

【整番 FE-20-TM-017】	流体輸送管の不安定化と振動に関する情報	
分類：流れ(流れ不安定)/種別：技術メモ	作成年月：H29.07/改訂：Ver.0.0 (H29.08)	作成者：N. Miyamoto

2分冊その1(1/2)

全28枚

例えばゴムホースのように柔らかい管は、内部流れが速くなると不安定になり蛇行やノタウチを起し問題になることがある。この類いの問題は、入出荷ライン等に付けた接続ホース/ジャバラ管/関節管や防消火設備に設けた緊急放水管あるいはプロセス設備に付けた緊急バイパス等で予想される。何れも流れがかなり高速で衝撃的/過渡的/間欠的であること、また非金属管が用いられていることあるいは金属管であっても支持が曖昧であることが特徴になっている。TS 作成者も閉塞弁の急開によって 20m/s 近い高速流れになる薄肉チューブの検討を行なって固有振動数の低下と不安定傾向を認識したことがある。その場合、下記テキストの情報を使用している。

R. D. Blevins “Flow-induced Vibration “

10. Vibrations of a pipe containing a fluid flow

このテキスト情報はやや古くて最新とは言い難いが、この種の問題についてある程度の手引きを与えているような気がする。比較的新しい情報としては、例えば JSME 流体関連振動⁽⁵⁾の 4.1 節もある。ここでは Blevins テキストにそのほかの関連情報をプラスして TS 化してみた。内容的には文献紹介の羅列になっており整理されていないが、この種の問題に遭遇した時、何らかの参考あるいは糸口になるのではないかと思う。以下。

1. 流体輸送管のダイナミックス(Blevins テキストの内容紹介)

以下、流体輸送管の不安定に関する Blevins のテキスト⁽¹⁾の 10.1～5 の記述内容(意識)とその補足説明を記す。

10.1 はじめに

パイプを通る流体の流れはパイプ壁を圧迫してパイプを反らせる。特に加速された流体の流れに生じるパイプの反りは水撃によって起きる。この水撃にもっとも似た現象は蛇口をひねったときに朝の静寂を破って起きる水道のゴロゴロ音である。パイプを通る定常の流体流れでもパイプの反りは起きる。例えば肉厚の薄いパイプを通る高速流れによってパイプは座屈するか、のたうちまわる。高速の流れによって生じるこれらの反りや歪みがいわゆる**流体輸送配管の不安定**である。

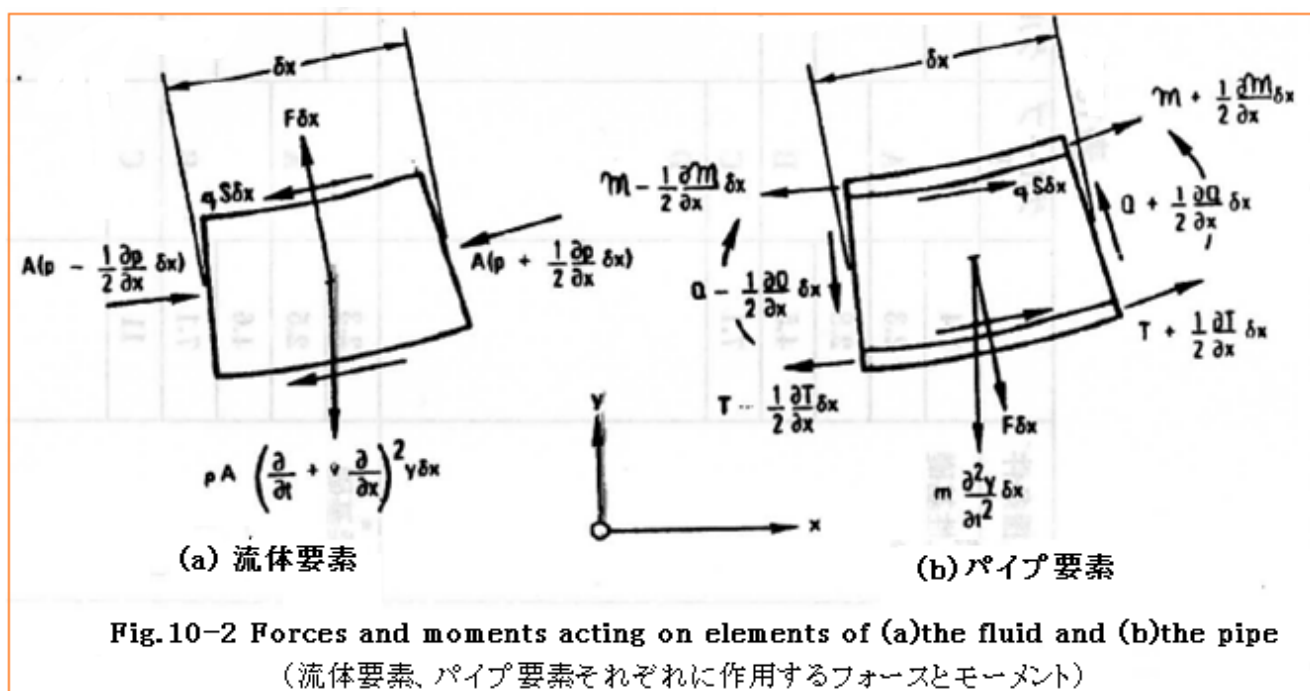
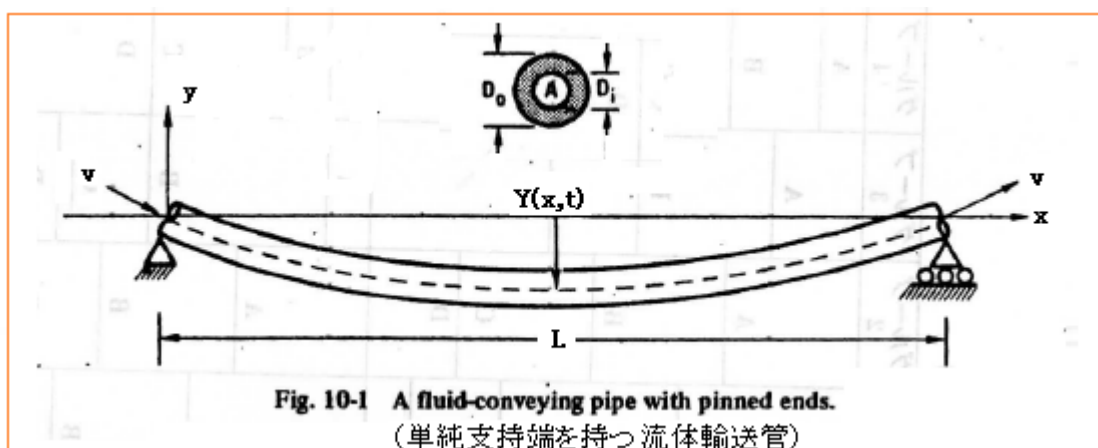
流速が増加するにつれて一般にパイプの固有振動数が減少するので、流体輸送管の安定性は設備保全上重要である。特に薄肉の可撓管に高速流を流すときや、ロケットモータや水タービンへのフィードラインでは**固有振動数の減少**は重要である。もし固有振動数がある限界を下回るようになると、パイプは共鳴(共振)あるいは疲労破損に敏感になる。流速が十分に大きくなるとパイプは不安定になる。これに最も近い現象は、抑えの効かないガーデンホースのノタ打ちである。

