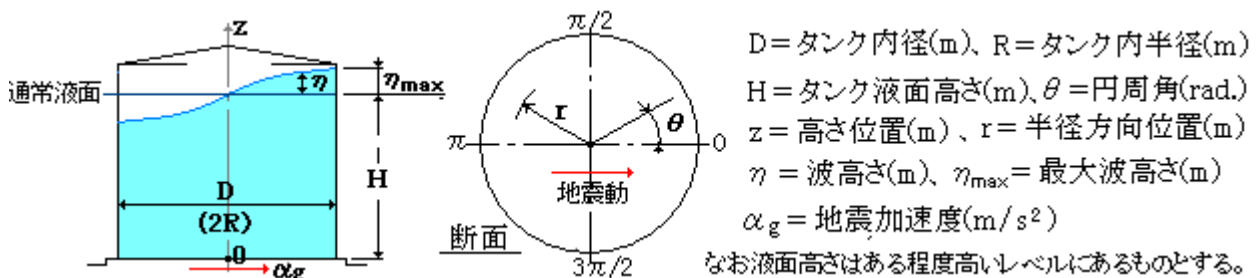
(1) コップにいれた紅茶を持って移動するとき、コップの液面がひどく揺れて遂に紅茶をこぼしてしまうことがある。コップの移動の速さに比例するようだが、揺れ易くする速さもあるようである。この液面動揺はスロッシング(Sloshing)としてよく知られているが、地震のたびに深刻な被害を与えており(補1参照)、貯蔵設備の耐震設計では必須のアイテムになっている。そのためスロッシングやこれに類する液面動揺に関する情報量は多く未だその蓄積は続いているようだ。しかし余りに情報が多いとかえって本質的な部分が判りづらくなり、理解が淀んでしまうことになる。本 TS は決してスロッシング入門編というわけではないが、たとえタンク設備に直接的な係わりがなくても、設備技術者として知っておきたい、ごく基本的な情報を集約し整理を試みたものである。タンク設備関係者には余りに拙い情報ではあるが、その周辺にいる技術者や関連技術に係わる技術者あるいはこれからタンク設備に係わる人には本 TS の情報はそれなりに有効ではないかと思う。

(2) タンクには直立円筒タンク、横置き枕タンク、球形タンクあるいは角形タンクなどいろんなタイプがある。これらはいずれも自由液面を持っており地震等の衝撃/振動によって表面が波立つが、構造的にその影響が最も不安視されるのは、ダダ広い液面を持つ大型の直立円筒タンク(例えば石油貯槽/液化ガス貯槽)である。また地震等の衝撃/振動には内容液の慣性効果が含まれ、スロッシングに先行するようにタンク胴や屋根など構造体に激しいインパクトを与える。これはパルジング(bulging)と呼ばれ、タンクの耐震強度のメインテーマになっている(スロッシングはむしろサブ的な扱いになる)。そこで、本 TS では、主に次のテーマを対象にして技術上の要点を集約してみた。

### 地震等の衝撃/振動から生じる大型平底直立円筒タンクにおけるパルジング及びスロッシング

[ スロッシングは流体－構造連成問題になるが、液相はソリッド要素で扱えるので早くから FEM 解析が行われており、最近では粒子法などの解析手法も現れている。本 TS は、現象の捉え方とその対処という観点から、これら解析関連の情報は割愛している。了解願いたい。]

(3) なお、この TS で使用するタンク寸法/座標などの記号定義は以下の通り。



## 2.タンク動揺から生じる現象

### 2.1 現象全般<sup>(1)(2)(3)(9)</sup>

- (1) 一般に重要度の高い構造物では地震動に対する構造物自身の動的応答、即ち地震動に対する構造物の揺れ易さを考慮して耐震設計が行われている。その場合、構造物の揺れやすさは**共振の程度**即ち地震周期 vs 固有周期(地震周波数 vs 固有振動数)の接近度で決まり、固有周期(固有振動数)は[構造物質量&付加質量]と[構造物の剛性(バネ定数)]によって決まる。

この認識は多くの構造物で成立する。然るにプラント機器のように内容液を収納した設備の場合にはこの認識だけでは必ずしも十分ではない。内容液が多くなり自由表面を持つと、内容液そのものの固有の揺れに由来する固有振動数(固有周期)と地震周波数(地震周期)が漸近して共鳴が起きて構造物を大きく揺り動かすからである。ただこの**共鳴現象**(一般には共振現象で括られる)は、大型直立タンクのように大きな内容積と広い自由表面を持たない限り、構造強度上は無視できる(例えば横置き枕タンクでは然り、**補2**参照)。とにかく大型直立タンクには、構造物の固有周期と内容液の固有周期が同時に存在し直接的/間接的なタンクの揺れモードが潜在している。地震動に対してこれらはどう反応するのか？

構造物の固有周期は短い(固有振動数は高い)。構造物のバネ剛性が比較的高く揺れが自制されるからである。一方、内容液の固有周期は長い。流動性があり揺れに自制が効かないからである。

従って、もし**地震動の周期が短ければ**構造物の固有周期と共振し、**地震動の周期が長ければ**内容液の固有周期と共振(共鳴)し、夫々の固有振動モードで揺れる可能性がある。このため危険物や高圧ガス関連の設備では**短い周期と長い周期**を持った地震動につき別々の規制が設けられている[**3.(1)**参照]。

さて短周期の地震動では、構造物との共振傾向 即ち“構造物そのものの揺れ”が懸念される。この揺れは次のような経過をたどる。

**地震動→タンク底面の移動→[躯体&内容液]質量の慣性効果→動液圧→胴板/屋根板の揺動**

つまり地震動によって[屋根&胴板+内容液]の質量慣性力が動液圧の形をとって胴板や屋根を揺らす。この現象は**バルジング**(膨れるの意)と呼ばれている。バルジングでは胴板/屋根などの構造部分が固有振動に近い形で揺れるものの、内容液は殆ど揺れない(構造物の方が応答し内容液は殆ど応答しない)。

また、長周期の地震動では、内容液との共鳴 即ち“内容液そのものの揺れ”が懸念される。この揺れは次のような経過をたどる。

**地震動→タンク底面の移動→内容液の揺れ→液面変動→動液圧→胴板/屋根板へ負荷**

つまり地震動によって内容物が揺れて液面が大きく波立ち、それに伴う質量慣性力が動液圧の形で胴板や屋根板にストレスや変形を与える。この現象は通常**スロッシング**(撥ねるの意)と呼ばれている。スロッシングでは構造部分は動液圧による強制振動で揺れ内容物は固有(自由)振動に近い形で揺れる。

実際に起きる地震動は短周期の振動で始まりそれに続いて長周期の地震動が現れるが、後者は十分に長周期とはいえず、一般に“**やや長周期の地震動**”と呼ばれている。また短周期地震動は地震慣性力が効いてくるので**加速度タイプの地震動**、長周期地震動は地震変位が効いてくるので**変位タイプの地震動**とも呼ばれることがある。

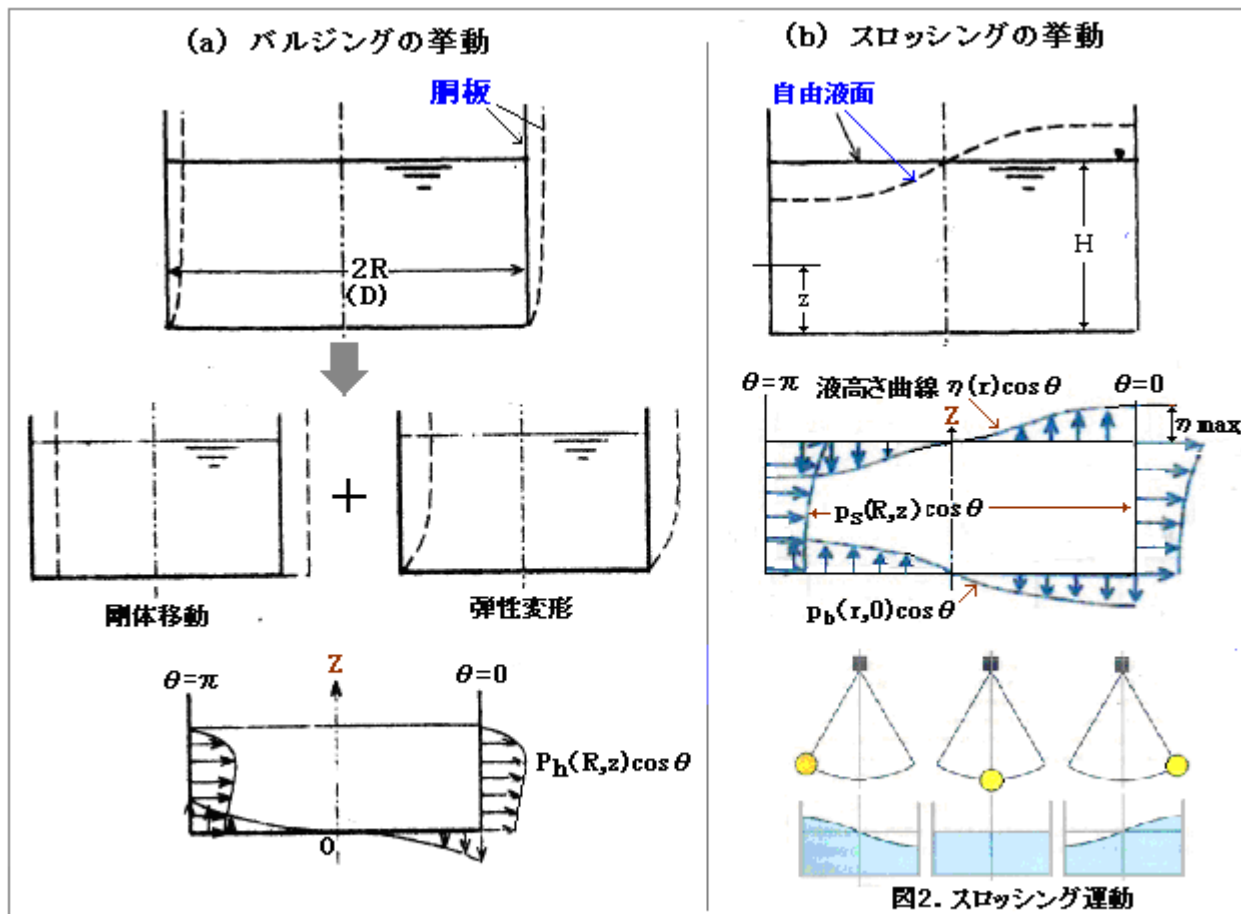
(2) 以上、地震時のタンク動揺から生じる現象をまとめると次のようになる。

短周期の地震動(加速度タイプ)	やや長周期の地震動(変位タイプ)
バルジング現象の発生	スロッシング現象の発生
構造物の固有振動モード介在	内容液の固有振動モード介在
自由液面は殆ど揺れ無し	自由液面の固有振動的な大揺れ
動液圧(付加質量)の作用	動液圧(付加質量)の作用
胴板/屋根の比較的固有振動的な揺れ	胴板/屋根の強制振動
危険物/液化ガス規制有り	危険物/液化ガス規制有り

ここで付加質量はタンク質量  $\times$  水平震度すなわち水平方向に付加される質量相当を云い、通常、動液圧(分布し変動する液圧)で表現される。なおタンク質量は大型の貯蔵タンクの場合、内容液分がタンクの全質量の 90%を超えるので、通常、法規では内容液質量をタンク質量扱いしている。

(3) バルジングとスロッシングの挙動を下図(図 A1)に示す。バルジングの場合、底面の急激な移動により剛体移動と側板変形に誘導された弾性変形が生じる。そのとき上述のように自由液面は変形しないが、側板が弾性変形してその影響が側面の液頭圧(動液圧)分布に現れ、更に底板の動液圧分布を誘起する。

一方、スロッシングでは、側板の変形に比べ自由液面が大きく変形する。その動きは図 2 のような天秤運動になる<sup>(9)</sup>。これは側板(側壁)に向かって加速された液体が壁に阻まれ、自由表面に向かって膨出することで起こる現象と思われる。側面の動液圧は自由表面への膨出の影響でやや上の方で高くなる。また底板では自由液面の天秤運動に追従し動液圧分布が派生する。



図A1 バルジングとスロッシングの挙動比較 テキスト(1)より引用

## 2.2 バルジングについて<sup>(1)(3)</sup>

(1) 前項で述べたように、バルジングの場合、タンク構造物の固有振動が重要である。大型直立タンクの水平方向の1次固有周期は次式で与えられる<sup>(3)</sup>。

$$T_b = (2/\lambda) \{W_L / (\pi g E t_b)\}^{0.5} j \quad (\text{但し } 0.15 \leq (H/D) \leq 2.0) \quad \text{-----}(2-1)$$

$$\lambda = 0.067 \{H/D\}^2 - 0.30 \{H/D\} + 0.46, \quad W_L = \rho_L g \pi R^2 H$$

ここで  $T_b$ =タンクの1次固有周期(sec.)、 $W_L$ =内容液重量(N)、 $E$ =側板の縦弾性係数(N/m<sup>2</sup>)、 $g$ =重力加速度(m/s<sup>2</sup>)、 $\rho_L$ =液密度(kg/m<sup>3</sup>)、 $t_b$ =底面から  $H/3$  の高さの側板厚(m)、 $j$ =基礎地盤と貯槽本体との連成の影響に基づく補正係数(危険物貯蔵の場合で下記)

[第4種地盤上の直接基礎型式の場合  $j=1.1$ 、その他の場合  $j=1.0$ ]

この式はFEMによるシェル解析からえられたもの(補3参照)で、内容液付加質量≫構造物質量という前提によっている。構造物の質量が無視できない場合は文献(6)などを参照のこと。

なお、垂直方向の固有周期については[補4]を参照のこと。

(2) 地震が起こるとタンク底面が地盤とともに揺動するが、この際、内容液は急激に加速され慣性力を生じる。液体の場合、慣性力はオイラ式の運動エネルギー( $\rho U^2$ ) 即ち動圧に相当するので、動液圧と呼ばれる(\*)。地震によって発生する動液圧は次の2つの成分からなっている。

・**衝撃圧**: タンクの剛体移動に由る。タンク振動とは無関係に派生(図A1(a)中段左)

・**連成振動圧**: タンク振動の共振/増幅に由る。側板の弾性変形と同期して派生(図A1(a)中段右)

なお、衝撃圧は地震加速度( $\alpha_g$ )によって派生し、連成振動圧は $\alpha_g$ に胴板/屋根の応答加速度( $\alpha_r$ )が加わって派生する(変形圧とも云う)。衝撃圧と連成振動圧の同時作用によって次のようなモーメント・フォースが生じる。

