

## 2分冊その2 (2/2)

## 10.7 サンプル検討

Fig.10-1 や(10-33)式で表されるようなピン-ピン支持スパンの水輸送管を考える。このパイプスパンの質量比と限界速度は  $\rho A/M=0.537$ 、 $v_c=129\text{ft/s}(39.5\text{m/s})$  である。

もし2つの可能流速(23m/s と 46m/s)が提案されたら、高い方の流速は限界流速を上回り座屈を引き起こすので、採用できない。

流速 23m/s では  $v/v_c=0.581$ 、この場合の基本周波数の減少は(10-30)式より

$$\omega_1/\omega_N=0.814$$

流れのない時の固有振動数 $\omega_N$ は、(10-26)式から 28.4rad/s(4.52Hz)と計算される。従ってこの輸送管の固有振動数は 23.1rad/s(3.68Hz)になる。

もしこのパイプを1端で固定し他端で開放したらパイプはカンチレバー管になる。Fig.10-6によれば、次の流速でこのカンチレバー管の不安定発生が予測される。

$$V=9.4(EI/\rho A)^{1/2}/L=387\text{ft/sec}(118\text{m/s})$$

カンチレバーの不安定に必要な流速は、等価なピン-ピン支持スパンの不安定に必要な流速よりも高い。これは、パイプの自由端を掴んでピン-ピン支持に近づけるだけでそのカンチレバー管を座屈に至るまで安定に保持できることを意味している。

## 【 本章の補足説明 】

(\*1) (10-1)式は流体要素の軸直角方向(流れ直角方向)のカバランスを示す式である。

まず図 1(a)のような湾曲した微少要素を考えると

$$R \delta \theta = \delta x \rightarrow \delta \theta = \delta x/R \quad (\text{ここで } R=\text{曲率半径}, \delta \theta = \text{湾曲角}, \delta x = \text{要素長さ})$$

なお、曲率 R の逆数は  $1/R=(\partial^2 Y/\partial x^2)$  で与えられる。

次に図 1(b)のような流体要素(湾曲微少要素の流体柱部分)を考える。この場合、内圧力は

$$(\star 1) \rightarrow A\{p-(1/2)(\partial p/\partial x)\delta x\}, \quad (\star 2) \rightarrow A\{p+(1/2)(\partial p/\partial x)\delta x\}$$

この内圧力は軸方向に作用するが湾曲によって下記の軸直角フォースが発生する。

$$(\star 1) \rightarrow [A\{p-(1/2)(\partial p/\partial x)\delta x\}](\delta \theta /2) \doteq pA(\delta \theta /2)=(1/2)pA \delta x/R$$

$$(\star 2) \rightarrow [A\{p+(1/2)(\partial p/\partial x)\delta x\}](\delta \theta /2) \doteq pA(\delta \theta /2)=(1/2)pA \delta x/R$$

モーメンタム(運動量)についても同様に

$$(\star 1) \rightarrow [m_f\{v-(1/2)(\partial v/\partial x)\delta x\}](\delta \theta /2) \doteq m_f v(\delta \theta /2)=(1/2)m_f v \delta x/R$$

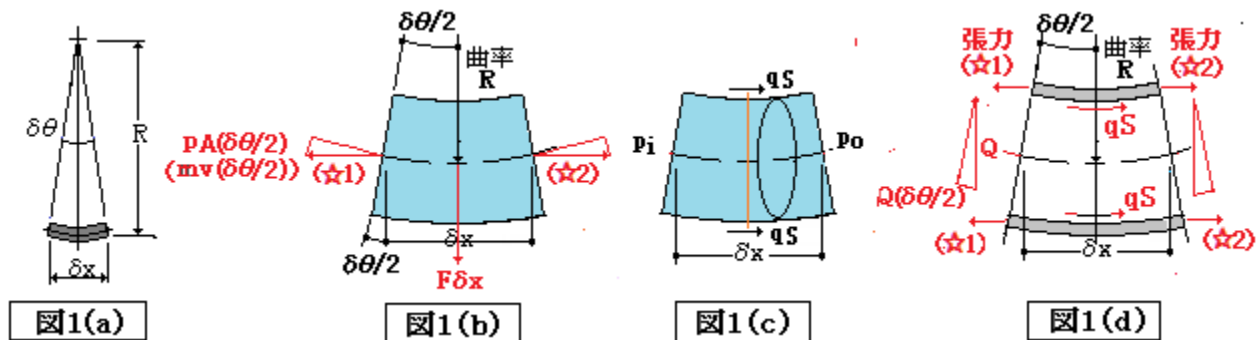
$$(\star 2) \rightarrow [m_f\{v+(1/2)(\partial v/\partial x)\delta x\}](\delta \theta /2) \doteq m_f v(\delta \theta /2)=(1/2)m_f v \delta x/R$$

更に衝撃等が加わると軸直角方向には質量慣性力  $\rho A \delta x(\partial^2 Y/\partial t^2)$  が生じる。従って軸直角フォース F は、内圧力及びモーメンタムの軸直成分と質量慣性力の和で与えられる。即ち

$$F \delta x = 2x(1/2)pA \delta x/R + 2x(1/2)m_f v \delta x/R + \rho A \delta x(\partial^2 Y/\partial t^2)$$

ここでモーメンタムと慣性力は干渉があるのでまとめて扱い、 $1/R=(\partial^2 Y/\partial x^2)$ 及び  $m_f = \rho A v$  で表すと

$$F - pA(\partial^2 Y/\partial x^2) = \rho A(\partial/\partial t + v \partial/\partial x)^2 Y \rightarrow (10-1)$$



(\*2) (10.2)式は流体要素の軸方向(流れ方向)の力バランスを示す式である。図1(c)にこれを示す。

$$\partial p = p_i - p_o \rightarrow A \partial p + q S \delta x = 0 \rightarrow A \partial p / \partial x + q S = 0 \rightarrow (10-2) \text{式}$$

$qS$ は単位長さ当たりの摩擦力である。

(\*3) (10.3)式はパイプ要素の軸方向(流れ方向)の力バランスを示す式である。図1(d)にこの状態を示す。パイプに作用する張力は次式で与えられる。

$$(\star 1) \rightarrow T - (1/2)(\partial T / \partial x) \delta x, (\star 2) \rightarrow T + (1/2)(\partial T / \partial x) \delta x$$

従って  $(\star 1) - (\star 2) = (\partial T / \partial x) \delta x \rightarrow$  張力の増分

また要素端面には軸直角方向に次のせん断力が作用する。

$$\text{左端} : Q - (1/2)(\partial Q / \partial x) \delta x, \quad \text{右端} : Q + (1/2)(\partial Q / \partial x) \delta x$$

パイプ要素が湾曲するとこのせん断力は傾いて軸方向成分が生じる。即ち

$$\text{左端} : \{Q - (1/2)(\partial Q / \partial x) \delta x\} (\delta \theta / 2) \approx Q (\delta \theta / 2),$$

$$\text{右端} : \{Q + (1/2)(\partial Q / \partial x) \delta x\} (\delta \theta / 2) \approx Q (\delta \theta / 2)$$

従って、右端+左端  $= 2Q (\delta \theta / 2) = Q \delta \theta \rightarrow Q \delta \theta = Q \delta x / R = Q \delta x (\partial^2 Y / \partial x^2)$

軸方向フォースのバランスは、張力の増分+摩擦力=せん断力の軸方向成分であるから、

$$(\partial T / \partial x) \delta x + q S \delta x = Q \delta x (\partial^2 Y / \partial x^2) \rightarrow (\partial T / \partial x) + q S - Q (\partial^2 Y / \partial x^2) = 0 \rightarrow (10-3) \text{式}$$