流体輸送管の動的応答は破断したパイプの過渡振動に関連して最近スタディされている(1977 年現在)。もしパイプがその断面にわたって破損するならば、拘束されていないパイプの可撓部分が流体を噴き出しながら離脱してのたうちまわり近隣の構造物に衝撃を与える。パイプホイップは動力プラントの配管設備で起こり得る破損モードの一つである。

流体輸送管の振動は初めトランスアラビアンパイプラインで起きた**流体振動**と関連してスタディ

されている^(R10-1)。Housnerは流体輸送管の修正運動方程式を初めて誘導した。かれはトランスアラビアンパイプラインの形状に対してこの方程式を解いた。修正運動方程式に関する別の解では不安定のタイプはパイプの端部条件に依存していることがわかった。両端を支持したパイプでは流速が**限界速度**を越えると弓なりになって座屈する^(R10-2~10.7)。ストレートな片持ちパイプは流速が限界流速を越えたとき、大きく振れまわって破損する^(R10-8~11)。関節接続パイプ^(R10-12)、非定常流れのパイプ^(R10-13)、集中質量を持ったパイプ^(R10-14)及び湾曲パイプ^(R10-15~R10-19)について解が得られている。

本章ではストレートな流体輸送管の方程式を Niordson ら^(R10-3/10-9)のアプローチを用いて誘導する。これらの方程式は固有振動数とピン・ピン支持のパイプスパンと片持ちパイプの不安定発生について解かれる。最後に安定性解析というよりむしろ強制振動アプローチを用いて、パイプホイップの見地から議論してみたい (これに関しては別途 TS 参照のこと)。



10.2 運動方程式

Fig.10.1 はその平衡位置から横撓み $Y(x,t)$ を持ったパイプラインの 1 スパンを示す。密度 ρ の流体は流れ断面積 A を通って圧力 p 及び一定速度 v で流れる。パイプ長さは l 、パイプの縦弾性

係数は E 、断面慣性モーメントは I である。Fig.10.2 のパイプから切り出した要素を考える。識別のため Fig.10.2(a) の流体要素を Fig.10.2(b) のパイプ要素から抜出してみる。流体は撓んだパイプを通るため、パイプの曲率変化と管路の横振動によって加速される。これらの加速は、チューブ壁によって流体要素に作用する流体圧力の垂直成分と流体要素に作用する単位長さ当たりの圧力フォース F の抵抗を受ける。微小変形のもとで流体要素にかかる y 方向の力のバランスは次のようになる。

$$F - pA(\partial^2 Y / \partial x^2) = \rho A(\partial / \partial t + v \partial / \partial x)^2 Y \quad \text{-----}(10-1) \quad (*1)$$

パイプ長さ方向の流体中の圧力勾配はチューブ壁の流体摩擦によるせん断応力の抵抗を受ける。一定流速では Fig.5-2(a) のパイプ軸に平行なフォースの和をとって

$$A \partial p / \partial x + qS = 0 \quad \text{-----}(10.2) \quad (*2)$$

ここで S =パイプの内面濡れ縁、 q =パイプ内表面のせん断応力。

パイプ要素の運動方程式は Fig.10-2(b) から導かれる。パイプ軸に平行な力の和をとると

$$\partial T / \partial x + qS - Q(\partial^2 Y / \partial x^2) = 0 \quad \text{-----}(10-3) \quad (*3)$$

ここで、 T =パイプの長手方向引張力、 Q =パイプの直交せん断力。

パイプ軸に直角なパイプ要素上の力はパイプ要素を Y 方向に加速する。微小変形では

$$\partial Q / \partial x + T(\partial^2 Y / \partial x^2) - F = m(\partial^2 Y / \partial t^2) \quad \text{-----}(10-4) \quad (*4)$$

ここで、 m =空管の単位長さ当たりの質量。

直交せん断力 Q はパイプの曲げモーメント M_0 とパイプの変形に関係づけられる。即ち

$$Q = -(\partial M_0 / \partial x) = -EI(\partial^3 Y / \partial x^3) \quad \text{-----}(10-5) \quad (*5)$$

Q は $(\partial^3 Y / \partial x^3)$ に比例するので、(10-3) 式の左辺の第 3 項は Y^2 のオーダーを持ち、微小変形では無視できる。(10-1)、(10-4) 及び(10-5) 式を組み合わせると変数 F, Q を取り除くと、

$$EI(\partial^4 Y / \partial x^4) + (pA - T)(\partial^2 Y / \partial x^2) + \rho A(\partial / \partial t + v \partial / \partial x)^2 Y + m \partial^2 Y / \partial t^2 = 0 \quad \text{-----}(10-6)$$