**タンク底面にベースシャー(底部水平力) & 胴板/底板に回転モーメント**

このモーメント・フォースによる応力が、主な地震強度の評価対象になる。

(3) 短期地震動(→バルジング)に対する基本的な設計手順は以下のようになる。

ステップ1) (2-1)式から得られたタンク固有周期を用いて、応答スペクトル線図から応答倍率 $\beta$ を求める(補5参照)。

ステップ2) タンク本体の重心加速度(応答加速度) $\alpha_r = \beta \alpha_g$ を求め、下記の式からバルジングの動液圧 $P_h(z)$ を計算する(補5,6参照)。

$$P_h(z) = P_{h0}(z) + P_{h1}(z) \quad \text{-----}(2-2)$$

$$P_{h0}(z) = \rho_L H \{ \sum C_{0i}(z/H)_i \} \alpha_g$$

$$P_{h1}(z) = \rho_L H \{ \sum C_{1i}(z/H)_i \} (\alpha_r - \alpha_g)$$

ここで  $P_{h0}$ =衝撃圧による $z$ 方向動液圧( $P_a$ )、 $P_{h1}$ =連成振動圧による $z$ 方向動液圧( $P_a$ )

$C_0, C_1$ =係数、 $\alpha_g$ =地表面加速度(m/s<sup>2</sup>)、 $\alpha_r$ =タンク本体最大応答加速度(m/s<sup>2</sup>)

$\rho_L$ =液密度(kg/m<sup>3</sup>)、サフィックス  $i \rightarrow$  整数(=0~5)

係数  $C_0, C_1$  の値はテキスト(1)の表-19.1, 表-19.2を参照のこと(ここでは割愛)。

[因みに、タンクは( $\alpha_r - \alpha_g$ )に比例して弾性変形する。]

ステップ3) 次式によって、ベースシャー及び転倒モーメントを求める(補7参照)。

$$Q_h = W_0 \alpha_g / g + W_1 (\alpha_r - \alpha_g) / g \quad \text{-----}(2-3a)$$



$$W_0 = (2Rg/\alpha_g) \int_0^H \int_0^\pi P_{h0}(z) \cos^2 \theta \, d\theta \, dz$$

$$W_1 = \{2Rg/(\alpha_r - \alpha_g)\} \int_0^H \int_0^\pi P_{h1}(z) \cos^2 \theta \, d\theta \, dz$$

$$M_h = W_0 H_0 (\alpha_g/g) + W_1 H_1 \{(\alpha_r - \alpha_g)/g\} \quad \text{-----(2-3b)}$$

$$M_{hB} = W_0 H_{0B} (\alpha_g/g) + W_1 H_{1B} \{(\alpha_r - \alpha_g)/g\} \quad \text{-----(2-3c)}$$

ここで、 $Q_h$ =底部水平力(N)、 $M_h$ =側板下部の転倒モーメント(N・m)、  
 $M_{hB}$ =底板部のモーメント(N・m)、 $W_0$ =剛体運動による有効液重量(N)、  
 $W_1$ =弾性変形による有効液重量(N)、 $H_0, H_1 = W_0, W_1$ の重心高さ(m)、  
 $H_{0B}, H_{1B} = W_0, W_1$ の換算用の重心高さ(m)、  
 $W_0, W_1, H_0, H_1, H_{0B}, H_{1B}$ の算定法はテキスト(1)の 19.3 による。あるいは  
 下図(図-19.5～19.7)を参照のこと。

ステップ 4) 得られた  $Q_h, M_h, M_{hB}$  から、次の構造検討を行う。

ベースシャー  $Q_h$  → タンクの横すべり及びタンク基礎検討

転倒モーメント  $M_h$  → タンク側板下部強度/タンク板厚検討

底板モーメント  $M_{hB}$  → タンクストラップ/タンク基礎検討

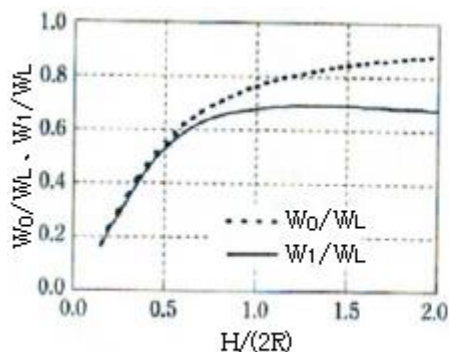


図-19.5 有効液重量  $W_0, W_1$

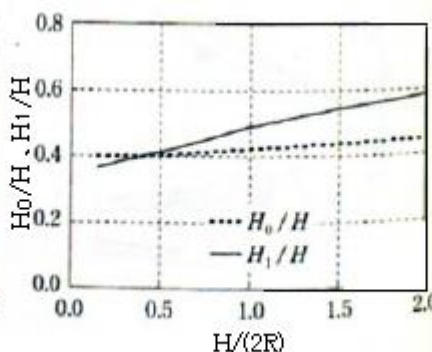


図-19.6 有効液の重心高さ  $H_0, H_1$

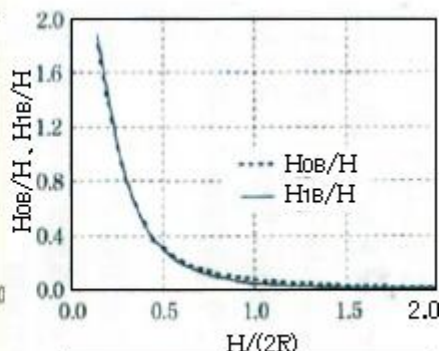


図-19.7 換算重心高さ  $H_{0B}, H_{1B}$

## 2.3 スロッシングについて<sup>(1)(2)(3)(9)</sup>

(1) タンクのみならず自由液面を持った設備であればすべて、地震の際して何らかのスロッシングが起きる。問題はその規模と影響である。スロッシングを評価する法には、次のようなものがある<sup>(2)</sup>。

- ① Housner 理論による方法、② 速度ポテンシャル理論による方法
- ③ 流体-構造物の連成による方法、④ 内容液の非線形性や流れを考慮した方法

①は内容液の挙動を集中定数系で扱うもの(補8参照)。②は内容液の挙動を連続体として扱うものである。どちらもスロッシングから生じる動液圧(構造物質量に付加される仮想質量)を求め、それによって生じる[水平方向荷重→ベースシャー(底部せん断力) & 転倒モーメント]を求めて、強度チェックに結びつけている。しかし何れもモデル境界の(胴板/屋根/底板)を、剛体(リジッド)扱いにしているので、実際の[弾性境界による流体-構造物の相互干渉]が無視されている。③はこの弊害を取り除くものである。即ち、速度ポテンシャルとシェル構造をリンクした一連の FEM 解析によって相互干渉を考慮することで、評価の精度はかなり向上する。ただこれらの解析では流体部分を線形モデルで扱っているため、波高さが 4% といった誤差がでる。また水深が浅くなると進行波が現れ微小振幅波で扱うのが難しくなる。そこで④の非線形解析が用いられるようになっている。

③④といったコンピュータ解析による評価は、タンク構造のみならず、自由表面を持った様々な形状の容器構造/ピット構造にもたいへん有効である。ただスロッシングの基本的な挙動は、②の速度ポテンシャルによる方法で説明がつく。危険物/高圧ガス設備関連の法規制も速度ポテンシャル理論に拠っている。そこでここでは③④につながる情報を割愛し、主に②につながる情報を扱う。

- (2) 地震などでタンク全体が横移動すれば当然、何らかの液面動揺がおきるが、問題は地震動の中にタンク内容液の1次固有周期に近い周期成分が含まれていることである。この地震周期成分と内容液の固有周期が位相差もなく重なると、流体的な共振（いわゆる共鳴）が起き液面動揺は増幅されて大揺れになるのでスロッシングを評価する上で内容液の1次固有周期はキポイントになる。これは速度ポテンシャル解のひとつとして次式で与えられる。

$$T_s = 2\pi \{D/(3.68g)\} \coth(3.68H/D)^{0.5} \quad (\text{但し } \pi/10 < (2H/D) < \pi) \quad \text{-----}(2-4)$$

$$f_s = \{1/(2\pi)\} [(3.68g/D) \tanh(3.68H/D)]^{0.5} \quad (\text{同上}) \quad \text{-----}(2-5)$$

ここで  $T_s$  = 内容液の1次固有周期(sec.)、 $f_s$  = 内容液の1次固有振動数(Hz)、 $g$  = 重力加速度(9.81m/s<sup>2</sup>)

通常、内容液の1次固有周期は4～10sec.といったところで、昨今の超高層ビルの耐震性で問題にされる長周期地震動とは少し間がある。そのためスロッシングはやや長周期の地震動に係わる問題として扱われている。

[ 自由表面を持つ液体容積の固有振動数は、流体振動問題などで必要になることがある。添付 B にテキスト(2)からの抜粋を示す。]

- (3) 速度ポテンシャル理論によるアプローチは、大略、次のようになる。

- ・ 非圧縮性/非粘性の完全流体及び渦無し流れを仮定、ついで
- ・ 連続の式を速度/液面に関する境界条件で解いて速度ポテンシャル  $\phi$  を求め、次いで
- ・  $\phi$  から波高さ  $\eta$  と動液圧  $P$  を求めて、タンクに作用するモーメント  $M$ ・フォース  $F$  を得る。

速度ポテンシャル法のアプローチの詳細は添付 A による。結果的に次式が得られる。

$$\eta_{\max} = (R/g) \{2/(\varepsilon_1^2 - 1)\} (n\pi d \omega_1^2) \cos \theta \quad (r=R \text{ にて}) \quad \text{-----}(2-6)$$

$$p_s = \rho g \eta_{\max} \{ \cosh(\varepsilon_1 z/R) / \cosh(\varepsilon_1 H/R) \} \quad \text{-----}(2-7)$$

$$p_b = \rho g \eta_{\max} [J_1(\varepsilon_1 r/R) / \{J_1(\varepsilon_1) \cdot \cosh(\varepsilon_1 H/R)\}] \quad \text{-----}(2-8)$$

ここで、 $\eta_{\max}$  = 最大スロッシング高さ(m)、 $p_s$ ,  $p_b$  = 側板, 底板に作用する動液圧( $P_a$ )、  
 $d$  = 地震動による水平方向地盤変位(m)、 $\omega_1$  = スロッシングの1次固有角振動数(rad/s)、  
 $n$  = 正弦波サイクル数(-)、 $J_1(\varepsilon) = 1$ 次第一種ベッセル函数、 $\rho_L$  = 液密度(kg/m<sup>3</sup>)、  
 $\varepsilon_1$  = ベッセル関数微分の最小正根(=1.841)、

(2-6)式において、 $n\pi d = S_d$ 、 $\omega_1 = 2\pi/T_s$ 、 $\varepsilon_1 = 1.841$ 、および  $\cos \theta = 1$  (→最大値設定)と置く。  
 また3波共振[補9参照]を仮定すると、 $n=3$ であるから、

$$\eta_{\max} = 0.42(D/g)(2\pi/T_s)^2 S_d \quad \text{-----}(2-9a)$$

$S_d = S_v / \omega_1 = \{T_s/(2\pi)\} S_v$ 、 $S_v = S_a / \omega_1 = \{T_s/(2\pi)\} S_a$  とすれば、

$$\eta_{\max} = 0.42(D/g)(2\pi/T_s) S_v \quad \text{-----}(2-9b)$$

$$\eta_{\max} = 0.42D(S_a/g) = 0.42DK_h \quad \text{-----}(2-9c)$$

ここで  $\eta_{\max}$  = 最大液面変位(m)、 $g$  = 重力加速度(9.807m/s<sup>2</sup>)、 $T_s$  = 内容液の固有周期(sec.)、

$S_d$ =変位応答スペクトル(m)、 $S_v$ =速度応答スペクトル(m/s)、

$S_a$ =加速度応答スペクトル(m/s<sup>2</sup>)、 $K_h$ =水平震度(-)

$S_d, S_v, S_a$ は地震動入力(この場合 d)に対するタンクの応答量を表すものである。

- (4) 強度チェックに使用するベースシャー及び転倒モーメントは次式から得られる<sup>(1)</sup>。

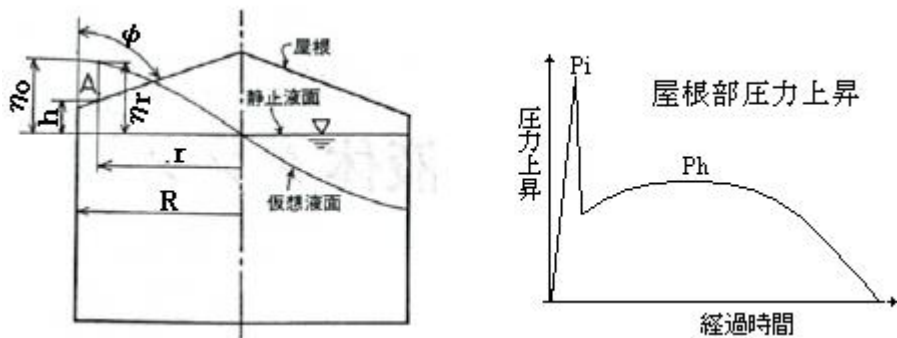
$$Q_s = 2R \iint p_s \cos^2 \theta \, d\theta \, dz = W_L (\eta_{\max}/H) \{ \tanh(\varepsilon_1 H/R) / \varepsilon_1 \} \quad \text{-----}(2-10a)$$

$$M_s = 2R \iint p_s z \cos^2 \theta \, d\theta \, dz = W_L (\eta_{\max}/H) [ \tanh(\varepsilon_1 H/R) - \{ R/(\varepsilon_1 H) \} \{ 1 - 1/\cosh(\varepsilon_1 H/R) \} / \varepsilon_1 ] \quad \text{-----}(2-10b)$$

$$M_{sh} = 2 \int r^2 p_b(r, 0) \, d\theta \, dr = W_L \eta_{\max} (R/H) \{ 0.296 / \cosh(\varepsilon_1 H/R) \} \quad \text{-----}(2-10c)$$

ここで、 $W_L$ =内容液重量(N)( $= \rho_L g \pi R^2 H$ )、 $\rho_L$ =液密度(kg/m<sup>3</sup>)、

- (5) 一般に速度ポテンシャルによる方法ではモデルの上で屋根の介在は無視している。これは通常液面が低い間は波立ちが屋根に及ばないので問題ないが、通常液面が高いとスロッシングによる波が屋根に衝突することになる。タンク屋根には固定屋根と浮屋根があるが、固定屋根の場合、下図のような波の衝突による圧力上昇が起きる<sup>(6)</sup>。



ここで、

衝撃圧( $P_i$ )：スロッシングの波が屋根に衝突した瞬間の圧力上昇。圧力値は高いが作用時間は 0.1sec 以下と極く短いので屋根の局部応力解析の荷重に使用。

腰掛圧( $P_h$ )：衝撃後、数秒程度、液頭圧が保持される時の応力。圧力値は衝撃圧より低い为数秒継続するので、タンクの全体解析で使用する。なお、腰掛圧はある程度、角度のある屋根で生じ、平屋根では生じない。