(\*4) (10.4)式はパイプ要素の軸直角方向(流れ直交方向)の力バランスを示す式である。

パイプに作用する湾曲後の軸直角方向せん断力は、

$$(\star 1) \rightarrow Q - (1/2)(\partial Q / \partial x) \delta x, \quad (\star 2) \rightarrow Q + (1/2)(\partial Q / \partial x) \delta x$$

従って  $(\star 2) - (\star 1) = (\partial Q / \partial x) \delta x \rightarrow$  軸直角方向せん断力

またパイプに作用する軸方向の張力は

$$(\star 1) \rightarrow T - (1/2)(\partial T / \partial x) \delta x, \quad (\star 2) \rightarrow T + (1/2)(\partial T / \partial x) \delta x$$

湾曲後の軸直角方向の張力成分は

$$(\star 1) \rightarrow \{T - (1/2)(\partial T / \partial x) \delta x\} (\delta \theta / 2) = T (\delta \theta / 2),$$

$$(\star 2) \rightarrow \{T + (1/2)(\partial T / \partial x) \delta x\} (\delta \theta / 2) = T (\delta \theta / 2)$$

従って  $(\star 1) + (\star 2) = T \delta \theta = T \delta x / R = T \delta x (\partial^2 Y / \partial x^2) \rightarrow$  張力の軸直角方向成分

衝撃等による(パイプ+流体)質量慣性力  $M(\partial^2 Y / \partial t^2)$ は軸直角方向のせん断力、張力成分および軸直角フォース  $F$ とバランスするので、

$$(\partial Q / \partial x) \delta x + T \delta x (\partial^2 Y / \partial x^2) - F \delta x = M \delta x (\partial^2 Y / \partial t^2)$$

$$\rightarrow (\partial Q/\partial x) + T(\partial^2 Y/\partial x^2) - F = M(\partial^2 Y/\partial t^2) \rightarrow (10-4)式$$

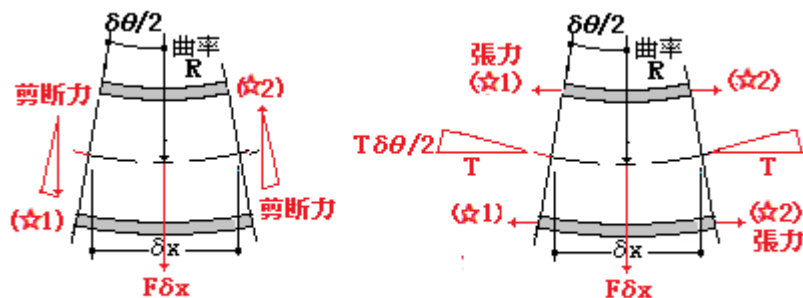


図1(e)

(\*5) (10-5)式は[せん断力とモーメント]及び[モーメントと曲率]の関係より得られる。テキスト通り。

(\*6) 関数  $f(x)$  のフーリエ級数は公式より

$$f(x) = a_0/2 + \sum \{a_n \cos(2\pi nx/T) + b_n \sin(2\pi nx/T)\}$$

$$a_0 = (2/T) \int_0^T f(x) dx, \quad a_n = (2/T) \int_0^T f(x) \cos(2\pi nx/T) dx, \quad b_n = (2/T) \int_0^T f(x) \sin(2\pi nx/T) dx$$

$$f(x) = \cos(\pi rx/L) \quad (\text{但し } T \rightarrow L) \quad \text{として}$$

$$a_0 \rightarrow 0, \quad a_n \cos(2\pi rx/T) \rightarrow 0, \quad b_n \sin(2\pi rx/T) \rightarrow b_{nr} \sin \pi rx/L$$

(\*7) これは自由振動方程式の特性式を表わしている。一般的に言えば、自由振動式  $Mx'' + Kx = 0$  に  $x = \phi(x) \cos(\omega t + \phi)$  を代入し、直交性を考慮して

$$(K - \omega^2 M) \phi(x) \cos(\omega t + \phi) = 0 \rightarrow (K - \omega^2 M) \phi(x) = 0 \rightarrow [[K] - \omega_j^2 M[I]] \{a\} = 0$$

(\*8) 特に1次/2次モードのみをとれば、マトリックス  $[[K] - \omega_j^2 M[I]] = 0$  は、

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \omega_j^2 M & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \omega_j^2 M \end{bmatrix} = 0$$

これを展開すれば  $(k_{11} - \omega_j^2 M)(k_{22} - \omega_j^2 M) - k_{12}k_{21} = 0$  即ち

$$\{EI(\pi/L)^4 - \rho Av^2(\pi/L)^2 - \omega_j^2 M\} \{16EI(\pi/L)^4 - 4\rho Av^2(\pi/L)^2 - \omega_j^2 M\} - k_{12}k_{21} = 0$$

ここで  $k_{12} = -(32/3)(\rho Av \omega_j/L)$ 、 $k_{21} = (8/3)(\rho Av \omega_j/L)$  である。

上式を  $\{EI(\pi/L)^4\}^2$  で除すると、

$$\{1 - v^2/(\pi/L)^2(EI/\rho A)\} - \omega_j^2/(\pi/L)^4(EI/M)\}$$

$$x \{16 - 4v^2/(\pi/L)^2(EI/\rho A)\} - \omega_j^2/(\pi/L)^4(EI/M)\}$$

$$+ \{256/(9\pi^2)\} [v^2/(\pi/L)(EI/\rho A)^{1/2}]^2 [\omega_j^2/(\pi/L)^2(EI/\rho A)^{1/2}]^2 (\rho A/M) = 0$$

ここで  $v_c = (\pi/L)(EI/\rho A)^{1/2}$ 、 $\omega_N = (\pi/L)^2(EI/\rho A)^{1/2}$  とおけば、

$$[1 - (v/v_c)^2 - (\omega_j/\omega_N)^2] [16 - 4(v/v_c)^2 - (\omega_j/\omega_N)^2]$$

$$+ \{256/(9\pi^2)\} (v/v_c)^2 (\rho A/M) (\omega_j/\omega_N)^2 = 0 \rightarrow (10-25)式$$

(\*9) 軸圧縮を受ける時の横座屈に対する限界軸力は  $P_{cr} = k\pi^2 EI/L^2$  になる。モーメントのみを考慮して  $P_{cr} = \rho Av_c^2$  とすると 限界軸力式を变形して  $v_c = (\pi/L)(EI/\rho A)^{0.5}$  が得られる。

(\*10) (10-28)式から得られるのは  $(\omega_1/\omega_N)^2$ 、 $(\omega_2/\omega_N)^2$  即ち  $\omega_1$  と  $\omega_2$  である。この場合(10-28)式の右辺の計算から得られる2つの値を比べ、その小さい方をもって  $\omega_1$  に、大きい方をもって  $\omega_2$  を求める。即ち

$\omega_1 = [(\text{小さい方の右辺の値})^{1/2}] \omega_N$ ,  $\omega_2 = [(\text{大きい方の右辺の値})^{1/2}] \omega_N$   
 (10-28)式は変則な表示になっているので運用に注意すること

(\*11) (10-20)式にて  $n=2$ ,  $r=1$  とすれば

$$a_2 [16EI(\pi/L)^4 - 4\rho Av^2(\pi/L)^2 - M\omega_j^2] = (-1/3)a_1 (8\rho Av\omega_j/L)$$

これを整理し  $v_c = (\pi/L)(EI/\rho A)^{1/2}$ ,  $\omega_N = (\pi/L)^2(EI/M)^{1/2}$  とおけば、

$$(a_2/a_1) = -\{8/(3\pi^2)\}(\omega_1 L/v_c)(v/v_c) / \{16 - 4(v/v_c)^2 - (\omega_1/\omega_N)^2\} \rightarrow (10-32)式$$

(\*12) 振動の基本形として 1 質量・バネ・減衰モデルを考えると周知のように

$$\text{自由振動式} \rightarrow mx'' + cx' + kx = 0 \quad (m = \text{質量}, c = \text{減衰係数}, k = \text{バネ定数})$$