せん断応力 p は(10-2)(10-3) から取り除けるので

$$\partial(pA - T) / \partial x = 0 \quad \text{-----}(10-7)$$

この式は $(pA - T)$ がパイプスパンに沿う位置に依存しないことを暗示している。パイプ端 $x=L$ でパイプの引張は零で、流体圧力は大気圧に等しい。それ故 $x=L$ にて、 $p=T=0$ で、(10.7) 式は

$$pA - T = 0 \quad (\text{全ての } x \text{ につき}) \quad \text{-----}(10.8)$$

もしパイプ端が収束性のノズルになっているならモーメンタムを考慮して $pA - T = \rho Av(v_j - v)$ となる(但し v_j =スロート速度)⁽¹⁰⁻⁹⁾。本解析ではノズルの効果は含まれない。

(10-6) 式に(10-8) 式を代入して、次の流体輸送管の自由振動の運動方程式が得られる。

$$EI(\partial^4 Y / \partial x^4) + \rho Av^2(\partial^2 Y / \partial x^2) + 2 \rho Av\{\partial^2 Y / (\partial x \partial t)\} + M(\partial^2 Y / \partial t^2) = 0 \quad \text{-----}(10-9)$$

ここで、 $M = m + \rho A$ はパイプ単位長さ当たりの流体も含めた質量、この式の最初と最後の項は流体流れの有無によらない通常の運動方程式の剛性及び質量項である。左辺の第 2 項はパイプの湾曲に合わせて流体の方向を変えるために必要な力を表わしている。左辺の第 3 項は、スパン内の

各ポイントが角速度 $\{\partial^2 Y / (\partial x \partial t)\}$ で回転するように流体要素を回転させるに必要な力を表わしている $\{\rightarrow \partial(\partial Y / \partial x) \partial t\}$ 。

Fig.10-1 のピン・ピン支持パイプスパンに伴う境界条件は

$$Y(0,t)=Y(L,t)=0, [\partial^2 Y / \partial t^2](0,t)=[\partial^2 Y / \partial t^2](L,t)=0 \quad \text{-----}(10-10)$$

$X=0$ でクランプ(固定)、 $x=L$ でフリーの片持ち梁の境界条件は、

$$Y(0,t)=[\partial Y / \partial x](0,t)=0, [\partial^3 Y / \partial x^3](L,t)=[\partial^2 Y / \partial x^2](L,t)=0 \quad \text{-----}(10-11)$$

(10-9)式の運動方程式は、(10.3)節で(10-10)式の境界条件式、(10.4)節で(10.11)の境界条件式を用いて解かれる。ラグランジュ方程式を用いた流体輸送管の運動方程式とその境界条件に関する代替的な誘導も文献^{R(10-20)}に見られる。

(**Paidoussis** は類似の物理モデルを用い粘弾性材料のパイプに対し非常に精細な運動方程式を得ている。JSME テキスト^⑥をこの運動方程式の解から得られた結果を紹介している。)

10.3 ピン・ピン支持(両端単純支持)パイプスパンの自由振動

(10.9)式左辺第3項の混合微分はこの式の解を求めるのを困難にしている。一般的なモーダル解析法のようにその方程式を時間と空間に分離できない。例えばもし、試行的な解のフォーム

$$Y(x,t)=a \phi(x) \sin \omega(t) \quad \text{-----}(10-12)$$

を(10.9)式に代入するなら、(10.9)式左辺の第1項、第2項及び第4項は時間依存 $\sin \omega t$ を持つけれど第3項は $\cos \omega t$ に変わることがわかる。このことから解は次のように書かれるべきと思われる。

$$Y(x,t)=a_1 \phi(x) \sin \omega t + a_2 \phi(x) \cos \omega t \quad \text{-----}(10-13)$$

ここで、 a_1 と a_2 は相互依存になる。

Fig.10-1 に示され(10-10)式で与えられるパイプスパンのピン・ピン支持の境界条件は、次の調和波モード形(固有関数)で満足される。

$$\phi_n(x)=\sin n \pi x/L \quad (n=1,2,3,\dots) \quad \text{-----}(10.14)$$

もしこのモード形のいずれかを(10.9)式に代入すれば、(10.9)式の左辺の第1,第2,第4項が $\sin(n \pi x/L)$ に比例して変り、一方、混合微分項の第3項は $\cos((n \pi x/L))$ に比例して変わることがわかる。もし対称モード形が解に用いられるなら混合微分項は非対称項を発生する。従って解としては空間的に対称項と非対称項を持ちこれらの項の係数は独立していなければならない。

以上の条件は、ピン端部条件を持った流体輸送管の運動方程式の解が \sin/\cos 時間成分を持った対称/非対称空間モード形の和として表わされることを意味している。即ち

$$Y_j(x,t)=\sum^* a_n \sin(n \pi x/L) \sin(\omega_j t) + \sum^{**} a_n \sin(n \pi x/L) \cos(\omega_j t) \quad \text{-----}(10-15)$$

($\sum^* \rightarrow n=1,3,5,\dots$ の和、 $\sum^{**} \rightarrow n=2,4,6,\dots$ の和、 $j=1,2,3,4,\dots$)

ここで、 $\omega_j=j$ 次振動モードの固有振動数。

この解を(10.9)式に代入すれば、混合微分項 (10-9 式の第3項)は下記を含む項を発生する。

$$\cos(n\pi x/L) \quad \text{但し } n=1,2,3,\dots \quad \text{-----}(10-16)$$

これらの項はパイプスパンにわたる \sin 関数のフーリエ級数に展開できる(*6)。

$$\cos(n\pi x/L) = \sum b_{nr} \sin(r\pi x/L) \quad (\text{但し } n=1,2,3,\dots, \Sigma \rightarrow r=1,2,3,\dots \text{の総和}) \quad \text{-----}(10-17)$$

$$b_{nr} = (2r/\pi) \{1 - (-1)^{n+r}\} / (r^2 - n^2) \quad \text{-----} (10-18)$$

