【整番】FE-23-TM-015	【標題】運動量の式によるオリフィス圧損式の導出	
分類：流れ(オリフィス)／種別：技術メモ	作成年月：H18.10／改訂：Ver0.0（H18.11）	作成者：N.Miyamoto

全３枚

0.　オリフィスの圧損式は、一次元流れの運動方程式(ベルヌーイの式)からも、運動量の式からも導くことができる。例えば、[FE-23-TM-012 Benedict のオリフィス/ノズル/ベンチュリ圧損計算]は、ベルヌーイの式を用いている。ここでは Benedict のテキスト(1)を参考に、運動量の式を用いて非圧縮性流れ用オリフィスの圧損式を導いてみる。

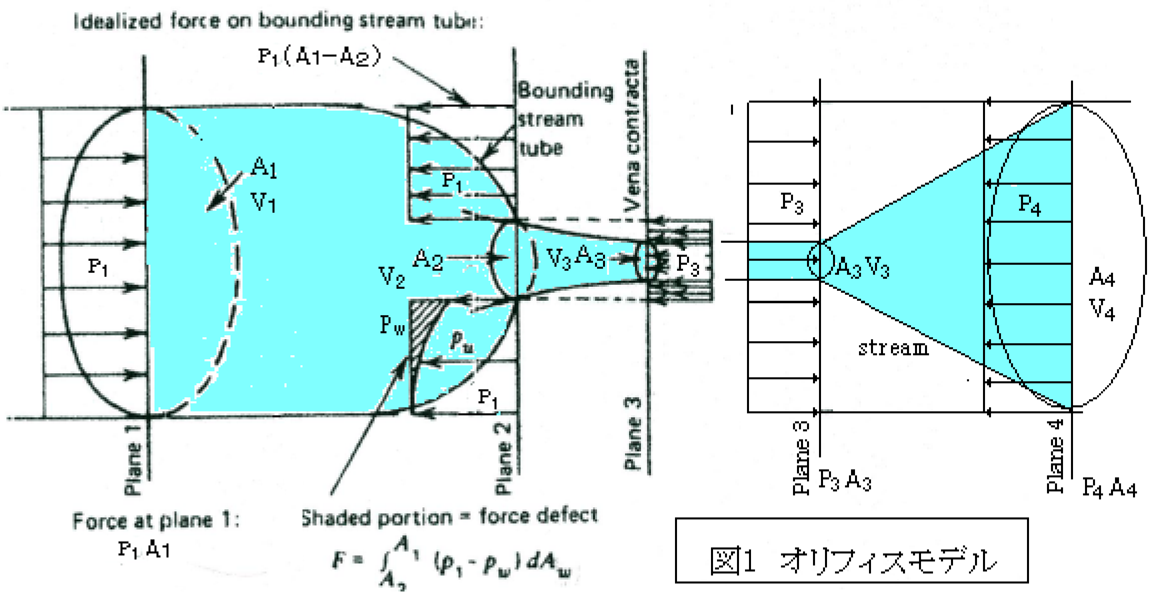

図1　オリフィスモデル

1. オリフィス流れは、次の 3 つの区間に別けられる。上図参照。

① Plane 1～Plane 2：　管流れがオリフィス孔に漸近する区間

② Plane 2～Plane 3：　オリフィス孔からベナコントラクタへの収縮加速区間

③ Plane 3～Plane 4：　ベナコントラクタから静圧回復点までの膨張減速区間

これらの区間に運動量保存則を適用する。まず、区間①では、

$$P_1A_1+mV_1/g = \{P_1(A_1-A_2)+P_2A_2-\int_2^1(P_1-P_w)dA_w\}+mV_2/g$$

右辺{　}内は Plane 2 の作用力を示し、その中の積分項は、モーメンタム(ρV^2)を増長させる付加的なドライビングフォース(負)であって、P_w は管壁から開口までの減少圧力を示している。

次に区間②では、$P_2A_2+mV_2/g=P_3A_2+mV_3/g$　であるから 上式は、

$$P_1A_1+mV_1/g=\{P_1(A_1-A_2)+P_3A_2-\int_2^1(P_1-P_w)dA_w\}+mV_3/g$$

この式を変形して

$$(P_1-P_3)A_2+F_D=m(V_3-V_1)/g \quad \text{---} (1)$$

ここで F_D＝力の欠損＝$\int_2^1(P_1-P_w)dA_w$ }

この式において、力の欠損 FD は静圧 P_1 の一部が孔入口のモーメンタムに変化したものと考えられる処から、次のように置ける。

$F_D=\int_2^1(P_1-P_w)dA_w = f(mV_2/g)$　　　ここで f ＝力の欠損係数

従って、(1)式は、

$$(P_1-P_3)A_2=m(V_3-V_1)/g-f(mV_2/g)=mV_2/g\{(V_3/V_2)-(V_1/V_2)-f\}$$

$m=\gamma V_2A_2=\rho gV_2A_2$ であるから

$$(P_1-P_3)=\rho V_2^2\{(V_3/V_2)-(V_1/V_2)-f\}=\rho V_2^2\{(A_2/A_3)-(A_2/A_1)-f\}$$