それぞれの圧力は、次式で与えられる<sup>(6)</sup>。

$$P_i = \rho (\pi/2) \tan \phi (\eta_r')^2 \quad \text{-----}(2-11a)$$

$$P_h = \rho g (\eta_o - h) \quad \text{-----}(2-11b)$$

ここで  $P_i, P_h$ =各圧力(Pa)、 $\rho$ =液密度(kg/m<sup>3</sup>)、 $\phi$ =屋根角度(°)、

$h$ =液面から受圧点 A までの高さ(m)。

$\eta_r$ =受圧点 A における仮想液面の高さ(m)[添付 A の(A18)式]

$\eta_r'$ =受圧点 A に到達した時の液面速度(m/s) [ $= \eta_r \omega_o \cos^{-1} \{ \sin(h/\eta_r) \}$ ]

$\omega_o$ =固有角振動数 [ $= \{ (3.68g/D) \tanh(3.68H/D) \}^{0.5}$ ]

$\eta_o$ =タンク外周( $r=R$ )における仮想液面の高さ(m)

以上は固定屋根の場合であるが、実際の地震では[補 1]に示すように石油貯槽の浮屋根の損傷の方が

多い。浮屋根は液面に浮いており液面動揺を抑制する効果は乏しい。地震時は液面の動きによって、タンク側板や付帯物と衝突したり屋根外周のポンツーン部分で座屈したりする。そのため種々の検討や解析がなされ、対策構造が提案されている。

### 3. タンク揺動に対する対策

#### 3.1 強度の維持（法規制の内容）

危険物や液化ガスの貯蔵設備では、耐震性確保の観点からその構造強度が厳しく規制されているが、その規制はいずれもバルジング・スロッシング対応といっても過言でない。以下、高圧ガス保安法関連を例にあげて、その規制のあらましを紹介する。

通常、高圧ガス設備は、設備の重要性や設置場所の地盤/地域などを考慮した設計地震動(第1設計地震動)に耐えるように設計されるが、**平底円筒タンクに限っては**この地震動に加えて、液面動揺(スロッシング)の影響を考え**第2設計地震動**に耐用できる設計が要求されている。すなわち第1設計地震動はバルジング、第2設計地震動はスロッシングに対応しており、そのいずれに対しても強度維持が要求されている。その場合、これら地震動に対する具体的な耐震性評価手順は、概ね次のようになる(末尾の**添付 C**のチャートをあわせて参照のこと)。

##### 【第1設計地震動(→バルジング)の場合】

- ステップ1: 貯槽の主要仕様(形式/容量/主要寸法/材料/設計条件など)を決める。
- ステップ2: 設備の重要度や規模などから貯槽の次の何れかの設計震度を決定する。
- ①最も重要度の高いもの → 時刻歴応答解析による設計震度
  - ②次に重要性の高いもの → 応答スペクトル線図に基づく修正震度
  - ③比較的重要度の低いもの → 150gal ベースの静的震度
- ステップ3: 貯槽サイズ(高さ比/貯槽内径)に基づいて次のいずれかを選択する。
- ①サイズ大→解析による動液圧/応力/基礎荷重の算定
  - ②サイズ小→告示式を用いた応力/基礎荷重の算定など

##### 【第2設計地震動(→スロッシング)の場合】

- ステップ1: 液面動揺の固有周期から次の何れかの地震動入力を選んで計算する
- ①短い周期→地震動速度(基準 50cm/s)、②長い周期→地震動変位(基準 60cm)
- ステップ2: 貯槽サイズ(高さ比/貯槽内径)に基づき次のいずれかを選択する。
- ①サイズ大→時刻解析等による波高/腰掛圧/動液圧/応力/基礎荷重の算定
  - ②サイズ小→告示式を用いた応力/基礎荷重の算定/評価など

いずれの地震動の場合も、まず強度計算のための設計震度あるいは地震入力を決める。バルジングの場合は設備の重要度/規模に拠る(これは一般の耐震設備の設計に同じ)。スロッシングの場合は固有周期 7.5sec を境にして、変位( $S_d$ )で入力するか、速度( $S_v$ )で入力するかを選ぶようになっている(周期が長くなれば準定常的な扱いになり理に合うが背景は不明)。

次いで、貯槽サイズによって応力解析によるのか、告示式によるのかを決める。大きな貯槽では Design by analysis になり FEM 解析が採られる。小さい貯槽では Design by rule すなわち告示の式が用いられる。告示の応力式は、前述の(2-3)式や(2-10)式のモーメント・フォースをベースに調製



されたものである。

危険物関連の法規制も基本的には高压ガス設備に同じである。その設計的な考えは JISB8501「鋼製石油貯槽の構造(全溶接製)」の参考“鋼製石油貯槽の耐震設計指針”にでている。これによれば、地震動は高压ガス設備と同じように次の2つに区分される。

バルジング→加速度型地震動、 スロッシング→変位型地震動

変位型地震動では、設計用の修正震度  $K_{sh}$  を次のように設定している(趣意を表記)。

$$K_{sh} = S_a/g = \omega_s S_v/g = (2\pi/T_s)S_v/g = (2\pi/T_s)S_v/980 = (0.00641/T_s)S_v$$

速度スペクトル  $S_v$  は法規則で決まる。旧来は地震例から  $S_v = 100\text{cm/sec}$  とされていた(高压ガス設備の 1/5 程度)。なお、スロッシング波高については、 $\eta = 0.418DK_{sh}$  と記されており(2-9c)式に同じ。

【なおこれら法規はいずれも、地震周期(あるいは加振振動数)とスロッシング固有周期(あるいは固有振動数)が一致して共鳴状態にあることを前提にしていることを、念為的に記しておく。】

### 3.2 スロッシングの緩和抑制

ここまでは大型平底直立円筒タンクを対象に話してきたが、スロッシング現象は、大型貯槽のみならず、石油/液化ガス輸送船、各種輸送容器、航空機ロケット燃料タンク、原発燃料プールあるいは一般産業分野の小型容器やピットなどでも問題になることがある。何らかの揺れによって溢流や越流/噴出し/振動や不安定/異常反応などが起きて、設備を損傷する恐れがあるからである。そのため種々のスロッシング(液面動揺)の緩和抑制策が提案されている。その例を以下に示す<sup>②</sup>。

#### ① 縦方向隔壁によって流体抵抗をつける方法(図 A)

旧来タンカ等で採られている方法で、揺れモードを分散し固有周期を変え刺激係数を抑える。

#### ② 棒くい群を用いて流体抵抗をつける方法(図 B)

棒の数が多いほど効果的、減衰効果でスロッシングの波高や動液圧を緩和する。

#### ③ 液表面寄りに横方向抵抗体を設ける方法(図 C)

液表面やその下にバップルを付けて固有周期を変え減衰効果を与え刺激係数を低減する。

#### ④ 天井に通気孔を配置する方法(図 D)

FRP タンクなどで外部に水勢を逃がすもの(排水の回収?)

#### ⑤ 逆 U 字管を動的吸振器とする方法(図 E)

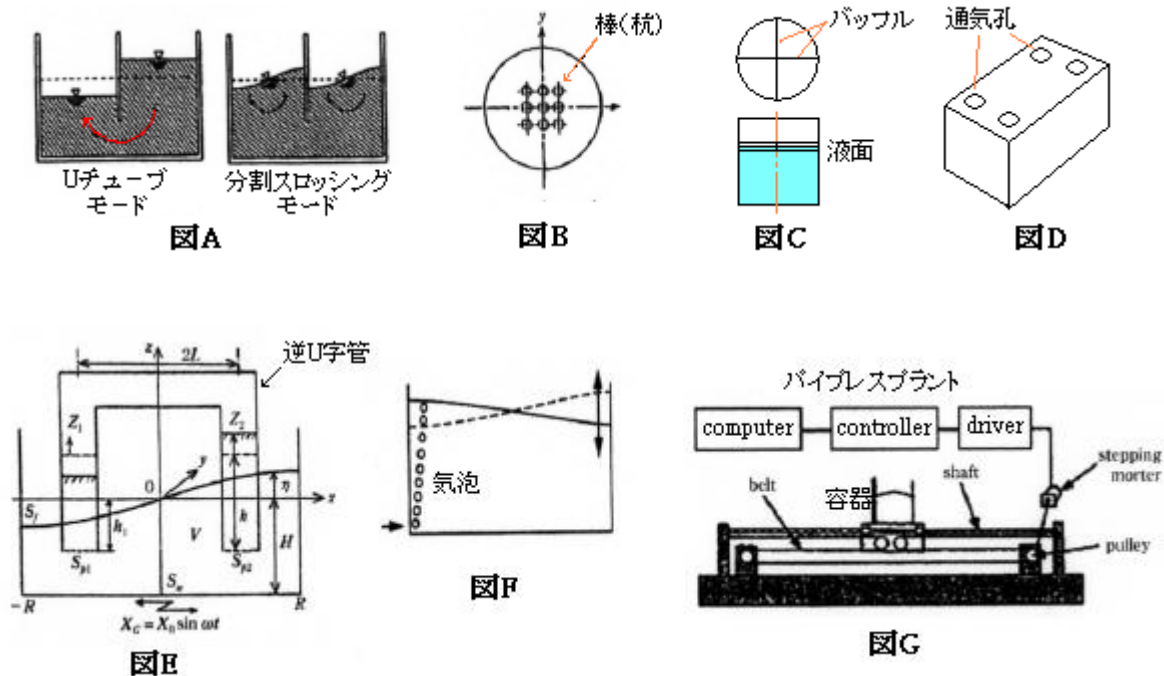
スロッシングの固有周期に合せた逆 U 字管を設けて波高を 1/6 程度に抑える。

#### ⑥ 気泡の間欠噴き出して液面を能動制御する方法(図 F)

吹き出しタイミングと時間を制御することで液面動揺を抑制する。

#### ⑦ 輸送容器内の液位振動制御(図 G)

ファインケミカルなどのパイプレス充填設備で移動容器内の揺れを最小にする運転制御法。



### < 補足説明 >

【補1】近年の地震による貯蔵タンクの被害状況は次の通り<sup>9)</sup>。殆どバルジング/スロッシングによる。

・宮城沖地震：1978.6 M7.4 仙台/石巻/大船渡(震度 5)

東北石油・仙台製油所にて、ドームルーフタンク 3 基の底板損傷(亀裂異常+スロッシング)→ロッキング→アンニュラ-部分浮き上がり→亀裂→全量流出。また、浮屋根原油タンク 10 基の浮屋根廻り不具合/ラダ-液面計損傷 あるいはナフサタンク側板上部変形

・日本海中部地震：1983.5 M7.7 深浦/秋田(震度 5)

東北電力秋田火力発電所にて、浮屋根原油タンクのスロッシングによる溢流/リング火災  
新潟地区では、石油タンク 864 基中 12 基でスロッシングによる側板上部溢流/浮屋根など損傷

・新潟地震：1984.6 M7.7 酒田/新潟(震度 5~6)

昭和石油・新潟製油所にて、浮屋根原油タンク(5 基)の浮き屋根揺れ→破損流出→製品タンクを含め 15 基炎上→2 週間延焼、また接続配管破損→民家延焼

・兵庫県南部地震：1995.1 M7.2 神戸/西宮/北淡(震度 6~7)

スロッシングによる浮屋根漏洩(6 施設)、浮屋根/側板/付属品の損傷は無し  
その他、地震の揺れによる側板座屈変形、液状化による不等沈下/側方流動による被害

・集集地震：1999.9 M7.7 台湾 南投 983gal

中国石油公司にて、浮屋根タンクボンツーン座屈→原油流出  
LPG 基地で、浮屋根タンク下部側板廻りで孔明き→原油流出  
円錐固定屋根タンクで、側板-屋根接合部座屈→原油流出

・十勝沖地震：2003.9 M8 浦河/厚岸/苫小牧(震度 5~6)

出光興産北海道製油所にて、浮屋根原油タンクのリング火災、また浮屋根ナフサタンクの浮屋根上にナフサ漏洩→全面火災→タンク崩壊。また事業所内の平底タンク 105 基のうち

43 基でスロッシングによる損傷発生

・東日本大震災：2011. 3. 11 M9

東海岸側(気仙沼/釜石/石巻など)では原油貯槽など地震&津波で破壊炎上多数。ただスロッシング状況は不明。西海岸(新潟/新発田/酒田)では石油貯槽類のデッキ上漏洩/部分破損などあり。十勝沖地震を受けて作られた耐震適合基準に満たすタンクには流出事故はおきていない。千葉コンビなどのタンク破損については不明。

【補 2】 スロッシングはある程度広い自由液表面やふところの深い液深がないと大きくならないし、容器構造が平坦で液圧に耐え難い構造でないと問題にならない。その点、塔槽/熱交/球形タンクは法規制から外れる。ただ大型の横置き枕タンクについては判断が難しく、1985 年頃、神奈川県が中心になって調査研究が行われている。その結果、

- ・軸直角方向スロッシング→ 球形タンクのスロッシングに似ており、その水平力は 90% 液深で Max. 0. 16 の等価水平震度であった。
- ・軸方向スロッシング→  $L/D=2$  で液深 75%の時のスロッシング波頭の衝突効果も含めて Max. 0. 28 の等価水平震度

結論的に静的水平震度 0. 3 以上で設計されているときはスロッシング考慮不要とされた。この結果から、枕タンクの第 2 地震動は免除されたようである。しかしスロッシングは発生するのでインターナルなどの強度検討が必要になることも考えられる。そのときは、

「横置円筒タンクのスロッシング応答」三枝、小林ら(高压ガス Vol.22 No.9/No.10)を参照されたい。

【補 3】 (2-1)式は、タンク本体を軸対称シェル、内容液を軸対称ソリッドでモデル化した FEM 解析によるパラメータスタディから得られたものである<sup>(1)</sup>。なお液相はオイラーの運動方程式に準じたオイラー要素で扱い、下記の数値ポテンシャル条件のもとで解析されていると思われる。

- ① 連続式： $\nabla^2 P = \partial^2 P / \partial r^2 + (1/r)(\partial P / \partial r) + (1/r^2)(\partial^2 P / \partial \theta^2) + \partial^2 P / \partial z^2 = 0$
- ② 自由液面での境界条件： $\partial P / \partial z = 0$
- ③ 側板での境界条件： $\partial P / \partial r = \rho_L(\alpha_r + \alpha_g) \cos \theta$
- ④ 底板での境界条件： $\partial P / \partial z = 0$

【補 4】 鉛直動に対する平底タンクの 1 次固有周期  $T_v$  は次式から得られる<sup>(3)</sup>。

$$T_v = f_v H \{ \gamma D / (g E t_h) \}^{0.5} \quad (\text{sec.})$$

$$f_v = 3.65 + \{ 0.22(D/H)(D/H - 1.0) + 0.18 \}^{0.5}$$

ここで  $\gamma$  = 内容液の密度(N/m<sup>3</sup>)、 $g$  = 重力加速度(m/s<sup>2</sup>)、 $E$  = 材料ヤング率(N/m<sup>2</sup>)