この結果を用いて(10-9)式の項はそれが $\sin \omega t$ を含むか $\cos \omega t$ を含むかでグループ化できる。これら各グループの係数は(10.9)式を満たすため零に等しくセットされねばならない。これによって次の方程式のセットが与えられる。

$$a_n [EI n^4 (\pi/L)^4 - \rho A v^2 n^2 (\pi/L)^2 - M \omega_j^2] = (8 \rho A v \omega_j / L) \sum a_r \{r^2 / (r^2 - n^2)\} \quad \text{-----}(10-19)$$

(但し $n=1,3,5,\dots$ 、 $r=2,4,6,\dots$ 、 $\Sigma \rightarrow r$ の総和)

$$a_n [EI n^4 (\pi/L)^4 - \rho A v^2 n^2 (\pi/L)^2 - M \omega_j^2] = (8 \rho A v \omega_j / L) \sum a_r \{r^2 / (r^2 - n^2)\} \quad \text{-----}(10-20)$$

(但し $n=2,4,6,\dots$ 、 $r=1,3,5,\dots$)、 $\Sigma \rightarrow r$ の総和)

これらの方程式は次のマトリックスに置くことができる。

$$[[K] - \omega_j^2 M [I]] \{a\} = 0 \quad [\text{但し } \{a\} = \text{縦列 } \{a_1, a_2, \dots, a_n\}] \quad \text{-----}(10-21) \quad (*7)$$

ここで $[I]$ = 対角線上に 1、そのほか 0 の単位マトリックス

$[K]$ = 下記のエントリー k_{rs} を持つ剛性マトリックス

$\{a\}$ = 振幅ベクトル

$$k_{rs} = \begin{cases} EI r^4 (\pi/L)^4 - \rho A v^2 r^2 (\pi/L)^2 & ; \quad r=s, \\ (8 \rho A v \omega_j / L) \{s^2 / (r^2 - s^2)\} & ; \quad r \neq s, r+s = \text{奇数} \\ 0 & ; \quad r \neq s, r+s = \text{偶数} \end{cases} \quad \text{-----}(10-23)$$

(10-21)式の特解は次のように係数マトリックスの行列式を零におくことで得られる。

$$| [K] - \omega_j^2 M [I] | = 0 \quad \text{-----}(10-24)$$

その系は無限の固有モード数を持っているので(10-24)式の実際の解は最初の数モードのみが対象になる。もし最初の 2 モードだけが近似解に含まれるなら、 a_3, a_4, a_5, \dots は零になり(10-24)式の解は次のようになる。

$$[1 - (v/v_c)^2 - (\omega_j/\omega_N)^2] [16 - 4(v/v_c)^2 - (\omega_j/\omega_N)^2] + \{256/(9\pi^2)\} (v/v_c)^2 (\rho A/M) (\omega_j/\omega_N)^2 = 0 \quad \text{-----}(10-25) \quad (*8)$$

ここで ω_N は流体流れがないときの両端単純支持パイプの基本固有振動数で

$$\omega_N = (\pi^2/L^2) (EI/M)^{1/2} \quad \text{-----}(10-26)$$

そしてパイプの静的座屈に対する流れの限界速度は(*9)、

$$v_c = (\pi/L) \{EI/(\rho A)\}^{1/2} \quad \text{-----}(10-27)$$

(10-25)式の解は最初の 2 つの固有振動数 $\omega_j (j=1,2)$ を (v/v_c) と $(\rho A/M)$ の関数として決定する。

(10-25)式から得られる 2 つの最低次の固有振動数の解は、

$$(\omega_j/\omega_N)^2 = \alpha \pm [\alpha^2 - 4\{1 - (v/v_c)^2\} \{4 - (v/v_c)^2\}]^{1/2} \quad (j=1,2) \quad \text{-----}(10-28) \quad (*10)$$

$$\text{ここで } \alpha = 8.5 - (v/v_c)^2 [2.5 + \{128/(9\pi^2)\} (\rho A/M)] \quad \text{-----}(10-29)$$

ω_1 と ω_2 は全ての $(v/v_c) \ll 1$ に対し実数を取り ω_1 は流体輸送管の基本固有振動数であり限界速度

と質量比の関数になる(**Fig.10-3** 参照)。 ω_1 は質量比の影響が希薄である。もし、 $(\rho A/M)$ が零におけるなら、(10-28)式は次式で近似できる。

$$\omega_1/\omega_N = [1 - (v/v_c)^2]^{1/2} \quad \text{-----}(10-30)$$

この場合、 $v \ll v_c$ で $\rho A/M \ll 0.5$ では2.6%内の精度に、 $v \ll v_c$ で $\rho A/M \ll 1$ では12.8%の精度になる。

固有振動数は流体の流速が増加するにつれて減少する。もし管内の流速が零なら(10-28)式では最初の管の固有振動数が ω_N と $4\omega_N$ であることが予測される。これらの固有振動数は流体流れに気にすることなく求めることができる。流速が限界流速に等しいと配管の最低固有振動数が零であることが、(10-25)式あるいは(10-28)式からわかる。

$$v = v_c \rightarrow \lim \omega_1 = 0 \quad \text{-----}(10-31)$$

$v = v_c$ のとき、パイプは弓なりになり座屈する。何故ならパイプの湾曲に流体を一致させるために必要な力はパイプ剛性より大きいからである。数学的には座屈不安定は(10-9)式第3項の混合微分項 $2\rho Av(\partial^2 Y/\partial x \partial t)$ から生じる。この混合微分項は(10-19)(10-20)(10-25)式の右辺を発生する。

混合微分項はパイプの変形と 90° 位相にありパイプの流速と常に同位相にある、流れ流体によってパイプに負荷される力を表わしている。この力は流体流れからエネルギーを引き出しそのエネルギーをパイプ曲げに投入して、当初は振動、究極は座屈を与えるもので、本質的に負性減衰メカニズムに他ならない。