この解を  $x = x_0 e^{st}$  とおいて上式に代入して

$$mx'' + cx' + kx = (s^2 + 2cs + k)x_0 e^{st} = 0$$

即ち特性方程式  $s^2 + 2cs + k = 0$  を得る。この解は  $s_1, s_2 = -c/2m \pm \{(c/2m)^2 - k/m\}^{0.5}$  となる。

$$\text{ここで } \zeta = c/c_c, c_c = 2m\omega_n, \omega_n = (k/m)^{0.5}$$

(なお、 $c_c$  = 限界減衰係数、 $\zeta$  = 減衰比、 $\omega_n$  = 実固有振動数)

であるから特性方程式の解は  $s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \{\zeta^2 - 1\}^{0.5}\omega_n$  で表せる。さらに

$$\{\zeta^2 - 1\}^{0.5}\omega_n = (-1)^{0.5}(1 - \zeta^2)^{0.5}\omega_n = i(1 - \zeta^2)^{0.5}\omega_n = i\omega_d, \sigma = \zeta m (> 0)$$

(ここで  $\omega_d$  はいわゆる減衰自由(固有)振動数であって  $\zeta < 1$  なので実数の固有値)

とおけば、特性方程式の解を  $s_1, s_2 = -\sigma \pm i\omega_d$  で表すことができる。以上テキスト(6)。

この場合、変位  $x$  式は次のように共役な 2 つの複素数解の線形結合で与えられる。

$$\begin{aligned} x &= x_0 e^{st} = x_0 e^{(-\sigma + i\omega_d)t} + x_0' e^{(-\sigma - i\omega_d)t} = 2\text{Re}\{x_0 e^{(-\sigma + i\omega_d)t}\} \\ &= 2\text{Re}\{(a_1 + ia_2) e^{-\sigma t} (\cos \omega_d t + i \sin \omega_d t)\} = 2e^{-\sigma t} (a_1 \cos \omega_d t - a_2 \sin \omega_d t) \\ &= a e^{-\sigma t} \cos(\omega_d t + \phi) \end{aligned}$$

(なお  $\text{Re}$  は実数項を有効とするもの。また  $a = 2(a_1^2 + a_2^2)^{0.5}$ )

この変位式において  $e^{-\sigma t}$  を除く  $a \cos(\omega_d t + \phi)$  は定数項であるが、 $e^{-\sigma t}$  は時間変化して  $\sigma > 0$  の時は指数関数的に減衰し、 $\sigma < 0$  の時は指数関数的に増加(→発散)する。ここで  $\sigma$  は  $\zeta m$  であって一般に減衰係数  $\zeta$  及び  $m$  は正の値なので、変位  $x$  は減衰することになる。

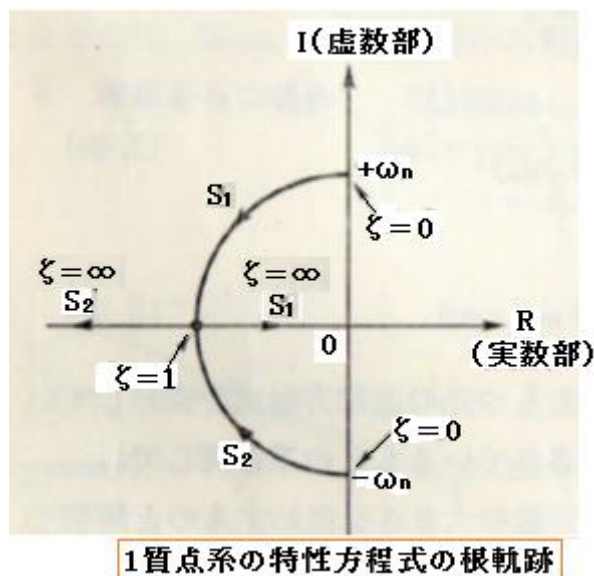
流体輸送管の運動方程式はもちろん 1 質量・バネ・減衰モデルの振動式と異なるが、時間に依存する部分には類似性がある。10.3 節の記述によれば、流体輸送管は通常の運動方程式にはない混合微分項をもっており、

“混合微分項はパイプの変形と  $90^\circ$  位相にありパイプの流速と常に同位相にある、流れ流体によってパイプに負荷される力を表わしている。この力は流体流れからエネルギーを引き出しそのエネルギーをパイプ曲げに投入して、当初は振動、究極は座屈を与えるもので、本質的に負性減衰メカニズムに他ならない”

とされる。負性減衰の場合は  $c$ (ないし  $\zeta$ ) → 負の値を持つので  $\sigma (= \zeta m)$  に相当する部分が負の値をもち、 $x = a e^{-\sigma t} \cos(\omega_d t + \phi)$  が発散(不安定)傾向になることは十分予想できる。

なお注意すべきは 減衰が  $0 < \zeta < 1$  即ち弱減衰にある場合にこの議論が成立することである。従って特性方程式の解が  $s_1, s_2 = -\sigma \pm i\omega_d$  のように複素数解になることが不安定化の前提になっている(忘れないように!)。複素数解が成立するには  $s_1, s_2$  式で、判別項  $\{(c/2m)^2 - k/m\}$

→  $(\zeta^2 - 1)$  が負になる必要がある。特性方程式の結果はしばしば根軌跡図(例えば下図)で表示されるが、 $\text{Im}(\omega)$ に相応する  $\text{Im}(\omega_d)$ は便宜的に  $-\omega_d = -(1 - \zeta^2)^{0.5} \omega_n$  として表示されたものに相応するとみていい。例えば、(10-36)式の  $-\omega_R$ は1質点系モデルの  $-\omega_d$ に相応していると考えられる。



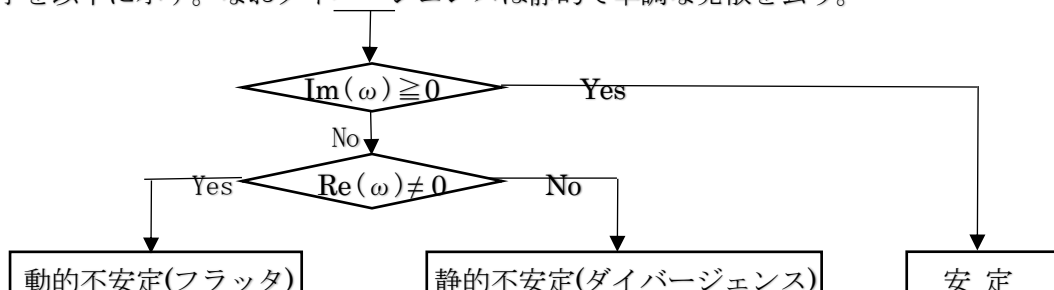
## 2. 流体輸送管のダイナミクス(その他のスタディについて)

流体輸送管については Blevins テキスト記載以外にも多くのスタディがある。ここではその中で目につく情報の要点をメモしておく。

### 2.1 Paidoussis-Issid のスタディ結果

(1) Blevins テキストでは金属パイプが対象になっているが、Paidoussis らは文献(2)でゴムホースのような粘弾性体パイプを対象にしたスタディ(解析)を行い、流体輸送管の特性を根軌跡のグラフ等で与えている。その概要は JSME の流体振動テキスト(5)にも紹介されているので、重複することになるが、敢えてその関連個所を示しておきたい。なお 1960 年代の Paidoussis らのスタディは Blevins テキストのベースになっているので、ここで紹介する Paidoussis 文献の内容は Blevins テキストの記述の延長(発展したもの)として考えればよい。