$t_h$  = 最高液面高さの 1/3 位置での側板厚さ(m)

【補 5】 1 自由度系の運動方程式を変形すると次のようになる(ただし加振力として地震慣性力)

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = -m \alpha_g \rightarrow (\ddot{x} + \alpha_g) + (c/m)\dot{x} + (k/m)x = 0$$

$$\rightarrow (\ddot{x} + \alpha_g) + 2h(2\pi/T_0)\dot{x} + (2\pi/T_0)^2 x = 0 \quad \text{-----}(a)$$

ここで  $m$  = 質量、 $c$  = 減衰定数、 $k$  = バネ定数、 $\alpha_g$  = 地震加速度、 $h$  = 減衰比、

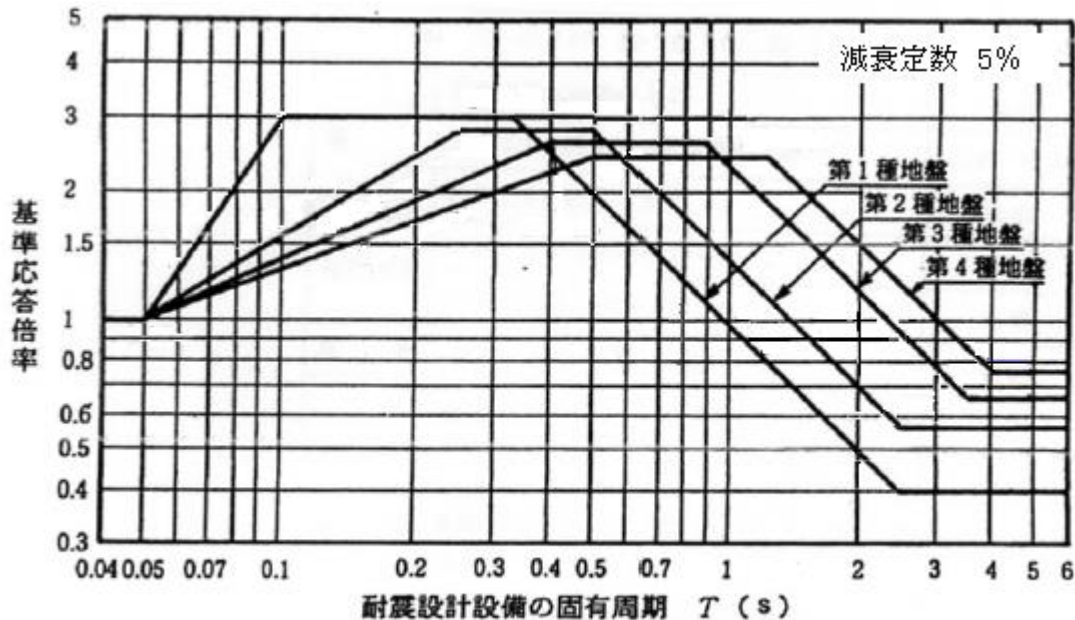
$x$  = 相対変位、 $\dot{x}$  = 相対速度、 $\ddot{x}$  = 相対加速度、 $T_0$  = 構造物の固有周期

この(a)式を 減衰比  $h$  / 固有周期  $T_0$  / 地震加速度  $\alpha_g$  を与えて解き、その解  $x$  から加速度  $x''$  を得ることができる。(a)式の左辺第1項の加速度項( $x'' + \alpha_g$ )が1自由度系の加速度応答スペクトルで、応答倍率  $\beta$  は  $\beta = (x'' + \alpha_g) / \alpha_g$  で定義されるから、構造物の応答状態での加速度  $x''$  は、

$$x'' = (\beta - 1) \alpha_g = \beta \alpha_g - \alpha_g = \alpha_r - \alpha_g \quad (\text{ここで } \alpha_r = \beta \alpha_g)$$

になる。この $(\alpha_r - \alpha_g)$ によって付加的に動液圧が加わって構造物の弾性変形が誘導される。

実際のバルジング応答計算では、応答倍率  $\beta$  は下図のような応答スペクトル線図から得られる。即ち、横軸に構造物の固有周期( $T_0$ )をとり地盤種別を選んで縦軸の基準応答倍率( $\rightarrow \beta$ )を読み取る。



〔図 6.1〕 特 A 及び A 地区の基準応答倍率  
(高圧ガス設備等耐震設計指針 KHK E012-1)

このスペクトル線図は、基本的に(a)式を解いて得られるが、実際は実測地震波(加速度/周波数)を入力して時刻歴解析等で1マス・バネモデルの応答計算を行いその結果をプロットしたものである。ただ高圧ガス設備に適用されるので、オリジナルの曲線を包絡/拡張して安全側に設定されている。また、上記は減衰定数(減衰比)5%の時のものであるが、減衰定数が異なる場合は補正できるようになっている。なお平底タンクの場合、地盤との接地面積が大きく地下逸散減衰が期待でき、減衰定数5~10%が使用できると云われる(解析で使用か)。

【補 6】 動液圧の導入については、テキスト(3)に次のように解説がある。



a. 短周期地震動に対する側板の動液圧分布 短周期水平地震動に対する側板の動液圧分布は、一般に、剛体圧（円筒容器を剛体とみなしたときの動液圧）と変形圧（円筒容器の弾性を考慮したことによる動液圧）とで次式のように表わされる<sup>26,36)</sup>。

$$P(z, \varphi) = \frac{\rho D}{2g} \{ \ddot{u}_g P_r(z) + \ddot{x}_f P_f(z) \} \cos \varphi \quad (4.127)$$

ここで、 $P(z, \varphi)$ ：短周期水平地震動に対する側板の動液圧分布 (kgf/mm<sup>2</sup>)， $P_r(z)$ ：同剛体圧力分布係数（図4.28参照）， $P_f(z)$ ：同変形圧力分布係数（図4.29参照）， $\ddot{u}_g$ ：貯槽底面の水平加速度 (mm/sec<sup>2</sup>)， $\ddot{x}_f$ ：水平相対応答加速度 (mm/sec<sup>2</sup>)， $z$ ：貯槽底面からの高さ (mm)， $\varphi$ ：角度 (deg)， $\rho$ ：内容液の比重量 (kgf/mm<sup>3</sup>)。

式 (4.127) では、図から剛体圧力および変形圧力の係数値を読み取る必要がある等、実際に動液圧の数値計算を行うには不便である。そこで、実用的な算定式を導くために、まず式 (4.127) を、貯槽の絶対水平加速度 ( $\ddot{x}_f + \ddot{u}_g$ ) と貯槽底面の水平加速度  $\ddot{u}_g$  に対して次式のように変形する。

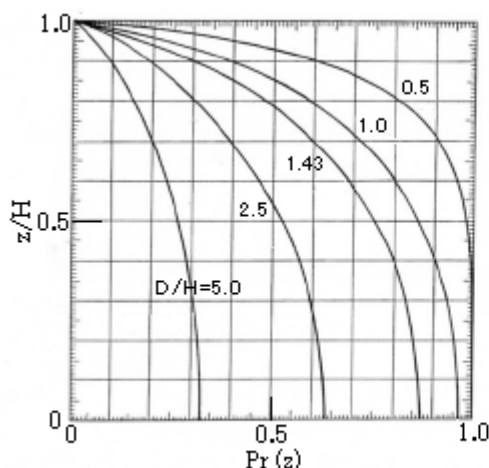


図4.28 短周期水平地震動に対する剛体圧分布係数

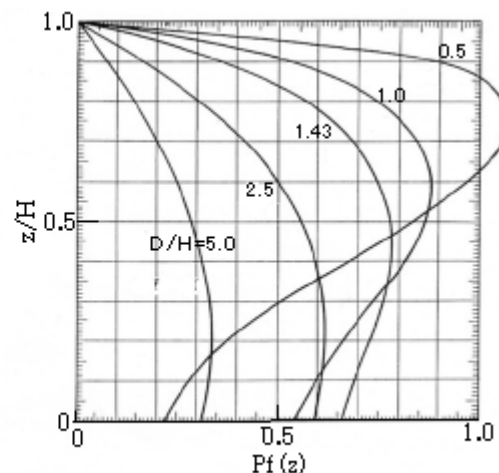


図4.29 短期水平地震動に対する変形圧分布係数

$$P(z, \varphi) = \frac{\rho D}{2g} [(\ddot{x}_f + \ddot{u}_g) P_r(z) + \ddot{u}_g \{P_r(z) - P_f(z)\}] \cos \varphi \quad (4.128)$$

そして、係数  $P_r(z)$  および  $P_f(z)$  を貯槽底面からの高さ  $z$  と最高液高さの比  $z/H$  のべき級数で近似し、加速度表示を震度表示にすることにより、次式のような、短周期水平地震動に対する側板の動液圧算定式が導かれ、実用に供されている<sup>37)</sup>。

$$\begin{aligned} P(z, \varphi) &= \rho H \frac{1}{2(H/D)} \left[ \left( \frac{\ddot{x}_f + \ddot{u}_g}{g} \right) P_r(z) + \frac{\ddot{u}_g}{g} \{P_r(z) - P_f(z)\} \right] \cos \varphi \\ &= \rho H \frac{1}{2(H/D)} \left[ K_{h1} P_r(z) + \frac{K_{h1}}{\nu_3} \{P_r(z) - P_f(z)\} \right] \cos \varphi \\ &= \left[ \rho H \frac{1}{2(H/D)} P_r(z) \frac{K_{h1}}{\nu_3} + \rho H \frac{1}{2(H/D)} P_f(z) \left( 1 - \frac{1}{\nu_3} \right) K_{h1} \right] \cos \varphi \\ &= [P_{h0} + P_{h1}] \cos \varphi = P_h \cos \varphi \end{aligned} \quad (4.129)$$

$$P_{h0} = \rho H \left\{ \sum_{i=0}^5 C_{0i} \left( \frac{z}{H} \right)^i \right\} \frac{K_{h1}}{\nu_3} \quad (4.130)$$

$$P_{h1} = \rho H \left\{ \sum_{i=0}^5 C_{1i} \left( \frac{z}{H} \right)^i \right\} \left( 1 - \frac{1}{\nu_3} \right) K_{h1} \quad (4.131)$$

ここで、 $P_h$ ：短周期水平地震動に対する側板の長手方向動液圧分布 (kgf/mm<sup>2</sup>)， $P_{h0}$ ：同剛体圧分布 (kgf/mm<sup>2</sup>)， $P_{h1}$ ：同変形圧分布 (kgf/mm<sup>2</sup>)， $C_{0i}$ ， $C_{1i}$ ：表4.15および表4.16により求める値。

記号は違っているが、(4.129)、(4.130)、(4.131)式は、本文の(2.2)式と同じになる。

【補 7】動液圧  $P_{h0}$ 、 $P_{h1}$  は、下図(A),(B)のように水平方向のフォースとして作用する。 まず動液圧  $P_h' = P_h(z) \cdot \cos \theta$  によって微小要素( $d\theta dz$ )に作用するフォース  $dF$  は、

$$dF = dF' \cos \theta = (P_h' R d\theta dz) \cos \theta = R P_h(z) \cos^2 \theta d\theta dz$$

これを  $\theta = 0 \sim \pi$ 、 $z = 0 \sim H$  で積分し 2 倍すれば、タンク側板に作用する全水平力  $F_h$  が得られる。

$$F_h = 2 \iint dF = 2R \iint P_h(z) \cos^2 \theta d\theta dz$$

ここで、バルジングによる全水平力  $F_h$  は有効重量  $W^*$  が加速度  $\alpha^*$  で動いた時の慣性力に等しいので、 $F_h = W^* \alpha^* / g$  になる。 $F_h$  はベースシャー(基底のせん断力) $Q_h$  に等しいから

$$Q_h = W^* \alpha^* / g \quad \text{但し } W^* = (2Rg / \alpha^*) \iint P_h(z) \cos^2 \theta d\theta dz$$

$P_h$ 、 $W^*$  及び  $\alpha^*$  は、衝撃圧によるものと弾性振動圧によるものがある。

$$P_h \rightarrow P_{h0} \& P_{h1}, \quad W^* \rightarrow W_0 \& W_1, \quad \alpha^* \rightarrow \alpha_g \& (\alpha_r - \alpha_g)$$

故に、これらの和をとって次式が得られる。

$$Q_h = W_0 \alpha_g / g + W_1 (\alpha_r - \alpha_g) / g$$

$$W_0 = (2Rg / \alpha_g) \int_0^H \int_0^\pi P_{h0}(z) \cos^2 \theta d\theta dz, \quad W_1 = \{2Rg / (\alpha_r - \alpha_g)\} \int_0^H \int_0^\pi P_{h1}(z) \cos^2 \theta d\theta dz$$

側板下部断面の転倒モーメントについては、

$$dM = z dF' \cos \theta = z (P_h' R d\theta dz) \cos \theta = R P_h(z) z \cos^2 \theta d\theta dz$$