もし(10-25)式を用いて流体輸送管の2つの最低次振動数が得られるなら、(10-20)式を用いてモード形を決定する(a_2/a_1)比を求めることができる。基本モードの場合、

$$(a_2/a_1) = -\{8/(3\pi^2)\}(\omega_1 L/v_c)(v/v_c) / \{16 - 4(v/v_c)^2 - (\omega_1/\omega_N)^2\} \quad \text{-----}(10-32) (*11)$$

ここで、 ω_1 =(10-25)式による最低次固有振動数。 $v < v_c$ の全てのケースに対し、 $|a_1/a_2| < 0.094$ であることは容易にわかる。従ってパイプはその基本固有振動数で振動するので、1次の波状曲げパイプモードがパイプの応答を支配することになる。

(10-30)式から計算される理論上の基本固有振動数と実験結果の比較を**Fig.10-4**に示す。実験は2.54 cm径/肉厚0.165 cmの1スパンのアルミ合金パイプを用いて行われた。パイプには外部リザーバから水を補給している。実験パラメータは以下の通り。

$$\rho A = 8.00 \times 10^{-3} \text{ スラグ/ft}, \quad E = 1.44 \times 10^9 \text{ lb/ft}^2, \quad I = 1.04 \times 10^{-6} \text{ ft}^4$$

$$M = 1.49 \times 10^{-2} \text{ スラグ/ft}, \quad L = 10.5 \text{ ft}, \quad (\text{但し } 1 \text{ スラグ} = 32.2 \text{ lb}) \quad \text{-----}(10-33)$$

理論値と実験結果は7.5%内で一致している。

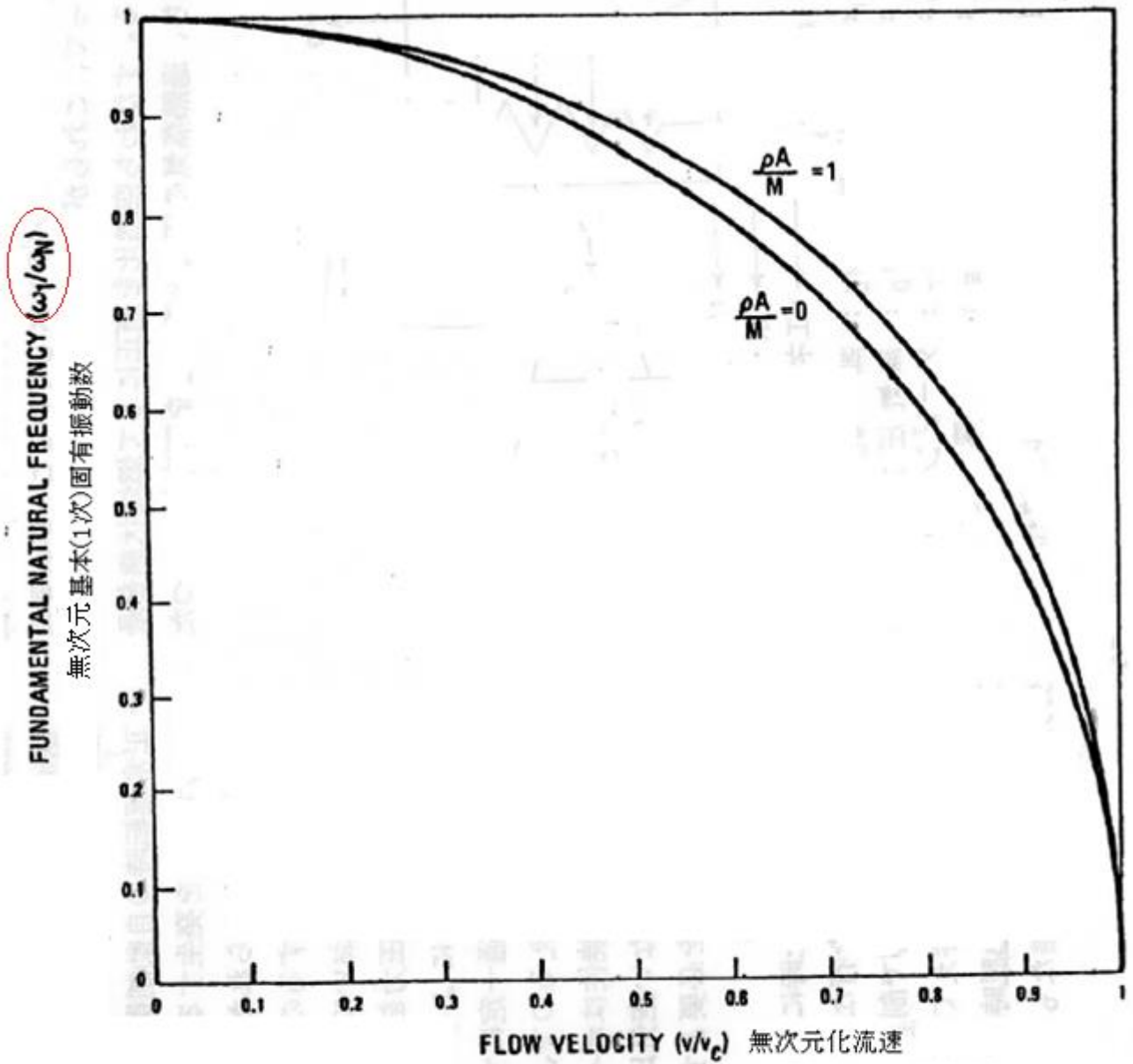


Fig. 10-3 Fundamental natural frequency of a pinned-pinned pipe (Eq. 10-28) as a function of flow velocity.