(2) Blevins テキストでは曲げ剛性 EI を持った金属パイプを対象としているが、ここでは Kelvin-Voight タイプの粘弾性材料(\*13)を用いたパイプを対象にしているためか、運動方程式は非常に複雑になっている。図 A に解析モデル、図 B に [運動方程式→特性方程式] の流れを示す。前章の補足説明(\*12)でも示したように特性方程式の解から解析モデルの挙動を知ることができる。この様子を以下に示す。なおダイバージェンスは静的で単調な発散を云う。



(3) 当該 Paidoussis 文献では、両端単純支持(ピン-ピン支持)、両端固定支持(クランプ-クランプ支持)および片持ち支持(カンチレバー支持)の3つについて解析の結果(根軌跡図)を示している。ここでは、両端単純支持に関する軌跡図 即ち Fig.3(a)(b)をピックアップして示す。Fig.の横軸に複素固有値の実数部( $R$ )、縦軸に虚数部( $Im$ )をとって1~3次モードの根軌跡が表示されている。図中のプロット線上の数字は無次元流速  $u$  の値を示している。

Fig.3(a)は、比較的低い質量比( $\beta = 0.1$ )の場合を示している。図からわかるように流量(流速)の増加と共に1次モード振動数( $\rightarrow Im(\omega)$ )は減少し終に1次座屈限界流速  $u = \pi$  で消滅する。同様に2次振動数も  $u = 2\pi$  で消える。しかしわずかに  $u$  が高くなると1次/2次モードの軌跡が  $Im(\omega)$  軸上で合体し対称点で軸を離れ連成モードのフラッタの発生を示す(理論的な結論は未だ?)。

ここで無次元流速  $u$  は  $u = (M/EI)^{1/2}UL$  で与えられる。これを変形して

$$\text{管内流速} : U = (u/L)(EI/M)^{1/2} = (u/L)(EI/\rho A)^{1/2}$$

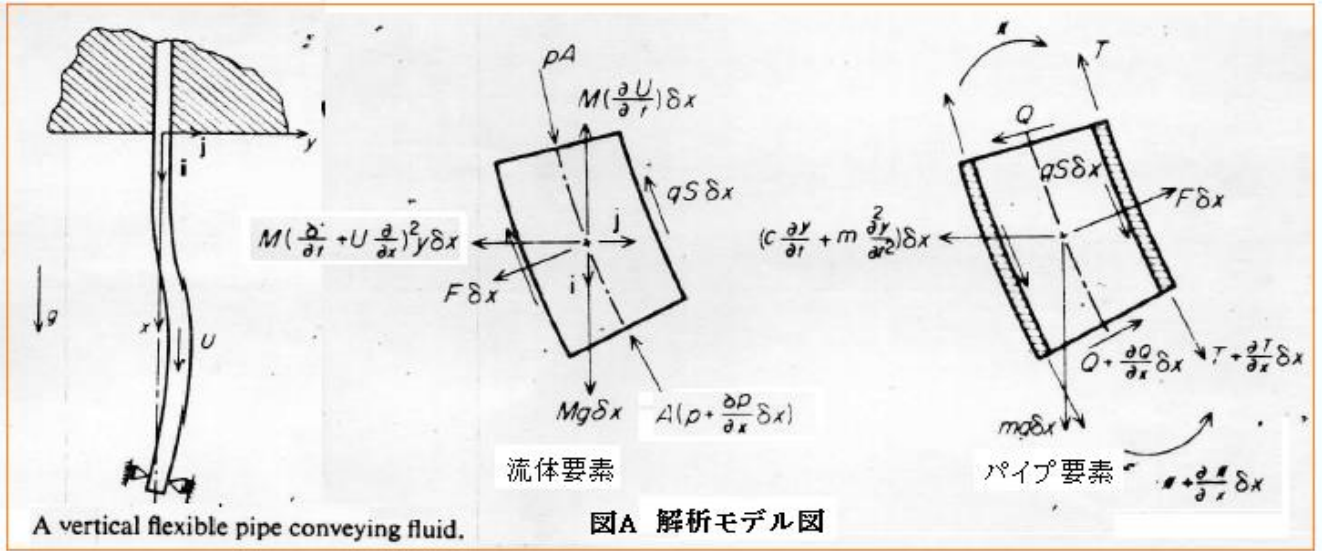
1次モードにおいて  $u = \pi$  のとき座屈限界に達するので、 $U = (\pi/L)(EI/\rho A)^{1/2}$  が1次の座屈限界流速ということになる。この座屈限界流速は前節(Blevins テキスト)の(10-27)式に一致している。Blevins テキストでは両端単純支持ケースの動的挙動が示されていないが、この軌跡図から  $\beta = 0.1$  程度では、座屈限界( $u = \pi$ )までフラッタ現象が起きないことがわかる。

一方、Fig.3(b)は、比較的高い質量比( $\beta = 0.5$ )の場合を示している。Fig.3(b)では、今一度  $u = \pi$  で1次モード振動数は解消する。しかし  $u = 2\pi$  は2次モード座屈とは一致しない。むしろ1次モードでシステムが安定性を回復するポイントになっている!  $2\pi$  よりわずかに高い  $u$  辺りで1次と2次モードの軌跡は  $Re(\omega)$  上で合体し、そのあと( $u = 6.3$  程度)連成モードのフラッタが発生する。そして  $u$  の増加とともに、揺らぎの振動数の実数部は減少し、最終的に  $u = 9.41$  程度で消える。それから同様のプロセスを経て  $u = 9.51$  でも3次モード奇跡を巻き込んで連成モードのフラッターが再発する。

Fig.3(a)(b)の結果は質量比  $\beta$  の違いによっている。流体質量の割合が低いとき( $\beta$  が低いとき)は座屈限界流速がフラッタ発生の目安になる。流体質量の割合が高いとき( $\rightarrow$ 大径薄肉管)は座屈限界流速の2倍程度がフラッタ発生の目安になりそうである。

(4) Fig.3 では粘弾性の効果を見落している。粘弾性の効果を含めた解析結果では多少軌跡の動きがシンプルになる傾向は見られるが、決してフラッタがなくなる訳ではない。むしろ Fig.3(b)に対応する解析では1次モード後の安定傾向は見られない。両端固定支持パイプについても同様に拘束強化の効果が顕著にでる訳ではなくより複雑になる傾向がある。

(5) ここではピックアップしていないが片持ち支持パイプもスタディしている。傾向としては、根軌跡は流速の変化と共に複雑に変化しある流速(限界流速)になってフラッタに至る(Blevins テキストの Fig.10-6,7 に類似の判定図が与えられている)。限界流速は内部減衰に依存して変化が見られ、 $\beta > 0.3$  では、内部減衰がかえって不安定を増長する傾向があるので、不用意に減衰を強化するのはさけるべき。



A vertical flexible pipe conveying fluid. 図A 解析モデル図

$$E^* I \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \left\{ MU^2 - T + \bar{p}A(1 - 2\nu\delta) - \left[ (M+m)g - M \frac{\partial U}{\partial t} \right] (L-x) \right\} \times \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2MU \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + (M+m)g \frac{\partial y}{\partial x} + c \frac{\partial y}{\partial t} + (M+m) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

M = 流体質量 (= ρA), m = パイプ質量

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \left( \frac{EI}{M+m} \right)^{1/2} \frac{t}{L^2} \quad \leftarrow \quad \alpha = \left[ \frac{I}{E(M+m)} \right]^{1/2} \frac{E^*}{L^2}, \quad \eta = \frac{y}{L},$$

$$u = \left( \frac{M}{EI} \right)^{1/2} UL, \quad \beta = \frac{M}{M+m} \quad \leftarrow \quad \gamma = \frac{M+m}{EI} L^3 g, \quad \Gamma = \frac{TL^2}{EI}, \quad \kappa_0 = \frac{k_0 L^3}{EI},$$

$$\Pi = \frac{\bar{p}AL^2}{EI}, \quad \kappa = \frac{cL^2}{[EI(M+m)]^{1/2}} \quad \leftarrow \quad \kappa_1 = \frac{k_L L^3}{EI}, \quad \kappa'_0 = \frac{c_0 L^2}{EI}, \quad \kappa'_1 = \frac{c_L L^2}{EI}.$$

$$\alpha \frac{\partial^5 \eta}{\partial \xi^4 \partial \tau} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + \left\{ u^2 - \Gamma + \Pi(1 - 2\nu\delta) + \left[ \beta^{1/2} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \gamma \right] (1 - \xi) \right\} \times \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + 2\beta^{1/2} u \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau} + \gamma \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \kappa \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0,$$