故に、 $M_h = 2 \iint dM = 2R \iint P_h(z) z \cos^2 \theta d\theta dz$  となる。同様に衝撃圧/弾性振動圧を考慮すれば転倒モーメント  $M_h$  式は次のように表せる。

$$M_h = W_0 H_0 \alpha_g / g + W_1 H_1 (\alpha_r - \alpha_g) / g$$

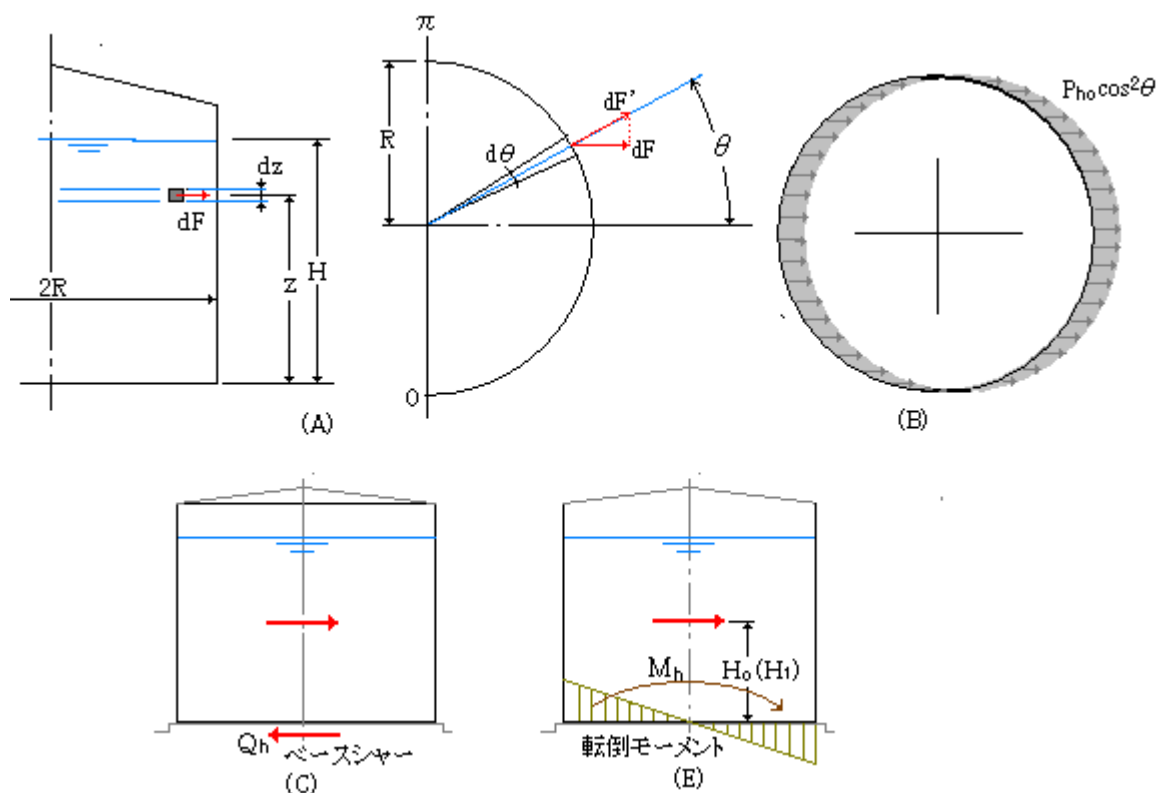
$$H_0 = \{2Rg / (W_0 \alpha_g)\} \iint P_{h0}(z) z \cos^2 \theta d\theta dz, \quad H_1 = [2Rg / \{W_1 (\alpha_r - \alpha_g)\}] \iint P_{h1}(z) z \cos^2 \theta d\theta dz$$

底板部の転倒モーメント  $M_{hB}$  式も同様に

$$M_{hB} = W_0 H_{0B} \alpha_g / g + W_1 H_{1B} (\alpha_r - \alpha_g) / g$$

$H_{0B}, H_{1B}$  は  $H_0, H_1$  と底板動液圧により同様のフォームをとる。詳細は割愛。

$W_0, W_1, H_0, H_1, H_{0B}, H_{1B}$  については、解析結果を Table データないしグラフにまとめてある。



【補 8】 Housner 理論は、次のようにタンク全体を集中定数系で扱うものである<sup>(1)(2)</sup>。

- ・モデル/前提：非圧縮性流体収納の剛体矩形容器、液面変位微小、衝撃圧＋振動圧
- ・評価手順：① 衝撃圧とその作用点を求める→ $P_i$  式、 $H_0$  式
- ② 振動圧と作用点を求める→ $P_v$  式、 $H_1$  式
- ③ マスバネモデル化→衝撃力を固定マスで、振動力とその支持をマスバネで
- ④ モデル計算→加速度を入力しベースシャーと転倒モーメント計算

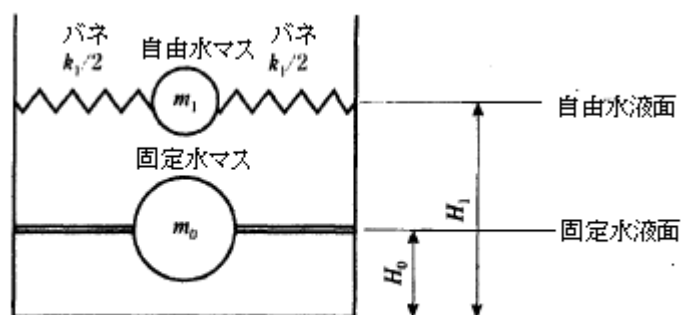
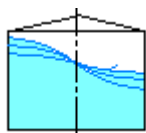


図 8.3-3 自由水と固定水によるばねマスモデル（文献(2)より引用）

【補 9】 スロッシング解析に際して、実際の地震波形を入力するのではなく、共振正弦波を 3 波入力するもの。即ち、スロッシング周期  $T_n = 2n\pi/\omega_1$  (但し  $\omega_1=1$  次固有角振動数)にて  $n=3$  とすることによって下図のように波を 3 周期分重ねるもの。実際の地震波形の入力より安全側になり、高圧ガス設備などで採用されている。



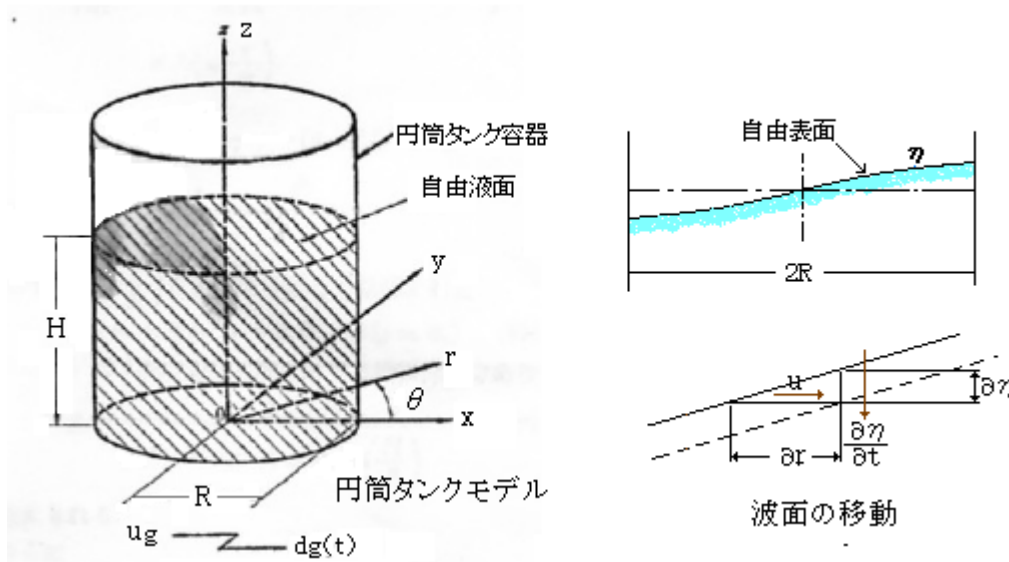
### 【 添付 A： 円筒タンクのスロッシングに関するポテンシャル理論解の導出 】

標記については文献(7)(8)等に詳しいが、決して Complete ではない。ここでは文献(8)を補足する形で円筒タンクに関するポテンシャル解の導出過程を示す(TS 作成者が補足した部分は茶色で表示した)。

#### (1) 仮定条件

下記の条件/モデルのもとで解析を行う。

- ・対象形状：底面で固定され、内容液が張られた状態の円筒タンク
- ・内容液：非圧縮性流で非粘性の流体(液体)、
- ・負荷条件：底面に速度が強制入力されて揺動。
- ・揺動状態：流体運動に渦の介在なし。液面動揺は小さく屋根には及ばない。



#### (2) 特性式及び境界条件

揺動時の流体運動は渦無しであるから速度ポテンシャル $\Phi$ が存在する。この場合、周知の円筒座標系のラプラス式(連続の式)が成立する。すなわち

$$\partial^2 \Phi / \partial r^2 + (1/r) (\partial \Phi / \partial r) + (1/r^2) (\partial^2 \Phi / \partial \theta^2) + \partial^2 \Phi / \partial z^2 = 0$$

境界条件をタンク側面/底面/液面にそれぞれ設定する。タンク側面については、“タンク外周( $r=R$ )においては外力による速度そのものの揺れ”が存在するので、

$$u = \partial \Phi / \partial r \big|_{r=R} = u_g$$

またタンク底面については、“タンク底面( $z=0$ )において垂直方向の揺れの拘束”が存在するので

$$w = \partial \Phi / \partial z \big|_{z=0} = 0$$

液面(自由液面)については、次の2つの境界条件式が成立する。

$$\textcircled{1} \text{ 運動力学的境界条件： } \partial \Phi / \partial z + (\partial \eta / \partial t) + (\partial \Phi / \partial x) (\partial \eta / \partial x) = 0$$

$$\textcircled{2} \text{ 動力学的境界条件： } \partial \Phi / \partial t + (1/2) \{ (\partial \Phi / \partial x)^2 + (\partial \Phi / \partial z)^2 \} + g \eta = 0$$



①は、垂直方向の液面速度が、流体要素の垂直速度 $(\partial \eta / \partial t)$ と半径方向の揺れからくる垂直移動成分 $[\mathbf{u} \mid_{z=\eta}]$ の和になるのを表わしたものである(モデル図参照)。

$$\begin{aligned} [\mathbf{w} \mid_{z=\eta}] &= -\{\partial \eta / \partial t + [\mathbf{u} \mid_{z=\eta}]_x (\partial \eta / \partial x)\} \\ \therefore \partial \Phi / \partial z + (\partial \eta / \partial t) + (\partial \Phi / \partial x) (\partial \eta / \partial x) &= 0 \end{aligned}$$

②はいわゆる一般化されたベルヌーイ定理による。即ち

$$\partial \Phi / \partial z + (1/2)(u^2 + v^2 + w^2) + V + \int dp / \rho = 0$$

ここで y 方向の速度変化を無しとして  $v = 0$ 、ポテンシャル  $V$  を位置エネルギーとして  $V = g \eta$ 、流体密度変化を無しとして  $\rho = 0$  とすれば

$$\partial \Phi / \partial z + (1/2)(u^2 + w^2) + g \eta + p / \rho = 0$$

速度成分  $u, w$  は  $u = \partial \Phi / \partial x$ 、 $w = \partial \Phi / \partial z$  である。また  $p$  は常圧(大気圧)として零とすれば、

$$\therefore \partial \Phi / \partial z + (1/2)\{(\partial \Phi / \partial x)^2 + (\partial \Phi / \partial z)^2\} + g \eta = 0$$

①の  $(\partial \eta / \partial t)$  に、②より得られる  $\eta$  を代入することで、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \partial \Phi / \partial t + g(\partial \Phi / \partial z) &= -(1/2)(\partial / \partial t)\{(\partial \Phi / \partial x)^2 + (\partial \Phi / \partial z)^2\} + g(\partial \Phi / \partial x)(\partial \eta / \partial x) \\ (\text{なお、} \eta &= -(1/g)[\partial \Phi / \partial t + (1/2)\{(\partial \Phi / \partial x)^2 + (\partial \Phi / \partial z)^2\}]) \end{aligned}$$

この式は、自由液面の波動(有限振幅波)を記述するものであるが、このまま扱えば解は得られない。通常は微小振幅を仮定して近似的に扱う。即ち  $\{ \}$  内の  $(\partial \Phi / \partial x)^2, (\partial \Phi / \partial z)^2$  は、 $(\eta / L)^2, (\eta / d)^2$  のオーダーで、微小波高を仮定する時  $\eta \ll L, \eta \ll d$  であるから殆ど無視できる(なお  $L$ =波長、 $d$ =タンク液位)。故に上式は、

$$\begin{aligned} \partial \Phi / \partial t + g(\partial \Phi / \partial z) &= g(\partial \Phi / \partial x)(\partial \eta / \partial x), \quad \eta = -(1/g)(\partial \Phi / \partial t) \\ \text{故に、} \partial \Phi / \partial t + g(\partial \Phi / \partial z) &= -(\partial / \partial t)(\partial \Phi / \partial x)(\partial \eta / \partial x)^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

なお、この式は自由液面の振動式とみてよいので、減衰項  $\mu (\partial \Phi / \partial t)$  を加えて、自由液面式は

$$\partial \Phi / \partial t + \mu (\partial \Phi / \partial t) + g(\partial \Phi / \partial z) = 0 \quad (\text{但し } \mu = \text{減衰常数})$$

以上をまとめると、

$$\partial^2 \Phi / \partial r^2 + (1/r)(\partial \Phi / \partial r) + (1/r^2)(\partial^2 \Phi / \partial \theta^2) + \partial^2 \Phi / \partial z^2 = 0 \quad \text{----- (A1)}$$

$$-\partial \Phi / \partial r \mid_{r=R} = u_g \cos \theta \quad \text{----- (A2)}$$

$$-\partial \Phi / \partial z \mid_{z=0} = 0 \quad \text{----- (A3)}$$

$$\partial^2 \Phi / \partial t^2 + \mu (\partial \Phi / \partial t) + g(\partial \Phi / \partial z) = 0 \quad (z = \eta) \quad \text{----- (A4)}$$

(A1)式を(A2)~(A4)の境界条件で解けば、速度ポテンシャル  $\Phi$  を得ることができる。

(3) 速度ポテンシャル  $\Phi$  のパラメータは  $r, z, t$  および  $\theta$  であるが、 $\theta$  は明らかに分離できるので次のように変数分離形を仮定する。

$$\Phi = \phi(r, z, t) \cos \theta$$

これを(A1)~(A4)式に代入して

$$\partial^2 \phi / \partial r^2 + (1/r)(\partial \phi / \partial r) - (1/r^2)\phi + \partial^2 \phi / \partial z^2 = 0 \quad \text{----- (A1')}$$

$$-\partial \phi / \partial r \mid_{r=R} = u_g \quad \text{----- (A2')}$$

$$-\partial \phi / \partial z \mid_{z=0} = 0 \quad \text{----- (A3')}$$

$$\partial^2 \phi / \partial t^2 + \mu (\partial \phi / \partial t) + g (\partial \phi / \partial z) = 0 \quad (z = \eta) \quad \text{-----} (A4')$$

$\cos \theta$  は排除される。更に、(b')式を積分して、

$$\phi = -ru_g + C$$

$r=R$  のとき、速度ポテンシャル  $\Phi=0$ 、即ち  $\phi=0$  であるから  $r=R$  のとき積分定数  $C=RU$  (ここで、 $U$  は  $r=R$ (外周)における応答速度を表わす)になる。故に

$$\phi = RU - ru_g = R\{U - (r/R)u_g\} \quad \text{-----} (A5)$$

この変数変換した  $\phi$  を(A1')~(A4')に用いると、

$$\partial^2 U / \partial r^2 + (1/r) (\partial U / \partial r) - (1/r^2) U + \partial^2 U / \partial z^2 = 0 \quad \text{-----} (A1'')$$

$$-\partial U / \partial r \big|_{r=R} = 0 \quad \text{-----} (A2'')$$

$$-\partial U / \partial z \big|_{z=0} = 0 \quad \text{-----} (A3'')$$

$$\partial^2 U / \partial t^2 + \mu (\partial U / \partial t) + g (\partial U / \partial z) = (r/R) (u_g'' + \mu u_g') \quad \text{-----} (A4'')$$