ここで、Plane 3(ベナコントラクタ)における縮流係数は $C_c=A_3/A_2$、また開口面積比は $\beta=A_2/A_1$ であるから、

$$(P_1-P_3)=2(1/Cc-\beta-f)\,x(0.5\rho V_2^2)$$

更に、$V_2=(A_1/A_2)V_1=V_1/\beta$ であるから、

$$(P_1-P_3)=2\{(1/Cc-\beta-f)/\beta^2\}\,x(0.5\rho V_2^2) \quad \text{--(1')}$$

この式が区間①の運動量の保存を示す式である。依然、力の欠損係数 f はクリアでないので、これを調べる。Plane1 と Plane 3 との間には、ベルヌーイ式より、

$$P_1/\gamma+V_1^2/(2g) = P_3/\gamma+\triangle P_f+V_3^2/(2g)$$

の関係が認められるが、この場合、薄肉オリフィスでは孔通過前後の粘性損失項 $\triangle P_f$ はごく小さいので

$$P_1/\gamma+V_1^2/(2g)=P_3/\gamma+V_3^2/(2g)$$

$$\downarrow$$

$$P_1-P_3=0.5\rho(V_3^2-V_1^2)=0.5\rho V_2^2\{(V_3/V_2)^2-(V_1/V_2)^2\}=0.5\rho V_2^2\{(A_2/A_3)^2-(A_2/A_1)^2\}$$

$$=\{(1/C_c^2-\beta^2)/\beta^2\}(0.5\rho V_1^2)$$

(1')と係数比較して

$$2\{(1/Cc-\beta-f)/\beta^2\}=\{(1/Cc^2-\beta^2)/\beta^2\}$$

$$\therefore\quad f=1/C_c-1/(2C_c^2)-\beta(1-\beta/2) \quad \text{--(2)}$$

従って、(1')式は次のようになる。

$$P_1-P_3=\{(1/(Cc^2)-\beta^2)/\beta^2\}(0.5\rho V_1^2)=\{1/(\beta^2C_c^2)-1\}(0.5\rho V_1^2) \quad \text{---------------------(3)}$$

次に区間③では、

$$P_3A_4+mV_3/g=P_4A_4+mV_4/g \longrightarrow P_3-P_4=m/(gA_4)(V_4-V_3)$$

$V_4=V_1$、$A_4=A_1$ であるから

$$P_3-P_4=(0.5\rho V_1^2)\{2-(V_3/V_1)\}=(0.5\rho V_1^2)\{2-2(A_1/A_2)(A_2/A_3)\}$$

$$=\{2-2/(\beta C_c)\}(0.5\rho V_1^2) \quad \text{---(4)}$$

オリフィス流れの圧力損失は、

$$\triangle P=(P_1-P_3)+(P_3-P_4)=\{1/(\beta^2C_c^2)-1+2-2/(\beta C_c)\}(0.5\rho V_1^2)$$

$$\downarrow$$

$$\boldsymbol{\triangle P=\{1/(\beta C_c)-1\}^2(0.5\rho V_1^2)} \quad \text{--(5)}$$

圧損係数 K は、<u>$K=\{1/(\beta Cc)-1\}^2$</u> となる。なお、以上は理想流体を前提にしている。

2. Benedict は配管オリフィスについて次の式を与えている([FE-23-TM-012 "Benedict のオリフィス /ノズル/ベンチュリ圧損計算 "]参照のこと)。なお、原式の β は口径比になっているが、ここでは面積比であるから、$\beta^2\rightarrow\beta$ にする。

$$\triangle P=\{(1-\beta^2)/C_D^2-2\beta(1/C_c-\beta)\}\{\gamma V_2^2/(2g)\}$$

$=[\{(1-\beta^2)/C_D{}^2-2\beta(1/C_c-\beta)\}/\beta^2]\{0.5\rho V_1{}^2\}$

排出係数 C_D は、通常、次式で定義される。

$$C_D=C_vC_c\{(1-\beta^2)/(1-\beta^2C_c{}^2)\}^{0.5}$$

速度係数 C_v は 1 に近い数値であるが、理想流体では 1 であるから、

$$C_D=C_c\{(1-\beta^2)/(1-\beta^2C_c{}^2)\}^{0.5}$$

これを圧損式に代入すると、

$$\triangle P=[\{(1-\beta^2C_c{}^2)/Cc^2-2\beta(1/C_c-\beta)\}/\beta^2]\{0.5\rho V_1{}^2\}=\underline{\{1/(\beta C_c)-1\}^2(0.5\rho V_1{}^2)}$$

これは、(5)式と一致する。

一方、門らは多孔オリフィスについて以下のような式を与えている([FE-23-RP-002 “多孔オリフィスの圧損計算とサイジング方法” 参照)。この式は単孔でも然りである。

オリフィス圧損：$\Delta P=[(1/C_v{}^2-1)\{1/(\beta C_c)\}^2+\{1/(\beta C_c)-1\}^2](0.5\rho V_1{}^2)$

$C_v=1$ であれば、$\triangle P=\{1/(\beta C_c)-1\}^2(0.5\rho V_1{}^2)$　であるから、これも(5)式に一致する。

3. 以上、運動量の式を用いて得られたオリフィス圧損式(5)は、既存の式に合致する。運動量の式は、本来、断面が変化する 1 次元流れ要素に適用される。以上はその典型的な一例である。運動量の式そのものについては、[FE-01-TG-001 “流れの基本式(手引き)”](準備中)で詳述する。

なお、本 TS で使用した記号の定義は、以下。

m＝質量流量、P＝静圧、V＝流速、A=流れ断面積、β＝孔面積比、C_c=縮流係数、
C_v=速度係数、f＝力の欠損係数、F_D＝力の欠損、
ρ＝流体密度、γ＝流体比重量、g=重力加速度、

引用文献）

(1) Robert. P. Benedict 「Fundamentals of Pipe Flow」（A Wiley-Interscience　Publication）
2.6.2　Momentum Solutions to Various Orifices