(流速を関数とする両端単純支持パイプの基本(1次)固有振動数)

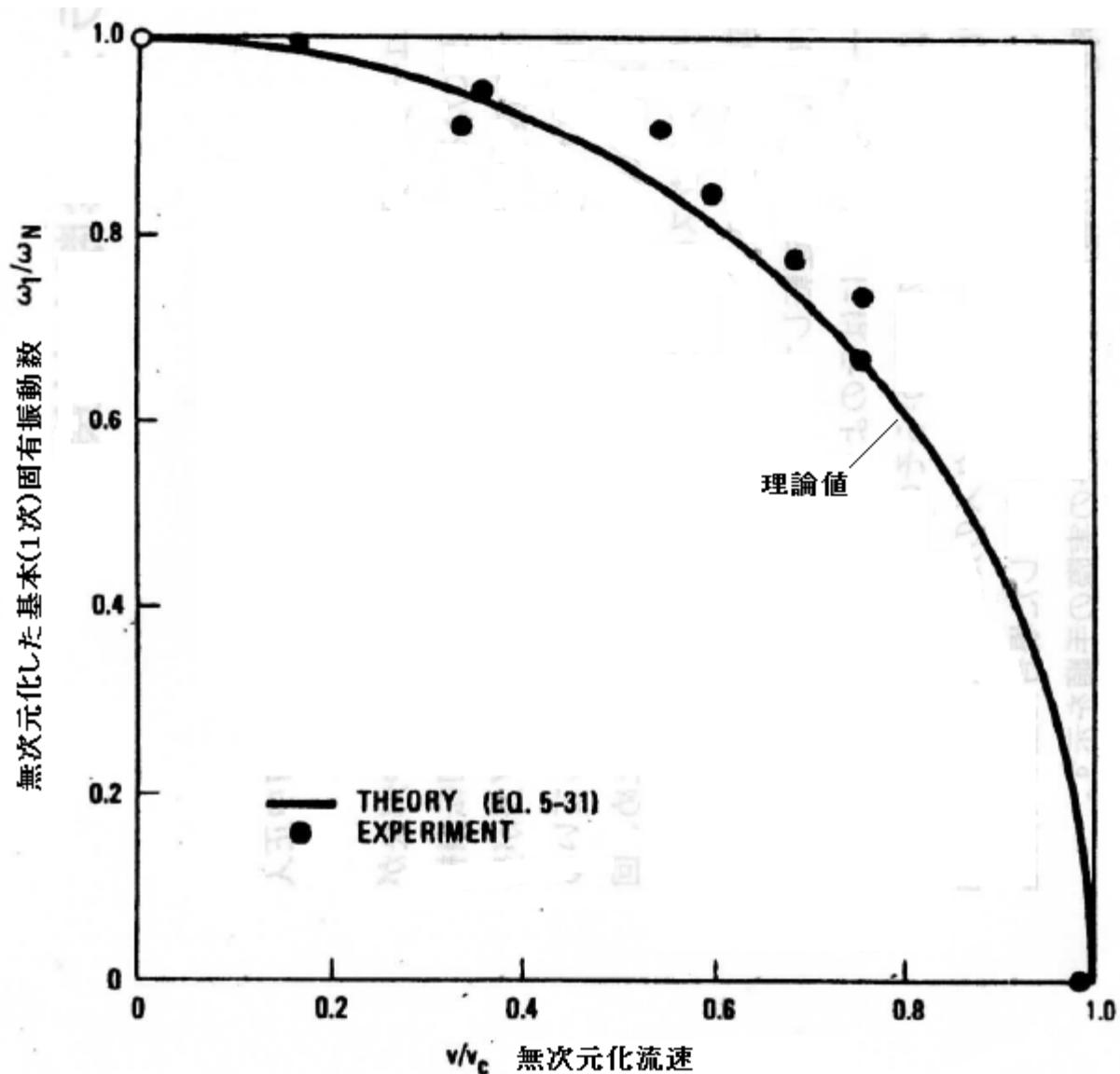


Fig. 10-4 Comparison of theoretical (Eq. 10-30) and experimental results for reduction of fundamental frequency of a pinned-pinned pipe with increasing flow velocity. (Ref. 10-6)

流速増加を関数とした両端単純支持パイプの基本固有振動数の減少についての実験値と理論値の比較

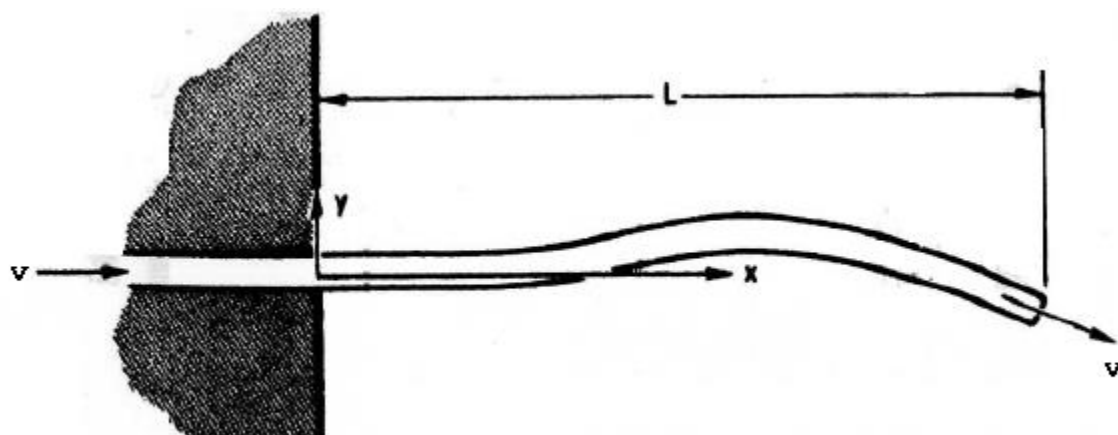


Fig.10-5 Schematic diagram of a cantilever

10.4 片持ち支持パイプの自由振動

Fig.10-5 に示されるカンチレバー(片持梁)輸送管の自由振動は(10-9)式の運動方程式を(10-11)式の境界条件のもとで解いたもの。このモードには両端単純支持(ピン・ピン支持)モードのようなシンプルな対称性がないので、その解は両端単純支持パイプスパンの解より難解である。