(4) 上記の(A1'')~(A4'')式において、モーダルアナリシスタイプの解を考え、応答速度  $U$  を

$$U(r, z, t) = \sum \phi_i u_i(t) \quad [i=1 \sim \infty] \quad \text{ここで } \phi_i = \text{規準関数、} u_i(t) = \text{規準速度} \quad \text{-----} (A6)$$

とすれば、(A1'')~(A3'')は次のようになる。

$$\partial^2 U / \partial r^2 + (1/r) (\partial U / \partial r) - (1/r^2) U + \partial^2 U / \partial z^2 = 0$$

$$\rightarrow \partial^2 \phi_i / \partial r^2 + (1/r) (\partial \phi_i / \partial r) - (1/r^2) \phi_i + \partial^2 \phi_i / \partial z^2 = 0 \quad \text{-----} (A7)$$

$$-\partial U / \partial r \big|_{r=R} = 0 \rightarrow -\partial \phi_i / \partial r \big|_{r=R} = 0 \quad \text{-----} (A8)$$

$$-\partial U / \partial z \big|_{z=0} = 0 \rightarrow -\partial \phi_i / \partial z \big|_{z=0} = 0 \quad \text{-----} (A9)$$

更に変数分離形の解を仮定して、 $\phi_i = \phi_i(r) \phi_i(z)$  とすれば、

$$\phi_i(z) \{ \partial^2 \phi_i(r) / \partial r^2 \} + \phi_i(z) (1/r) \{ \partial \phi_i(r) / \partial r \} - (1/r^2) \phi_i(r) \phi_i(z) + \partial^2 \phi_i(z) / \partial z^2 = 0$$

ここで、 $\partial^2 \phi_i(z) / \partial z^2 = \beta^2 \phi_i(z)$  とすれば、

$$\partial^2 \phi_i(r) / \partial r^2 + (1/r) \{ \partial \phi_i(r) / \partial r \} + (\beta^2 - 1/r^2) \phi_i(r) = 0 \quad \text{-----} (A10)$$

これは、 $\nu=1$  のベッセル方程式である。

境界条件式は  $z=0$  のとき、 $\partial \phi_i(z) / \partial z = 0$  であるから、 $\partial \phi_i(z) / \partial z = \beta^2 z$  になることが予想される。これを微分すると、 $\partial^2 \phi_i(z) / \partial z^2 = \beta^2$  になる。仮定式  $[\partial^2 \phi_i(z) / \partial z^2 = \beta^2 \phi_i(z)]$  と境界式  $[\partial^2 \phi_i(z) / \partial z^2 = \beta^2]$  を等値すれば、 $z=0$  で  $\phi_i(z)=1$  になる。仮定式  $[\partial^2 \phi_i(z) / \partial z^2 = \beta^2 \phi_i(z)]$  から解  $\phi_i(z)$  を求める。

$$[\partial^2 \phi_i(z) / \partial z^2 - \beta^2 \phi_i(z)] = [\partial^2 / \partial z^2 - \beta^2] \phi_i(z) = (D^2 - \beta^2) \phi_i(z) = 0 \rightarrow D = \pm \beta$$

$$\therefore \phi_i(z) = C_1 e^{\beta z} + C_2 e^{-\beta z} \rightarrow \partial \phi_i(z) / \partial z = C_1 e^{\beta z} - C_2 e^{-\beta z}$$

$z=0$  のとき  $\partial \phi_i(z) / \partial z = 0$  であるから  $(C_1 - C_2) \beta = 0 \rightarrow C_1 = C_2 = C$ 。従って、

$$\phi_i(z) = C(e^{\beta z} + e^{-\beta z}) = 2C \{ (e^{\beta z} + e^{-\beta z}) / 2 \} = 2 \cosh(\beta z)$$

$z=0$  のとき、 $\phi_i(z)=1$  であるから  $2C=1$  なので、 $\phi_i(z) = \cosh(\beta z)$  が得られる。

次に(A10)のベッセル方程式  $\partial^2 \phi_i(r) / \partial r^2 + (1/r) \{ \partial \phi_i(r) / \partial r \} + (\beta^2 - 1/r^2) \phi_i(r) = 0$  の解は

$$\phi_i(r) = J_1(\beta r, c) = J_1(\beta r) + c Y_1(\beta r) = J_1(\beta r) \leftarrow c=0 \text{ とする。}$$

$$\therefore \{ \partial \phi_i(r) / \partial r \} = J'(\beta r)$$

$r=R$  のとき、 $\{ \partial \phi_i(r) / \partial r \} = J'(\beta R) = 0 \rightarrow \beta R = \varepsilon_i$  とすれば  $J'(\varepsilon_i) = 0$  (ここで  $\varepsilon_i$  は  $i$  番目の解)

$\beta = \varepsilon_i/R$  であるから  $\phi_i(\mathbf{r}) = J_1[\varepsilon_i(\mathbf{r}/R)]$  が得られる。また  $\phi_i(\mathbf{z}) = \cosh[\varepsilon_i(\mathbf{z}/R)]$  になる。従って、

$$\phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \phi_i(\mathbf{r}) \phi_i(\mathbf{z}) = J_1[\varepsilon_i(\mathbf{r}/R)] \cosh[\varepsilon_i(\mathbf{z}/R)] \quad \text{----- (A11)}$$

(5) さて、液面の境界式の(A4)式に、 $U(\mathbf{r}, \mathbf{z}, t) = \sum \phi_i u_i(t)$  を代入して、

$$\sum [\phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \partial^2 u_i(t) / \partial t^2 + \mu \phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{z}) (\partial u_i(t) / \partial t) + g u_i(t) \partial \phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{z}) / \partial z] = (r/R)(u_g'' + \mu u_g')$$

上記の結果では、 $\phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = J_1\{\varepsilon_i(\mathbf{r}/R)\} \cosh\{\varepsilon_i(\mathbf{z}/R)\}$  であるから、

$$\sum J_1\{\varepsilon_i(\mathbf{r}/R)\} \cosh\{\varepsilon_i(\mathbf{z}/R)\} (u_i'' + \mu u_i') + g u_i J_1\{\varepsilon_i(\mathbf{r}/R)\} \partial \cosh\{\varepsilon_i(\mathbf{z}/R)\} / \partial z = (r/R)(u_g'' + \mu u_g')$$

ここで  $\partial \cosh\{\varepsilon_i(\mathbf{z}/R)\} / \partial z = (\varepsilon_i/R) \sinh\{\varepsilon_i(\mathbf{z}/R)\}$  であるから、

$$\begin{aligned} & \downarrow \sum J_1\{\varepsilon_i(\mathbf{r}/R)\} \cosh\{\varepsilon_i(\mathbf{z}/R)\} [u_i'' + \mu u_i' + g(\varepsilon_i/R) \tanh\{\varepsilon_i(\mathbf{z}/R)\} u_i] = (r/R)(u_g'' + \mu u_g') \\ & \downarrow [u_i'' + \mu u_i' + g(\varepsilon_i/R) \tanh\{\varepsilon_i(\mathbf{z}/R)\} u_i] = \sum [(r/R)(u_g'' + \mu u_g') / [J_1\{\varepsilon_i(\mathbf{r}/R)\} \cosh\{\varepsilon_i(\mathbf{z}/R)\}]] \end{aligned}$$

この式は液面の運動を表わすもので、右辺を零とおけば自由運動を表わす式になる。

$$u_i'' + \mu u_i' + g(\varepsilon_i/R) \tanh\{\varepsilon_i(\mathbf{z}/R)\} u_i = 0 \quad \text{----- (A12)}$$

積分すれば、 $\dot{x}_i'' + \mu \dot{x}_i' + g(\varepsilon_i/R) \tanh\{\varepsilon_i(\mathbf{z}/R)\} x_i = 0$  となり、単位質量系の運動方程式になる。

この場合、1自由度系の振動 $[x_i'' + \mu \dot{x}_i' + k x_i = 0]$ では、周知のように

$$\text{バネ定数 } k = \omega_i^2, \text{ 減衰定数 } \mu = 2\omega_i \zeta_i \quad (\text{ここで } \omega_i = i \text{ 次固有振動数、} \zeta_i = i \text{ 次の減衰比})$$

であるから、

$$x_i'' + 2\zeta_i \omega_i \dot{x}_i' + \omega_i^2 x_i = 0$$

$$\text{ここで、} \omega_i^2 = g(\varepsilon_i/R) \tanh\{\varepsilon_i(\mathbf{z}/R)\}, \quad \zeta_i = \mu / (2\omega_i)$$

従って、液面の運動方程式は、

$$[u_i'' + 2\zeta_i \omega_i \dot{u}_i' + \omega_i^2 u_i] = \sum [(r/R)(u_g'' + 2\zeta_i \omega_i \dot{u}_g') / [J_1\{\varepsilon_i(\mathbf{r}/R)\} \cosh\{\varepsilon_i(\mathbf{z}/R)\}]]$$

ここで、Fourier-Bessel 展開すれば、

$$r = \sum [2R / \{(\varepsilon_i^2 - 1) J_1(\varepsilon_i)\}] J_1\{\varepsilon_i(\mathbf{z}/R)\} \quad (i = 1 \sim \infty)$$

これを液面の運動方程式の左辺 $(r/R)$ に代入して(また  $z = H$  とおいて)、

$$[u_i'' + 2\zeta_i \omega_i \dot{u}_i' + \omega_i^2 u_i] = \alpha_i (u_g'' + 2\zeta_i \omega_i \dot{u}_g') \quad \text{----- (A13)}$$

$$\text{ここで } \alpha_i = 2 / [(\varepsilon_i^2 - 1) J_1(\varepsilon_i) \cosh\{\varepsilon_i(H/R)\}] \quad \text{----- (A14)}$$

因みに右辺は励振量、左辺は応答量であるから、 $\alpha_i$  は励振係数(あるいは応答倍率)ということになる。更に  $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i / \alpha_i$  とおけば、液面の運動方程式は、結局、以下ようになる。

$$\mathbf{v}_i'' + 2\zeta_i \omega_i \dot{\mathbf{v}}_i' + \omega_i^2 \mathbf{v}_i = \mathbf{u}_g'' + 2\zeta_i \omega_i \dot{\mathbf{u}}_g' \quad \text{----- (A15)}$$

(6) 上記の運動方程式の解をラプラス変換によって求める。ここで(m)式の右辺を  $\mathbf{g}(t)$  で表わす。

$$\mathbf{v}_i'' + 2\zeta_i \omega_i \dot{\mathbf{v}}_i' + \omega_i^2 \mathbf{v}_i = \mathbf{g}(t)$$

$\mathbf{V}_i = \mathbf{f}(t)$  とおいて、

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_i'') = s^2 \mathbf{F}(s) - s \mathbf{f}(0) - \mathbf{f}'(0), \quad \mathcal{L}(\mathbf{v}_i') = s \mathbf{F}(s) - \mathbf{f}(0), \quad \mathcal{L}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{F}(s), \quad \mathcal{L}(\mathbf{g}(t)) = \mathbf{G}(s)$$

方程式の両辺をラプラス変換すれば、

$$\mathbf{F}(s)(s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2) = s \mathbf{f}(0) + \mathbf{f}'(0) + 2\zeta_i \omega_i \mathbf{f}(0) + \mathcal{L}(\mathbf{g}(t))$$

$\mathbf{f}(0) = \mathbf{v}_i(0) = 0, \quad \mathbf{f}'(0) = \mathbf{v}_i'(0) = 0$  であるから

$$\mathbf{F}(s)(s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2) = \mathbf{G}(s) \rightarrow \mathbf{F}(s) = \mathbf{G}(s) / (s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2) = \mathbf{H}(s) \mathbf{G}(s)$$

$H(s)$ の逆変換は、 $\int^{-1}(H(s))=[1/\{\omega_i(1-\zeta_i^2)^{0.5}\}]e^{-kt}\sin\{\omega_i(1-\zeta_i^2)^{0.5}t\}=h(t)$  (但し  $kt=\zeta_i\omega_it$ )  
 $h(t)$ は、衝撃応答の場合の応答関数に該当する(本ケースは通常の応答)。

畳み込みによる  $F(s)$ の逆変換を行えば、

$$v_i=f(t)=\int^{-1}[H(s)G(s)]=g \cdot h=\int g(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

[  $g(\tau)h(t-\tau)$ は時刻  $\tau$  の時に生じた強さ  $g(\tau)d\tau$  によって、時刻  $t$  に生じる応答値を示す。]

従って、 $v_i=\int [(u_g''+2\zeta_i\omega_iu_g')/\{\omega_i(1-\zeta_i^2)^{0.5}\}]e^{-k(t-\tau)}\sin\{\omega_i(1-\zeta_i^2)^{0.5}(t-\tau)\}d\tau$

$q_i=\omega_i(1-\zeta_i^2)^{0.5}$  とすれば、

$$v_i=\int [(u_g''+2\zeta_i\omega_iu_g')/q_i]e^{-k(t-\tau)}\sin\{\omega_i(1-\zeta_i^2)^{0.5}(t-\tau)\}d\tau \quad \text{-----}(A16)$$

(7) (A6)式の液体の応答速度  $U(r,z,t)=\sum \phi_i u_i(t)$ は  $v_i=u_i/\alpha_i$ の関係から  $U(r,z,t)=\sum \alpha_i \phi_i v_i(t)$ になるが、これを(A5)式の  $\phi=R\{U-(r/R)u_g\}$ に代入すると  $\phi=R\{\sum \alpha_i \phi_i v_i-(r/R)u_g\}$ になる。これに(A14)式の  $\alpha_i$ 、(A11)式の  $\phi_i$ を代入すると、速度ポテンシャル  $\Phi$ は、

$$\Phi=R\{\sum \{2/(\epsilon_i^2-1)\}\{J_1(\epsilon_i r/R)/J_1(\epsilon_i)\}\{\cosh(\epsilon_i z/R)/\cosh(\epsilon_i H/R)\}v_i-(r/R)u_g\}\cos\theta \quad \text{-----}(A17)$$

ここで液深さは、 $\eta_r=(1/g)(\partial\Phi/\partial t)$  [at  $z=H$ ] である。これに上記の  $\Phi$ を用いて、

$$\eta_r=(R/g)[\sum \{2/(\epsilon_i^2-1)\}\{J_1(\epsilon_i r/R)/J_1(\epsilon_i)\}v_i'-(r/R)u_g']\cos\theta$$

$v_i$ は(A16)式で与えられるが、減衰率  $\zeta_i$ を無視し、地震動による速度  $u_g=-d\omega\cos\omega t$ (ここで  $d$ =変位)とすれば、結果的に(7)、

$$\begin{aligned} v_i' &= -(d\omega^2/\omega_i^2)(\omega^2\sin\omega_i t - \omega\omega_i\sin\omega t)/\{1-(\omega/\omega_i)^2\} \\ &= d\omega^2(\omega/\omega_i)\{(\omega/\omega_i)\sin\omega_i t - \sin\omega t\}/\{(1+\omega/\omega_i)(1-\omega/\omega_i)\} \\ &= -d\omega^2(\omega/\omega_i)\{1/(1+\omega/\omega_i)\}(\omega\sin\omega_i t - \omega_i\sin\omega t)/(\omega_i - \omega) \end{aligned}$$