特性方程式

$$\det \left[ \{ (\Omega_n^2 - \omega^2) + j(x + \alpha \Omega_n^2) \omega \} \delta_{nm} + (\gamma + j2\sqrt{\beta} u \omega) b_{nm} + (u^2 - \gamma) c_{nm} + \gamma d_{nm} \right] = 0$$

図B 流体輸送管の運動方程式

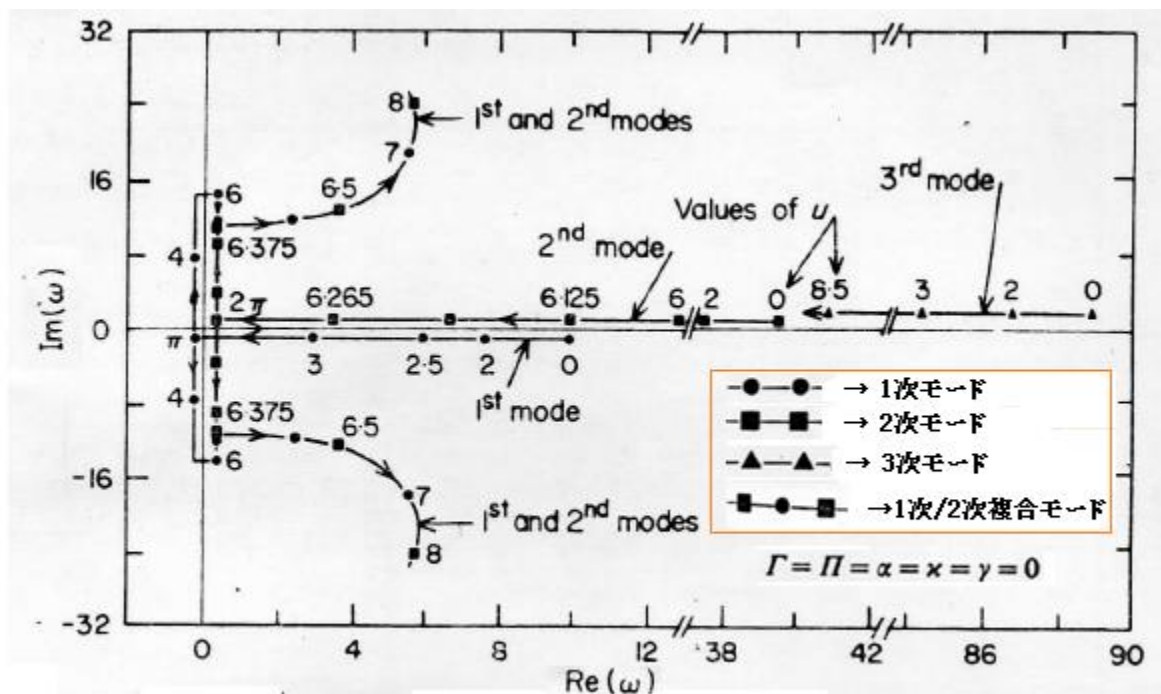
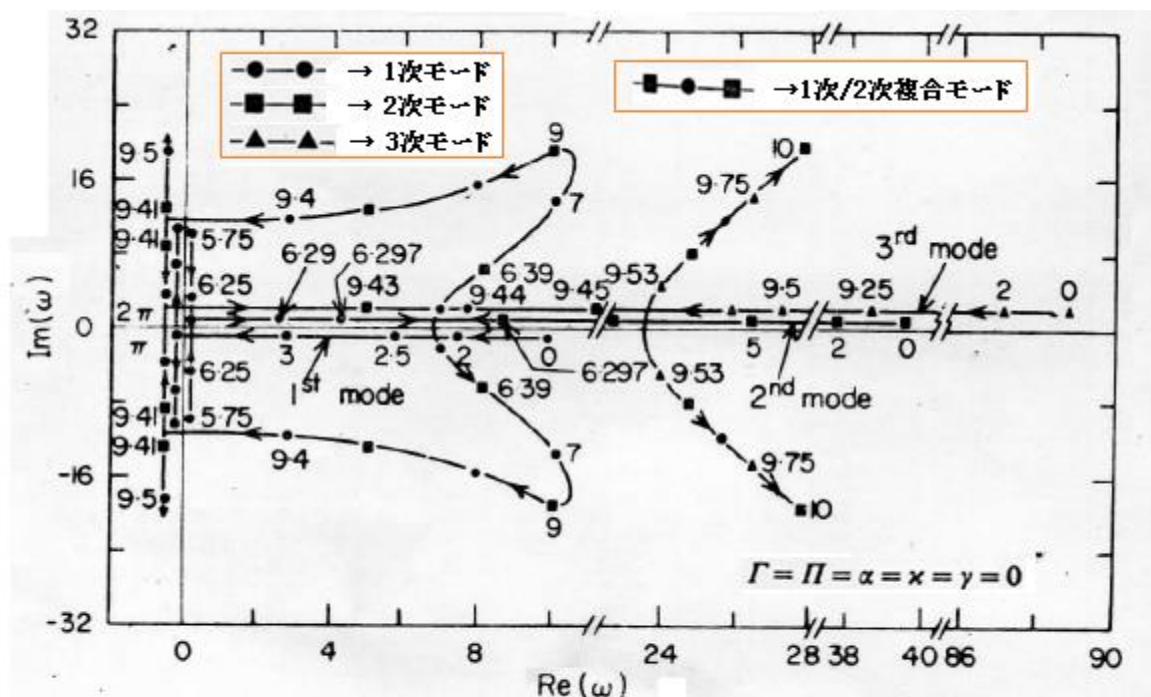


Fig.3 (a) ピン-ピン支持パイプの無次元複素振動数(根軌跡図)  $\beta=0.1$  の場合



(b) 質量比  $\beta=0.5$  の場合

Fig.3 (b) ピン-ピン支持パイプの無次元複素振動数(根軌跡図)  $\beta=0.5$  の場合

## 2.2 脈動のある流体輸送管に関するスタディ結果

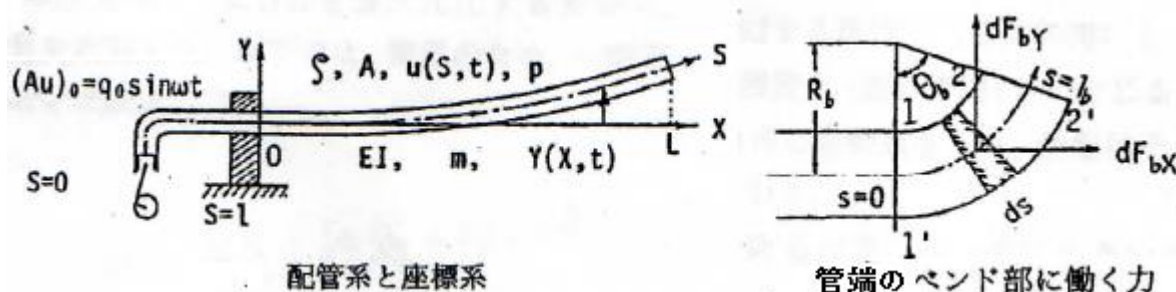
葉山らは下図のような流体振動(脈動)のある流体輸送管の振動をスタディし文献(3)にその結果を次のように報告している。