カンチレバータイプの自由振動には幾つかの解法があるが、ここでは文献 R(10-9)から引用している。本章で与えられる近似解法はピン・ピン支持で用いられたモーダル展開式に類似するものである。カンチレバーの撓みは次のように仮定される。

$$Y(x,t)=R[\Psi(x/L)e^{i\omega t}] \quad \text{-----}(10-34)$$

ここで R は実数部、i は虚数定数 $\sqrt{-1}$ を表わしており、ここでもし ω が実数なら

$$e^{i\omega t}=\cos \omega t+i \sin \omega t \quad \text{-----}(10-35)$$

この式は振動数 ω の定常調和振動を表わしている。もし ω が虚数なら $\omega=i\omega_R$ (ここで ω_R =実数)で

$$e^{i\omega t}=e^{-\omega_R t} \quad \text{-----}(10-36)$$

この式はもし $\omega_R>0$ なら振動の時間依存の指数関数的な減退、もし $\omega_R<0$ なら指数関数的な成長を表わしている。一般に ω は実数部と虚数部をもっており、そのためカンチレバーの振動には指数関数的な増長あるいは減退という展開が内包されている(*12)。

(10-34)式の試行解を(10-9)式の運動方程式に代入すると、次の結果が得られる。

$$\Psi''''+V^2\Psi''+2i\beta^{1/2}V\Omega\Psi'-\Omega^2\Psi=0 \quad \text{-----}(10-37)$$

ここでプライム記号は(x/L)に関する微分を表わしている。無次元定数 β, Ω は

$$\beta=\rho A/M, \quad \Omega=\omega L^2(M/EI)^{1/2}, \quad V=vL(\rho A/EI)^{1/2}, \quad M=\rho A+m \quad \text{-----}(10-38)$$

ここで、M=単位長さ当たりの[空管質量+流体質量 ρA]

流体輸送管(カンチレバー)のモード形は流体流れのないときに見られるモード形を構成する級数で近似化される。

$$\Psi(x/L)=\sum a_r\phi_r(x/L) \quad (r=1\sim\infty) \quad \text{-----}(10-39)$$

$$\phi_r(x/L)=\cosh(L\lambda_r x/L)-\cos(L\lambda_r x/L)-\sigma_r\{\sinh(L\lambda_r x/L)-\sin(L\lambda_r x/L)\} \quad \text{-----}(10-40)$$

最初の3モードに対し $L\lambda_r$ と σ_r の値は次の通り。

r	$L\lambda_r$	σ_r
1	1.875	0.734099
2	4.694	1.018466
3	7.855	0.9992245

これらのモード形は(10-11)式の境界条件を満足しカンチレバー全長にわたって直交する。即ち

$$\int_0^1 \phi_r(x/L)\phi_s(x/L)d(x/L)=1 \quad (r=s \text{ の時}), \quad 0 \quad (r\neq s) \quad \text{-----}(10-41)$$

(10-39)式の級数を(10-37)式に代入すると、カンチレバー管の運動方程式は次のようになる。

$$\sum [\Psi_r''''-\Omega^2\Psi_r+V^2\Psi_r''+2i\beta^{1/2}V\Omega\Psi_r'] a_r=0 \quad (r=1\sim\infty) \quad \text{-----}(10-42)$$

この方程式セットは流体輸送のカンチレバー管の固有振動数とモード形を決定する。解は方程式のモード形の微分をカンチレバーモードの観点から級数で表現することで解くことができる。

$$\Psi_r' = \sum b_{rs} \phi_s, \quad \Psi_r'' = \sum c_{rs} \phi_s, \quad \Psi_r'''' = \lambda_r^4 \phi_r, \quad (s=1 \sim \infty) \quad \text{----- (10-43)}$$

ここで、 $b_{rs} = 4/[(\lambda_s/\lambda_r)^2 + (-1)^{r+s}]$,

$$c_{rs} = 4(\lambda_r \sigma_r - \lambda_s \sigma_s) / \{(-1)^{r+s} - (\lambda_s/\lambda_r)^2\} \quad (r \neq s \text{ のとき}), \quad \lambda_r \sigma_r (2 - \lambda_r \sigma_r) \quad (r=s \text{ の時})$$

----- (10-44)

これらの級数を(10-40)式に代入して

$$\Sigma^* [(\lambda_r^4 - \Omega^2) \phi_r + V^2 \Sigma^{**} c_{rs} \phi_s + 2i \beta^{1/2} V \Omega \Sigma^{**} b_{rs} \phi_s] a_r = 0 \quad \text{----- (10-45)}$$

ここで $\Sigma^* \rightarrow r=1,2,3,\dots,\infty$ 、 $\Sigma^{**} \rightarrow s=1,2,3,\dots,\infty$

この方程式に通して ϕ_s を乗じ、その結果得られた方程式をそのスパンにわたって積分すると、(10-41)の直交条件を用いて方程式は、次のマトリックス式で書くことができる。

$$[[K] - \Omega^2 [I]] \{a\} = 0 \quad \text{----- (10-46)}$$

ここで剛性マトリックス $[K]$ のエントリは、

$$k_{rs} = \lambda_r^4 + V^2 c_{sr} + 2i \beta^{1/2} V \Omega b_{sr} \quad (r=s \text{ のとき})$$

$$= V^2 c_{sr} + 2i \beta^{1/2} V \Omega b_{sr} \quad (r \neq s \text{ のとき}) \quad \text{----- (10-47)}$$

マトリックス式(10-46)の特解は係数マトリックスの行列式が零の時にのみ存在する。

$$| [K] - \Omega^2 [I] | = 0 \quad \text{----- (10-48)}$$

この方程式の解が無次元質量比 β および無次元速度パラメータ V の関数としての無次元固有振動数を決定する。同じように両端単純支持パイプスパンの無次元固有振動数(10-28)式の無次元振動数は限界速度パラメータと質量比 β の関数であることがわかっている。しかし