ここで  $\sin\omega t$ をテイラー展開して  $\sin\omega t=\sin\omega_i t+t(\omega-\omega_i)\cos\omega_i t$  (2次項以上は微小につき無視)であるから、

$$v_i' = d\omega^2(\omega/\omega_i)(-\omega_i t \cdot \cos\omega_i t + \sin\omega_i t)/\{1+(\omega/\omega_i)\}$$

従って、

$$\begin{aligned} \eta_r &= (R/g)[\sum \{2/(\epsilon_i^2-1)\}\{J_1(\epsilon_i r/R)/J_1(\epsilon_i)\}(\omega/\omega_i)(-\omega_i t \cdot \cos\omega_i t + \sin\omega_i t)/\{1+(\omega/\omega_i)\} \\ &\quad - (r/R)\sin\omega t]\cos\theta \end{aligned}$$

正弦波  $n$  サイクルを受けた時の共振応答( $n$ 波共振)では、 $t=2n\pi/\omega_i$ 及び  $\omega=\omega_i$ になるが、応答値としては  $i=2$ 以降は無視できるので  $t=2n\pi/\omega_1$ 及び  $\omega=\omega_1$ とすれば

$$\eta_r=(R/g)\{2/(\epsilon_1^2-1)\}\{J_1(\epsilon_1 r/R)/J_1(\epsilon_1)\}(n\pi d\omega_1^2)\cos\theta \quad \text{-----}(A18)$$

$r=R$ のとき、 $\eta_r$ は最大値  $\eta_{\max}$ になる。

$$\eta_{\max}=(R/g)\{2/(\epsilon_1^2-1)\}(n\pi d\omega_1^2)\cos\theta \quad \text{-----}(A19)$$

また、側板に作用する動液圧  $P_s$ および底板に作用する動液圧  $P_b$ は、

$$P_s=\rho(\partial\Phi/\partial t) \text{ [at } r=R], P_b=\rho(\partial\Phi/\partial t) \text{ [at } z=0]$$

から得られる。上記と同様に(A17)式の  $\Phi$ を用いて、 $P_s, P_b$ を求めると、以下のようなになる。



$$P_s = \rho R \{2/(\varepsilon_i^2 - 1)\} \{ \cosh(\varepsilon_i z/R) / \cosh(\varepsilon_i H/R) \} (n \pi d \omega_i^2) \cos \theta \quad \text{----- (A20)}$$

$$P_b = \rho R \{2/(\varepsilon_i^2 - 1)\} [J_1(\varepsilon_i r/R) / \{J_1(\varepsilon_i) \cdot \cosh(\varepsilon_i H/R)\}] (n \pi d \omega_i^2) \cos \theta \quad \text{----- (A21)}$$

なお、(A19)式を用いれば、

$$P_s = \rho g \eta_{\max} \{ \cosh(\varepsilon_i z/R) / \cosh(\varepsilon_i H/R) \} \quad \text{----- (A22)}$$

$$P_b = \rho g \eta_{\max} [J_1(\varepsilon_i r/R) / \{J_1(\varepsilon_i) \cdot \cosh(\varepsilon_i H/R)\}] \quad \text{----- (A23)}$$

[ 添付 B : 各種断面形状の容器の流体固有振動数と振動モード—テキスト(2) 抜粋 ]

表 8.3-1 各種断面形状容器の固有振動数と振動モード<sup>9)</sup>

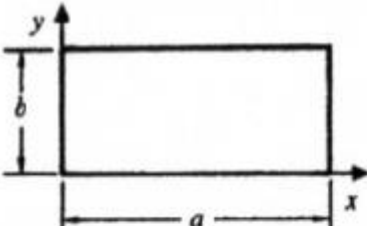
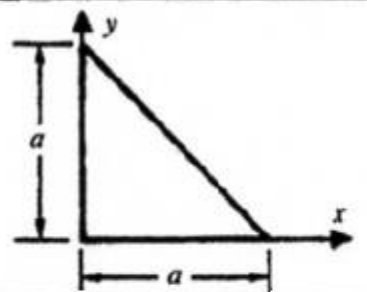
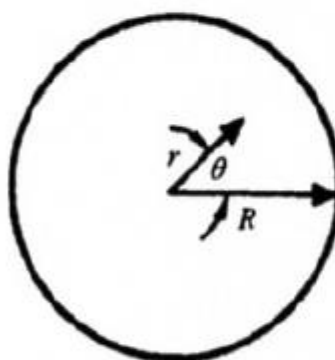
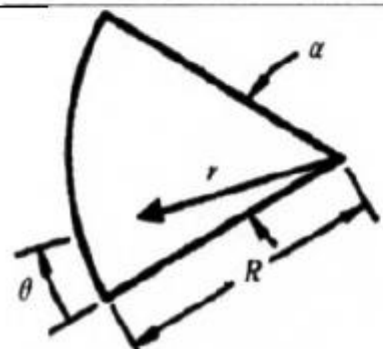
形状 (水平断面)	固有振動数	振動モード																																	
	$f_{ij} = \frac{g^{1/2}}{2\pi^{1/2}} \left[ \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^{1/2} \tanh \pi h \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^{1/2} \right]^{1/2}$ $\frac{1}{10} < \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^{1/2} < 1 \quad i, j = \text{次数 } 1, 2, 3, \dots$	$\eta_{ij} = \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b}$ <p><math>\eta</math> = 無次元深さ</p>																																	
	$f_{ij} = \frac{g^{1/2}}{2\pi^{1/2}a} \left[ (i^2 + j^2)^{1/2} \tanh \frac{\pi h}{a} (i^2 + j^2)^{1/2} \right]^{1/2}$ $\frac{1}{10} < (i^2 + j^2)^{1/2} < 1 \quad i \neq j$ <p><math>i, j = \text{次数 } 1, 2, 3, \dots</math></p>	$\eta_{ij} = \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{a}$ $\pm \cos \frac{j\pi x}{a} \cos \frac{i\pi y}{a}$ <p>— ... <math>i + j</math> が偶数 + ... <math>i + j</math> が奇数</p>																																	
	$f_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\lambda_{ij} g \tanh \frac{\lambda_{ij} h}{R}}{R} \right)^{1/2} \quad \frac{\pi}{10} < \frac{h}{R} < \pi$ <p>ここで、<math>J_1'(\lambda_{ij}) = 0</math> である。</p> <table border="1" data-bbox="644 1375 1131 1644"> <thead> <tr> <th rowspan="3">j</th><th colspan="4"><math>\lambda_{ij}</math></th></tr> <tr> <th colspan="4">i</th></tr> <tr> <th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td><td>0</td><td>1.8412</td><td>3.0542</td><td>4.2012</td></tr> <tr> <td>1</td><td>3.8317</td><td>5.3314</td><td>6.7061</td><td>8.0152</td></tr> <tr> <td>2</td><td>7.0156</td><td>8.5363</td><td>9.9695</td><td>11.3459</td></tr> <tr> <td>3</td><td>10.173</td><td>11.7060</td><td>13.1704</td><td>14.5859</td></tr> </tbody> </table>	j	$\lambda_{ij}$				i				0	1	2	3	0	0	1.8412	3.0542	4.2012	1	3.8317	5.3314	6.7061	8.0152	2	7.0156	8.5363	9.9695	11.3459	3	10.173	11.7060	13.1704	14.5859	$\eta_{ij} = J_i \left( \lambda_{ij} \frac{r}{R} \right) \left\{ \begin{array}{l} \sin i\theta \\ \text{or} \\ \cos i\theta \end{array} \right\}$
j	$\lambda_{ij}$																																		
	i																																		
	0	1	2	3																															
0	0	1.8412	3.0542	4.2012																															
1	3.8317	5.3314	6.7061	8.0152																															
2	7.0156	8.5363	9.9695	11.3459																															
3	10.173	11.7060	13.1704	14.5859																															
	<p>円形タンクと同様の式。</p> <p>ただし、<math>i = \frac{180n}{\alpha}</math> <math>n = 1, 2, 3, 4, \dots</math></p> <p><math>0 \leq \alpha \leq 360</math>, <math>i</math> が整数でないときは補間</p>	$\eta_{ij} = J_i \left( \lambda_{ij} \frac{r}{R} \right) \cos i\theta$																																	

表 8.3-1 つづき

	$f_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\lambda_{ij} g}{R_1} \tanh \frac{\lambda_{ij} h}{R_1} \right)^{1/2} \quad \frac{\pi}{10} < \frac{h}{R_1} < \pi$ <p>ここで、</p> <table border="1"> <tr> <th rowspan="2"><math>\frac{R_2}{R_1}</math></th> <th rowspan="2"><math>j</math></th> <th colspan="4"><math>\lambda_{ij}</math></th> </tr> <tr> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> </tr> <tr> <td rowspan="2">0.3</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>1.5821</td> <td>2.9685</td> <td>4.1801</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>4.7058</td> <td>5.1374</td> <td>6.2738</td> <td>7.7213</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">0.5</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>1.3547</td> <td>2.6812</td> <td>3.9577</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>6.3932</td> <td>6.5649</td> <td>7.0626</td> <td>7.8401</td> </tr> </table>	$\frac{R_2}{R_1}$	$j$	$\lambda_{ij}$				0	1	2	3	0.3	0	0	1.5821	2.9685	4.1801	1	4.7058	5.1374	6.2738	7.7213	0.5	0	0	1.3547	2.6812	3.9577	1	6.3932	6.5649	7.0626	7.8401	$\eta_{ij} = G_{ij}(r) \begin{cases} \sin i\theta \\ \text{or} \\ \cos i\theta \end{cases}$ $G_{ij}(r) = Y_i'(\lambda_{ij}) J_i \left( \lambda_{ij} \frac{r}{R_1} \right) - J_i'(\lambda_{ij}) Y_i \left( \lambda_{ij} \frac{r}{R_1} \right)$
$\frac{R_2}{R_1}$	$j$			$\lambda_{ij}$																														
		0	1	2	3																													
0.3	0	0	1.5821	2.9685	4.1801																													
	1	4.7058	5.1374	6.2738	7.7213																													
0.5	0	0	1.3547	2.6812	3.9577																													
	1	6.3932	6.5649	7.0626	7.8401																													
	<p>二重円形タンクと同様の式。 ただし、<math>i = \frac{180n}{\alpha}</math> <math>0 \leq \alpha \leq 360</math>、<math>i</math>が整数でないときは補間</p>	$\eta_{ij} = G_{ij}(r) \cos i\theta$																																
	$f = \frac{(gh)^{1/2}}{2\pi a} \left[ \frac{18 + 6(b/a)^2}{5 + 2(b/a)^2} \right]^{1/2}$ <p><math>\frac{h}{a} &lt; 0.1</math> (浅い場合)</p>	$\eta = Ax$ <p>A: 定数</p>																																
	$f = \begin{cases} \frac{(gh)^{1/2}}{2L} & \frac{h}{L} < \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{g}{\pi L} \right)^{1/2} & \frac{h}{L} > 1 \end{cases}^{1/2}$	<p>Lは、代表的な最大横幅</p>																																

記号:  $J_1$ =1次の第一種ベッセル関数、 $Y_1$ =1次の第二種ベッセル関数、 $h$ =液深さ、 $i, j$ =次数 1, 2, 3, ...  
 本表のオリジナル→Blevins "Formulas for natural frequency and mode shape"  
 (Van nostrand reinhold company (1979))

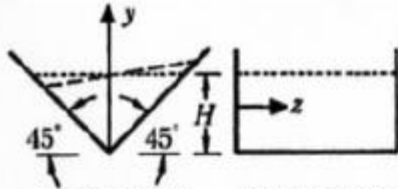
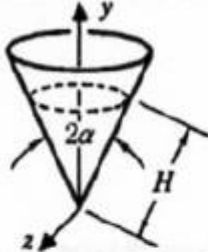
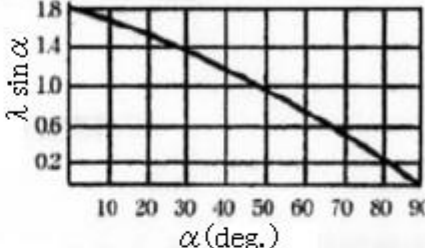
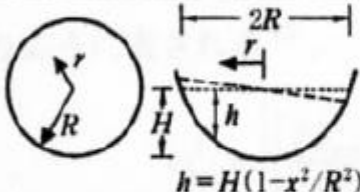
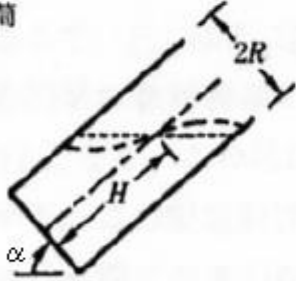
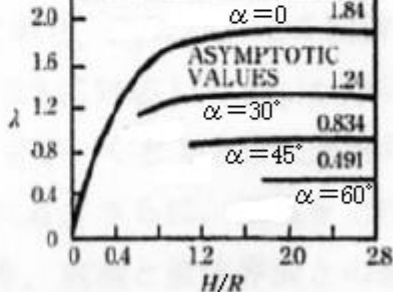
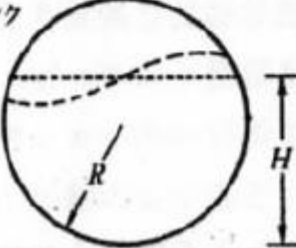
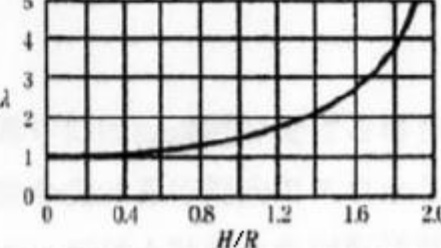
表 8.3-2 スロッシングの固有振動数の容器の深さ方向形状の影響<sup>9)</sup>

(深さ方向に水平断面が変化する場合)