(1) 脈動による片持ち支持パイプ(固定-自由)の曲げ振動の起振力には次の2つがある。

- ① 配管の静的撓みあるいは形状的な曲がり部分における流量変動(加速/減速)による軸方向の圧力作用 → 脈動周波数と同じ振動数
- ② 空間的な運動量変化による軸直角方向の延伸作用 → 脈動周波数の2倍の振動数



- (2) 静的な撓みによる起振力は影響が小さいので余り気にかける必要はない。むしろ管ベンドなど曲がり部分で生じる起振力のインパクトが大きい。従ってベンドに生じる起振力を解析や実験などで求め運動方程式に組み込んで解くのがよい(より実用的)。本文の(23)(24)式に管端ベンド付き片持ち管の運動方程式が与えられる。
- (3) 流体密度が大きいとか流路の限界座屈荷重が小さい時はパラメータ励振(\*14)が起きる可能性がある。パラメータ励振には次の2つがある。
- ① 管路の振動に伴って生じる付加剛性の周期的変動によるもの
  - ② ベンドなどから生じる軸力の周期的変動によるもの
- パラメータ励振は脈動周波数の1/2?の振動数を持つ。



### 2.3 カンチレバー管の高速流れに関するスタディ結果

吉沢らの文献(4)では圧力タンク底に設けた緊急放出用の片持ち支持管の挙動がスタディされている。以下にそのあらましを記す。

- (1) 図1のモデルを用いて放出時の定常流速が限界流速を越える場合に予想される横振動の振幅と振動数の変化を解析し、実験結果と比較している。総じて Paidoussis らの手法を踏襲したものである。

- (2) 解析は、下記の2つの方程式を固定-自由の境界条件で解くもの。

$$\text{流れ方程式: } dv/dt + \mu v^2 = P_s$$

$$\text{運動方程式: } \partial^2 w / \partial t^2 + \partial^4 w / \partial s^4 - \gamma \partial / \partial s \{ (1-s)(\partial w / \partial s) \} + v^2 (\partial^2 w / \partial s^2) + 2\sqrt{\beta} v (\partial^2 w / \partial w \partial t) = 0$$

$$\text{境界条件: } s=0 \text{ にて } w = \partial w / \partial s = 0, \quad s=1 \text{ で } \partial^2 w / \partial s^2 = \partial^3 w / \partial s^3 = 0$$

ここで、 $\alpha$  = 摩擦抵抗、 $\beta = \rho S / (m + \rho S)$ 、 $\gamma = (m + \rho S) g \ell^3 / EI$ 、 $\mu = (1 + \alpha) / 2$ 、

$$P_s = (S \ell^2 / EI) (p_r + \rho g \ell)$$

なお使用記号は第1章の記号と  $s \rightarrow x$ 、 $w \rightarrow Y$ 、 $s \rightarrow A$ 、 $\ell \rightarrow L$  で対応している。

- (3) 横振動の発生の可否評価は基本的には Blevins テキストと同じ。すなわち振幅(撓み)  $w(s, t) = \text{Re} \{ \Phi_0(s) e^{i\omega t} \}$  を仮定してこれを運動方程式に代入して固有関数  $\Phi_0$  の4階常微分方程式を求め、これから複素固有方程式(特性方程式)  $f(v_s, \omega, \alpha, \beta, \gamma) = 0$  を数値的に求める。この場合、中立安定条件  $w_i = 0$  から限界振動数  $\omega_{cr}$ 、次いで限界流速  $v_{cr}$  を求める。図2にこの結果の一例を示す。 $\gamma = 50$  付近で急に大きくなる傾向が見られる。
- (4) 上記は特性方程式から安定条件を仮定して限界流速/限界振動数を求めているが、フルに方程式を解くと、任意時刻/位置の振動振幅  $w$  / 振動数  $\omega$  / 流速  $v$  が得られる。傾向としては、流速がアップする( $\rightarrow$ タンク有効圧がアップする)と、振幅  $w$  はアップする。管質量( $\rightarrow \gamma$ )が小さいと振れやすくなる。振動数も流速のアップに伴い微少ながらアップする。 $\gamma$  が大きくなるほど振動数は高い。図8にタンク有効圧と振幅の関係、図9にタンク有効圧と振動数の関係を示す。有効圧は流速に比例している。

- (5) 結論を総括すれば、

- ① タンク有効圧 > 限界圧力 のとき (予想通り) 定常的な振動が起きることを確認。
- ② 限界圧力を越えタンク有効圧アップ (→ 流速アップ) するにつれ振動振幅がアップするにつれて振動振幅、振動数とも上昇する。

図6に片持ち支持管の振動時の挙動と管内流速の時間変化をプロットする。

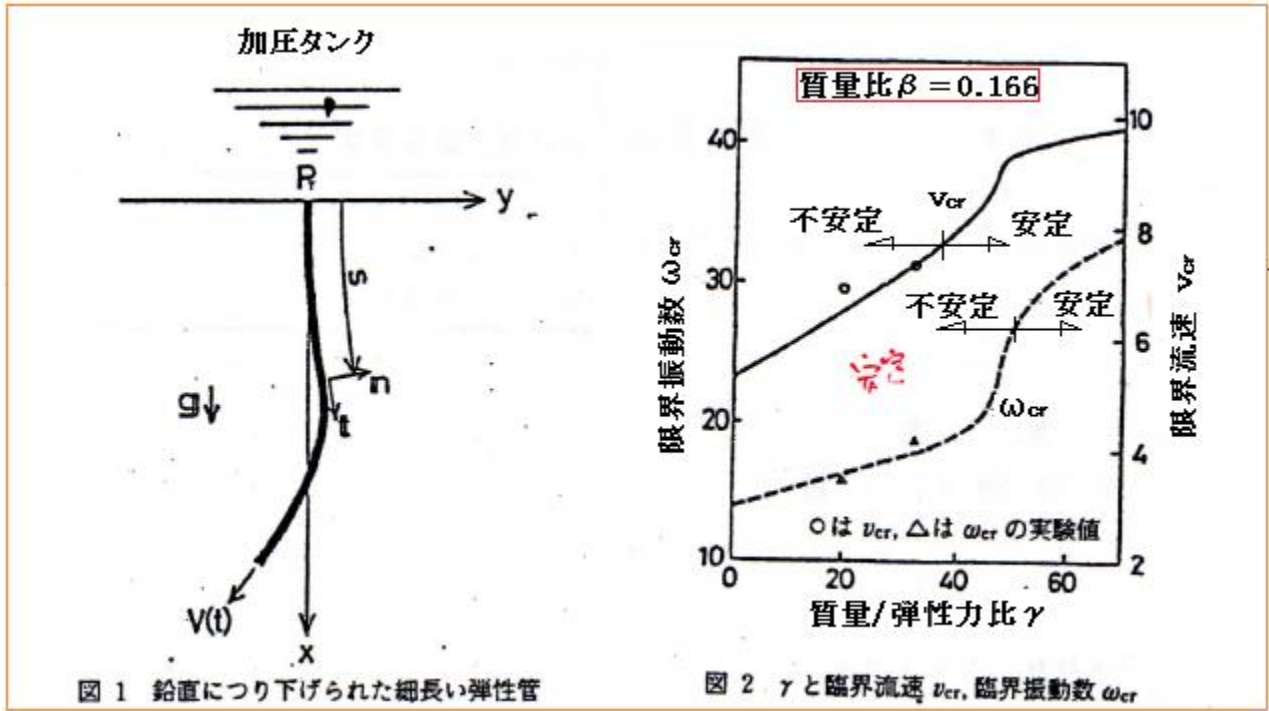


図1 鉛直につり下げられた細長い弾性管

図2  $\gamma$  と臨界流速  $v_{cr}$ 、臨界振動数  $\omega_{cr}$

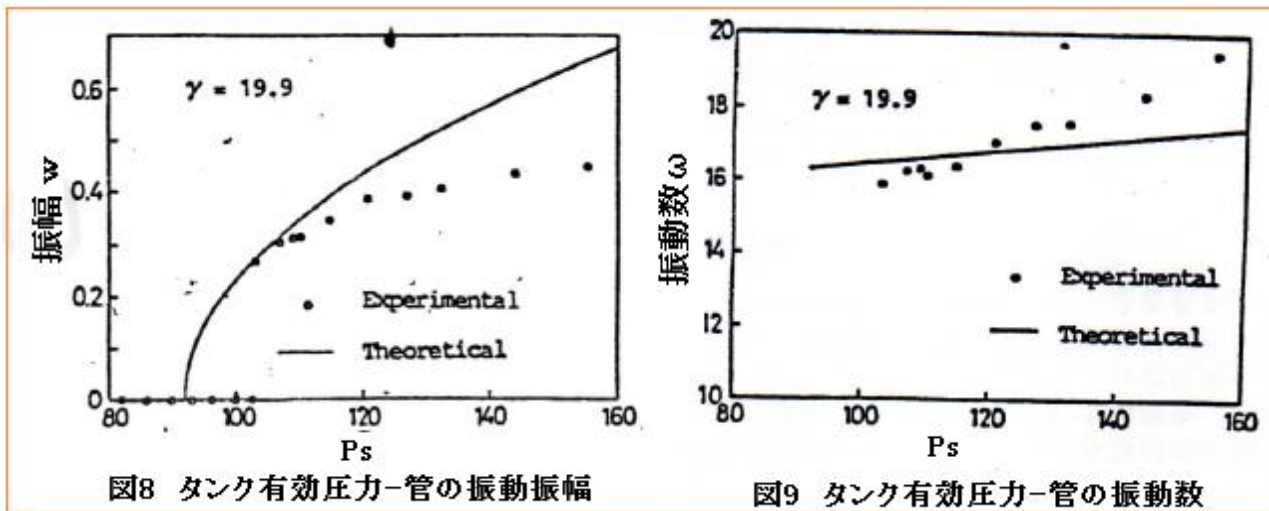


図8 タンク有効圧力-管の振動振幅

図9 タンク有効圧力-管の振動数

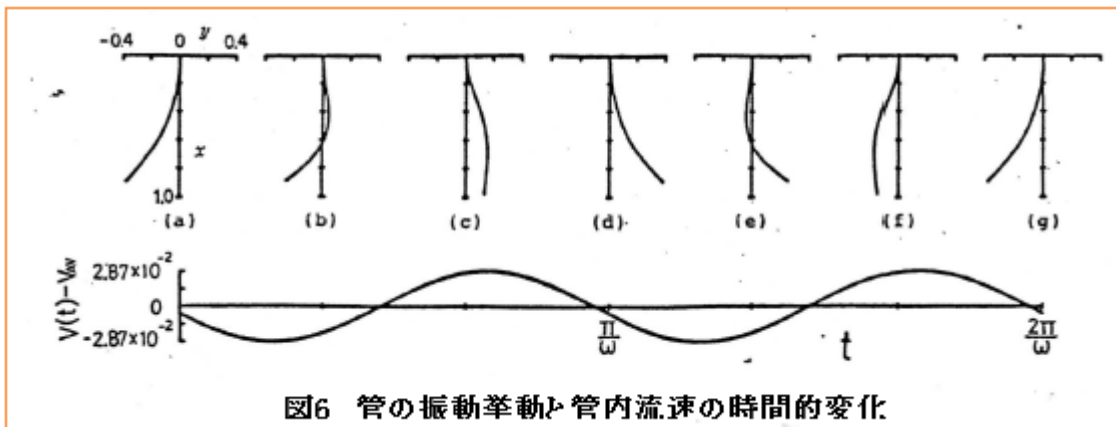


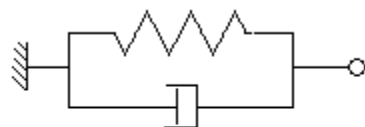
図6 管の振動挙動と管内流速の時間的变化

## 【 第 2 章の補足説明 】

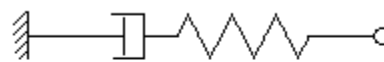
(\*13) 粘弾性体には線形粘弾性体と非線形粘弾性体があるが、ケルビン=フォークトタイプは前者に属しマクスウェルタイプとともによく用いられている。弾性係数  $E^*$  は

$$\text{ケルビン=フォークトタイプ: } E^* = E + i\omega \eta$$

$$\text{マクスウェルタイプ: } E^* = (1/E + 1/i\omega \eta)^{-1}$$

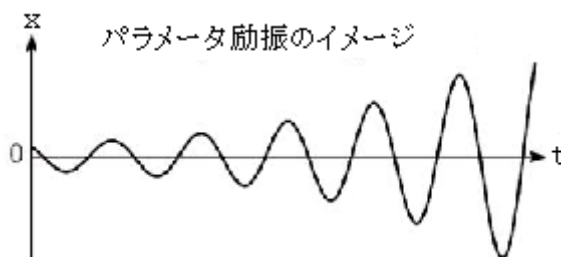


(a) ケルビン=フォークトタイプ  
(クリープタイプ)



(b) マクスウェルタイプ  
(応力緩和タイプ)

(\*14) パラメータ励振は係数励振やパラメトリック励振とも呼ばれる。運動方程式の媒介定数  $m, c, k$  が周期的に時間変化する場合に発生する振動現象をいう。各種電気回路やパンタグラフプロペラのような駆動系あるいはブランコのような遊技設備などで昔から知られた現象である。解法としてはフロケ理論/マシュー方程式/ヒル方程式など。



### 3. 流体輸送管に関する情報の運用

流体輸送管の不安定あるいはその振動問題は、プラント設備設計の観点からかなり特殊な部類にはいる。ただ短期的ながら高速で流体を輸送したりフレキシブルホースをつないで操作する局面は多々見受けられる。その場合、以上で紹介したような情報は何らかの操作上の指標になるかも知れない。ここでは Blevins テキスト、Paidoussis-Issid 文献、葉山文献及び吉沢文献を引用しているが、この他にも関連するテキストや文献が多々あり、総括的な TS 化がむずかしい(将来の課題?)。ここでは引用した 4 つの文献の範囲で情報の運用を考えてみたい。

(1) まず、ピン-ピン支持(両端単純支持)のパイプについて。Blevins テキストにあるように内部の流速がアップすると管の固有振動数が低下して内部流れ/外部流れにある加振振動数と共鳴/共振を起こす恐れがある(例えば、一説によればトランスアラビアン石油パイプラインの破損は低下した固有振動数とカルマン渦振動数の共振によるものとされる)。従って機械振動にしる流体振動にしる何らかの加振源が予想されるときは固有振動数を確認すべきである。この場合

Blevins テキストの(10-28)式あるいは Fig.10-3

が使える。また固定-固定支持や固定-自由支持についても、通常の固有振動数を用いてピン-ピン支持の結果をスライドすることである程度の憶測を得ることができると思われる。

また流速が高いと自励的な振動が起きて不安定化すると云われる。これについては Blevins のテキストには殆ど具体的に触れられていない。しかるに Paidoussis-Issid 文献では

$$\text{質量比 } \beta \text{ が低い時} \rightarrow \text{流速} > \text{限界流速 即ち } (\pi/L)(EI/\rho A)^{1/2}$$

$$\text{質量比 } \beta \text{ が高い時} \rightarrow \text{流速} > \text{限界流速の 2 倍 即ち } 2(\pi/L)(EI/\rho A)^{1/2} \text{ 付近}$$