原典: D.B. Blevins のテキスト

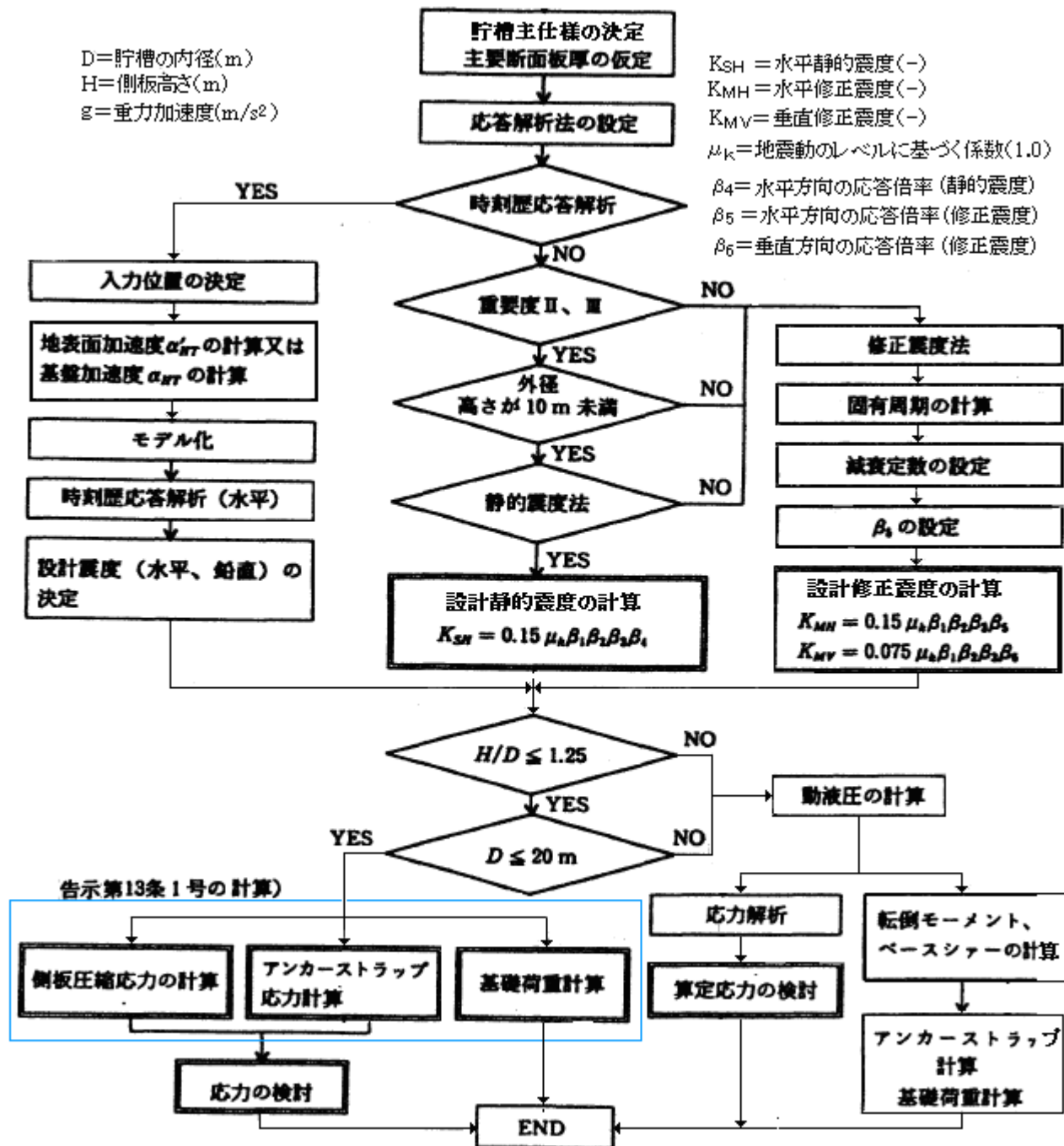
形状	固有振動数																																																
<div><p>横置き円筒タンク</p><p>END VIEW      SIDE VIEW</p></div>	<div><math display="block">f_i = \frac{\lambda_i^{1/2}}{2\pi} \left( \frac{g}{R} \right)^{1/2}</math><table><tr><th>H/R</th><th><math>\lambda_1</math></th><th><math>\lambda_2</math></th><th><math>\lambda_3</math></th></tr><tr><td>-1.0</td><td>1.0</td><td>6.0</td><td>15.0</td></tr><tr><td>-0.8</td><td>1.045</td><td>5.38</td><td>10.85</td></tr><tr><td>-0.6</td><td>1.099</td><td>4.97</td><td>9.13</td></tr><tr><td>-0.4</td><td>1.165</td><td>4.74</td><td>8.33</td></tr><tr><td>-0.2</td><td>1.249</td><td>4.65</td><td>7.99</td></tr><tr><td>0.0</td><td>1.360</td><td>4.70</td><td>7.96</td></tr><tr><td>0.2</td><td>1.513</td><td>4.91</td><td>8.23</td></tr><tr><td>0.4</td><td>1.742</td><td>5.34</td><td>8.89</td></tr><tr><td>0.6</td><td>2.13</td><td>6.22</td><td>10.28</td></tr><tr><td>0.8</td><td>3.04</td><td>8.42</td><td>13.84</td></tr><tr><td>1.0</td><td><math>\infty</math></td><td><math>\infty</math></td><td><math>\infty</math></td></tr></table></div>	H/R	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	-1.0	1.0	6.0	15.0	-0.8	1.045	5.38	10.85	-0.6	1.099	4.97	9.13	-0.4	1.165	4.74	8.33	-0.2	1.249	4.65	7.99	0.0	1.360	4.70	7.96	0.2	1.513	4.91	8.23	0.4	1.742	5.34	8.89	0.6	2.13	6.22	10.28	0.8	3.04	8.42	13.84	1.0	$\infty$	$\infty$	$\infty$
H/R	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$																																														
-1.0	1.0	6.0	15.0																																														
-0.8	1.045	5.38	10.85																																														
-0.6	1.099	4.97	9.13																																														
-0.4	1.165	4.74	8.33																																														
-0.2	1.249	4.65	7.99																																														
0.0	1.360	4.70	7.96																																														
0.2	1.513	4.91	8.23																																														
0.4	1.742	5.34	8.89																																														
0.6	2.13	6.22	10.28																																														
0.8	3.04	8.42	13.84																																														
1.0	$\infty$	$\infty$	$\infty$																																														

表 8.3-2 の続き

 <p>END VIEW      SIDE VIEW</p>	$f_i = \frac{\lambda_i^{1/2}}{2\pi} \left( \frac{g}{R} \right)^{1/2}$ $\lambda_1 = 1.0$ $\lambda_2 = 2.324$ $\lambda_3 = 3.9266$ $\lambda_i = \alpha \tanh \alpha, \quad i > 1$ <p>where <math>\cos 2\alpha \cosh 2\alpha = 1</math>.</p>
	$f = \frac{\lambda^{1/2}}{2\pi} \left( \frac{g}{R} \right)^{1/2}$ 
 <p>PLAN VIEW      SIDE VIEW</p> <p><math>h = H(1 - x^2/R^2)</math></p>	$f_i = \lambda_{ij}^{1/2} \frac{(gH)^{1/2}}{R}$ $\lambda_{ij} = i(4j-2) + 4j(j-1)$ <p><math>i = 0, 1, 2 \dots</math> number of nodal diameters  <math>j = 0, 1, 2 \dots</math> number of nodal circles</p>
<p>傾斜円筒</p> 	$f = \frac{\lambda^{1/2}}{2\pi} \left( \frac{g}{R} \right)^{1/2}$ 
<p>球形タンク</p> 	$f = \frac{\lambda^{1/2}}{2\pi} \left( \frac{g}{R} \right)^{1/2}$ 

【 添付 C-1. 図 2.6 平底円筒形貯槽の第一設計地震動に基づく耐震設計手順 】

高压ガス設備等耐震設計指針より抜粋



$$\sigma_c = -P_0 D / (4t) + (1 + K_{MV}) (W_s' + W_t) / (\pi D t) + 4M_1 / (\pi D^2 t)$$

$$M_1 = K(1 - h/H_1)^2 (W_s H_s + W_t H_t + W_1 H_1)$$

ここで  $\sigma_c$  = 側板の座屈検討圧縮応力(N/mm<sup>2</sup>)、 $P_0$  = 通常運転時の最低圧力(Mpa)、 $D$  = タンク内径(mm)、  
 $t$  = 側板の板厚(mm)、 $W_s'$  = 応力を求める位置に作用する側板部の重量(N)、 $W_t$  = 屋根板部の全重量(N)  
 $M_1$  = 応力を求める位置に生じる転倒モーメント(N・mm)、 $h$  = 応力を求める位置の高さ(m)、 $H_1$  = 最高液面高さ(m)、  
 $W_s$  = 側板部の全重量(N)、 $W_1$  = 内容液の有効重量(N)、 $H_s$  = 側板部の重心高さ(m)、 $K = K_{MH}$   
 $H_1$  = 有効重量を考慮した内容液の重心位置までの高さ(m) [=  $h_1 H_1$ ]、 $h_1$  = 係数[グラフより]、  
 $W_1$  = 内容液の有効重量(N) [=  $f_1 W_1$ ]、 $f_1$  = 係数[グラフより]、 $W_1$  = 内容液の重量(N)

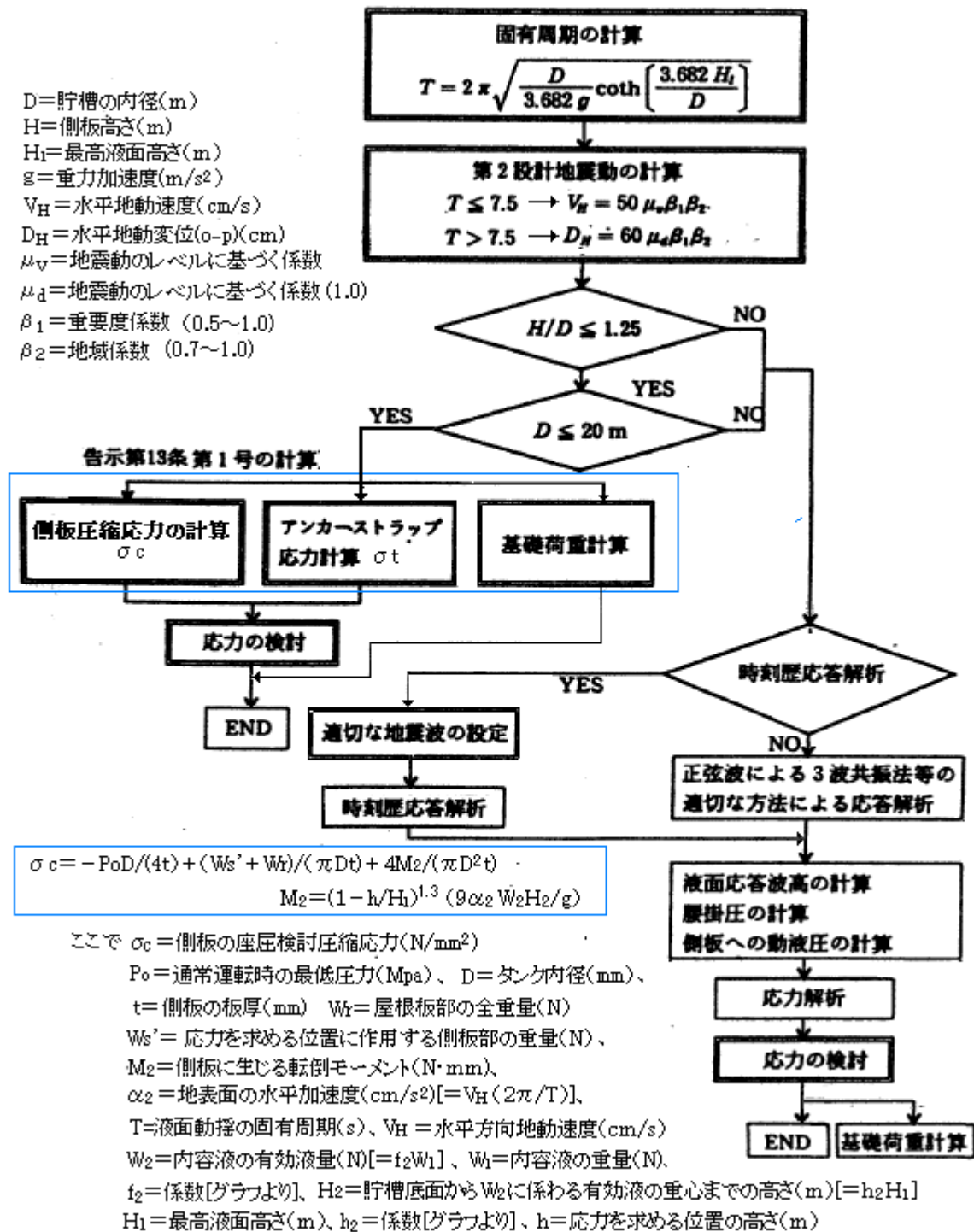
$$\sigma_t = [1/(NA)] \{ \pi D^2 P_0 / 4 - (1 - K_v) (W_s + W_t) + 4M_1 / D \}$$

ここで  $\sigma_t$  = アンカーストラップに生じる引張応力(N/mm<sup>2</sup>)、 $K_{MV}$  = 設計修正震度、 $N$  = アンカーストラップの本数(-)、  
 $A$  = アンカーストラップの断面積(mm<sup>2</sup>)、 $P_0$  = 通常運転時の常用応力(N/mm<sup>2</sup>)、  
 $M_1$  = 最下段の側板の転倒モーメント(N・mm)、 $W_s$  = 側板部の全重量(N)、 $D, W_t$  = 同上



【 添付 C-2. 図 2.7 平底円筒形貯槽の第 2 設計地震動に基づく耐震設計手順 】

高圧ガス設備等耐震設計指針より抜粋



$$\sigma_t = \{1/(NA)\} \{ \pi D^2 P_0 / 4 - (W_s + W_f) + 4M_2/D \}$$

ここで  $\sigma_t$  = アンカーストラップに生じる引張応力 (N/mm<sup>2</sup>)、

N=アンカーストラップの本数(-)、A=アンカーストラップの断面積(mm<sup>2</sup>)

$P_0$ =通常運転時の常用応力(N/mm<sup>2</sup>)、 $M_2$ =最下段の側板の転倒モーメント(N・mm)

$$W_s = \text{側板部の全重量(N)}, \quad D, W_r = \text{同上}$$

## 引用文献・テキスト)

- (1) JSME「シェルの振動と座屈 ハンドブック」第 18 章及び第 19 章
- (2) JSME「流体関連振動(第 2 版)」8.3 (技報堂出版)
- (3) 柴田「化学プラントの耐震設計」(丸善)
- (4) 高圧ガス保安協会「KHK E012-1-1997 高圧ガス設備等耐震設計指針」
- (5) JIS B8501 「鋼製石油貯槽の構造(全溶接製)」
- (6) 「固定屋根を有する円筒液体タンクの耐震設計」浅井、内籐、越智ら(圧力技術 17 巻 3 号/4 号)
- (7) 「地震時の円筒タンクに作用するスロッシング流体力の簡略計算法」小林 (配管技術 '81.4)
- (8) 「円筒液体貯槽の液面動揺の応答第 1 報・基礎式と正弦波解」曾我部、柴田(生産研究 26 巻 3 号)
- (9) 「タンクの内容液のスロッシングについて」(株)プラント耐震設計システムズ池田氏(IT 情報)