の場合に不安定(フラッタ)が起きるとされている。質量比 $\beta$ は、全体流量に対する流体重量の割合であるから薄肉/大径管で流体重量の割合が大きくなると限界流速が増える。ただ一般に細管即ちチューブが対象になるので、**流速 > 限界流速 即ち  $(\pi/L)(EI/\rho A)^{1/2}$**  の時にノタウチが起きると考えてよいと思う。

(2) 次いで**カンチレバー管(片持ち支持パイプ)**について。カンチレバー管の挙動はピン・ピン支持の場合とかなり違って複雑になる。多分、流速増加による固有振動数低下では説明がつかないので複素固有値解析によって直接的に安定性を評価せざるを得ないようだ。この場合、

Blevins テキストの **Fig.10-7、 Fig.10-8**

が適用できる。これらのグラフは少しわかりにくいかもしれない。縦軸の値は無次元化されておりもし縦軸  $vL(\rho A/EI)^{1/2}$  あるいは  $\omega L(M/EI)^{1/2}$  と横軸  $\beta$  の交点が図中の曲線に乗れば、ちょうど限界状態にあり、交点が曲線を越えれば不安定状態、交点が曲線を越えなければ安定状態になる。なお角振動数 $\omega$ は計測値ということになる。従って**安定性評価は Fig.10-7**で行う。Fig.10-8は単に限界振動数を確認するだけの使い方になると思う。葉山文献や吉沢文献もカンチレバー管を扱っている。葉山文献はやや特殊だが管端エルボについては指摘通り要注意である。吉沢文献はPaidoussis 文献と同じく解析による挙動把握で、エンジニアリング的には過剰すぎるようだ。

(3) 次いで**曲管**について。ここでは曲管といているが、実際は**コイルチューブ**や**ホースリール**等を指している。コイルチューブは熱交や攪拌槽でよく使われている。

安定性は **Fig.10-10** や **Fig.10-11** から限界流速を求めて判断する。即ち無次元角度( $\phi/2\pi$ )から曲線上の限界値を読み取り限、限界流速  $v_c$  を **(限界値/R)(EI/ $\rho A$ )<sup>1/2</sup>** から計算して

実際流速  $v >$  限界流速  $v_c \rightarrow$  不安定、 実際流速  $v <$  限界流速  $v_c \rightarrow$  安定

と判定する。固有振動数については **Fig.10-12** や **Fig.10-13** から求める。

なお Fig.10-10/ Fig.10-11 は初期ホース(流体圧力や流体反力による)の影響が含まれていないので多分に安全側である。ただどの程度安全側になっているかはわからない。初期フォースの影響については文献(7)で議論されている。また Fig.10-10,10-11 では面外モードしか与えられていないが通常コイルチューブの支持拘束が半径方向にとられていて面内モードの振動が起きにくいのではないと思われる。

#### 引用文献テキスト類：

- (1) R.D Blevins 「low-induced vibration」 10. Vibrations of a pipe conveying a fluid flow  
(Van Nostrand Reinhold Copany)
- (2) “Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid” by M. P. Paidoussis & N. T. Issid  
Journal of Sound and Vibration (1974) 33(3),267-294
- (3) 「管内流体振動による配管系の振動応答」(第1報 管内振動流による起振力) 葉山,松本  
(JSME 論文集(C 偏) Vol 52 No.476) S61
- (4) 「細長い弾性管の内部流れによる横振動」吉沢ほか (JSME 論文集(C 偏) Vol.52 No.474)S61
- (5) 日本機械学会編「事例に学ぶ流体関連振動(第2版)」 4.1 直管・曲がり管
- (6) 坂田「エンジニアリング・サイエンス講座 11 振動と波動の工学」
- (7) “The Effect of Initial Forces on the Hydro-elastic Vibration and Stability  
of Planar Cubed Iube” by I. L. Hill & C. G. Davis  
(Journal of Applied Mechanics Jun 1974 – Transactions of ASME)

## 文献(1)に引用された文献(リスト)

- 10-1. Ashley, H., and G. Haviland, "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid," *J. Appl. Mech.* 17, 229-232 (1950).
- 10-2. Housner, G. W., "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid," *J. Appl. Mech.* 19, 205-208 (1952).
- 10-3. Niordson, F. I. N., "Vibrations of a Cylindrical Tube Containing Flowing Fluid," *Trans. Roy. Inst. Technol., Stockholm* 73 (1953).
- 10-4. Handelman, G. H., "A Note on the Transverse Vibration of a Tube Containing Flowing Fluid," *Quarterly of Applied Mathematics* 13, 326-329 (1955).
- 10-5. Liu, H. S., and C. D. Mote, "Dynamic Response of Pipes Transporting Fluids," *J. Eng. for Industry*, 96, 591-596 (1974).
- 10-6. Dodds, H. L., and H. Runyan, "Effect of High-Velocity Fluid Flow in the Bending Vibrations and Static Divergence of a Simply Supported Pipe," *National Aeronautics and Space Administration Report NASA TN D-2870*, June 1965.
- 10-7. Long, R. H., "Experimental and Theoretical Study of Transverse Vibration of a Tube Containing Flowing Fluid," *J. Appl. Mech.* 22, 65-68 (1955).
- 10-8. Naguleswaran, S., and C. J. H. Williams, "Lateral Vibrations of a Pipe Conveying a Fluid," *J. Mech. Eng. Sci.* 10, 228-238 (1968).
- 10-9. Gregory, R. W., and M. P. Paidoussis, "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid—I Theory," *Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A* 293, 512-527 (1966).
- 10-10. Herrmann, G., and R. W. Bungay, "On the Stability of Elastic Systems Subjected to Nonconservative Forces," *J. Appl. Mech.* 31, 435-440 (1964).
- 10-11. Nemat-Nassar, S., S. N. Prasad, and G. Herrmann, "Destabilizing Effect on Velocity-Dependent Forces in Nonconservative Systems," *AIAA J.* 4, 1276-1280 (1966).
- 10-12. Benjamin, T. B., "Dynamics of System of Articulated Pipes Conveying Fluid—I Theory," *Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A* 261, 457-486 (1961).
- 10-13. Hopkins, G. R., "Stability of Fluid Conveying Tubes With Periodic Perturbations," PhD dissertation, University of Alabama, 1969.
- 10-14. Hill, J. L., and C. P. Swanson, "Effects of Lumped Masses on the Stability of Fluid-Conveying Tubes," *J. Appl. Mech.* 37, 494-497 (1970).
- 10-15. Svetlitskii, V. A., "Vibrations of Flexible Hoses Filled With a Moving Fluid (Fuel)," *Izv. Vysshikh Uchebn. Zavedenii, Mashinostr.* 3, 22-30 (1966).
- 10-16. Springfield, T. H., "Stability and Vibration of Fluid-Conveying Incomplete Circular Tubes," PhD dissertation, University of Alabama, 1970.
- 10-17. Unny, T. E., E. L. Martin, and R. N. Dubey, "Hydroelastic Instability of Uniformly Curved Pipe-Fluid Systems," *J. Appl. Mech.* 37, 617-622 (1970).
- 10-18. Chen, S. S., "Out-of-Plane Vibration and Stability of Curved Tubes Conveying Fluid," *J. Appl. Mech.* 40, 362-368 (1973).
- 10-19. Hill, J. L., and C. G. Davis, "Effect of Initial Forces on the Hydroelastic Vibration and Stability of Planar Curved Tubes," *J. Appl. Mech.* 41, 355-359 (1974).
- 10-20. Crandall, S. H., *Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems*, McGraw-Hill, New York, 1968, pp. 300-395.
- 10-21. Bishop, R. E., and D. C. Johnson, *The Mechanics of Vibration*, Cambridge University Press, New York, 1960.
- 10-22. Gregory, R. W., and M. P. Paidoussis, "Unstable Oscillations of Tubular Cantilevers Conveying Fluid—II Experiments," *Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A* 293, 528-542 (1966).