ピン-ピン支持やクランプ-クランプ支持のように両端静止状態のパイプの無次元振動数は殆ど質量比に依存しないが、カンチレバーパイプのような1端自由のパイプの無次元振動数は質量比の影響を強く受けることがわかっている。

無次元振動数 Ω は次のように実数部と虚数部からなるが、

$$\Omega = \Omega_R + i \Omega_I \quad \text{----- (10-49)}$$

(10-48)式の残りのエントリは全て実数になる。(10-35)(10-36)式から実数 Ω_R が振動を生み出し、虚数 Ω_I が $\Omega_I > 0$ ではその振動を指数関数的に縮退させ、 $\Omega_I < 0$ では増長させることが予測できる。

一般に流体輸送のカンチレバー管の振動は、 Ω_I の符号に依存して時間とともに増幅するか減少する。中立安定条件 $\Omega_I = 0$ は、不安定な指数関数的な増長と安定した一定振幅あるいは縮退の境界を定義する。

(10-48)式のマルチモード解析による中立安定条件 $\Omega_I = 0$ から得られる安定判別図を **Fig.10-6** に示す。カンチレバーパイプが $(\rho A/M) = 0.295, 0.67, 0.88$ の近傍で不安定化した後、更に流速が増加するとパイプは安定性を取り戻し、以前のように安定になる。その振動数の実数成分は中立安定パラメータに対し **Fig.10-7** に示される。

振動数の実数部分はピン-ピン支持パイプの座屈についてそうであったように、不安定発生に

おいて零にはならない。カンチレバーパイプはたとえ流速が限界流速を越えてもピン-ピン支持パイプのように弓なりになって座屈することはない。その代りガーデンホースのようにノタウチまわる。

Gregory と Paidoussis^(R10-9)は、正確な数値解析の大部分の特性を再現するには、近似解析の中に少なくとも3つのモードが含まれていなければならないことを見出した。**Fig.10-8**に示される彼らの実験データはマルチモードの理論解^(R10-22)とよく一致している。理論と実験の小さな不一致の多くはパイプの構造減衰によるものである。構造減衰によって不安定に必要な流速は少し減少する^(R10-22)。

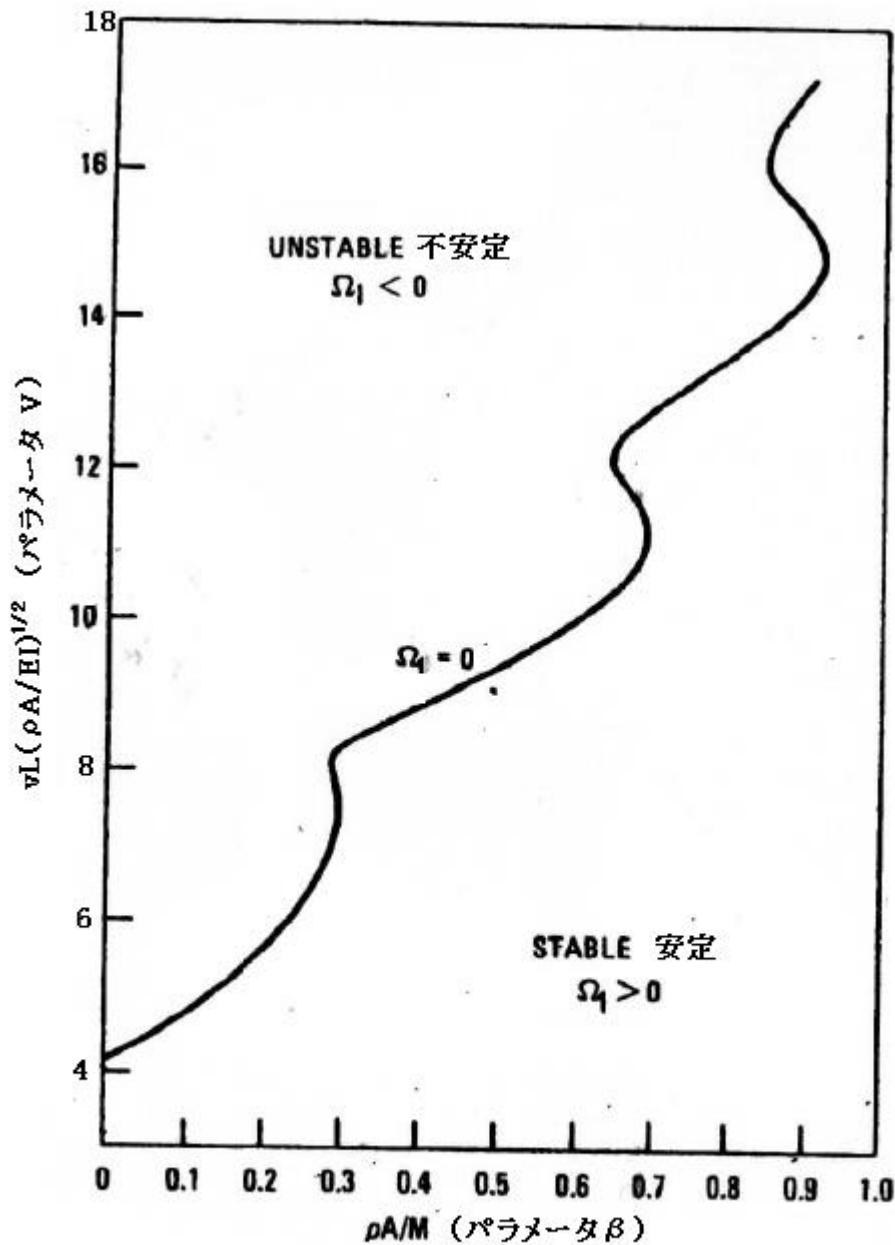


Fig. 10-6 Critical flow velocity for onset of instability in a cantilever pipe as a function of mass ratio. (Ref. 10-9)

カンチレバー管の不安定発生における限界流速-質量比の関係

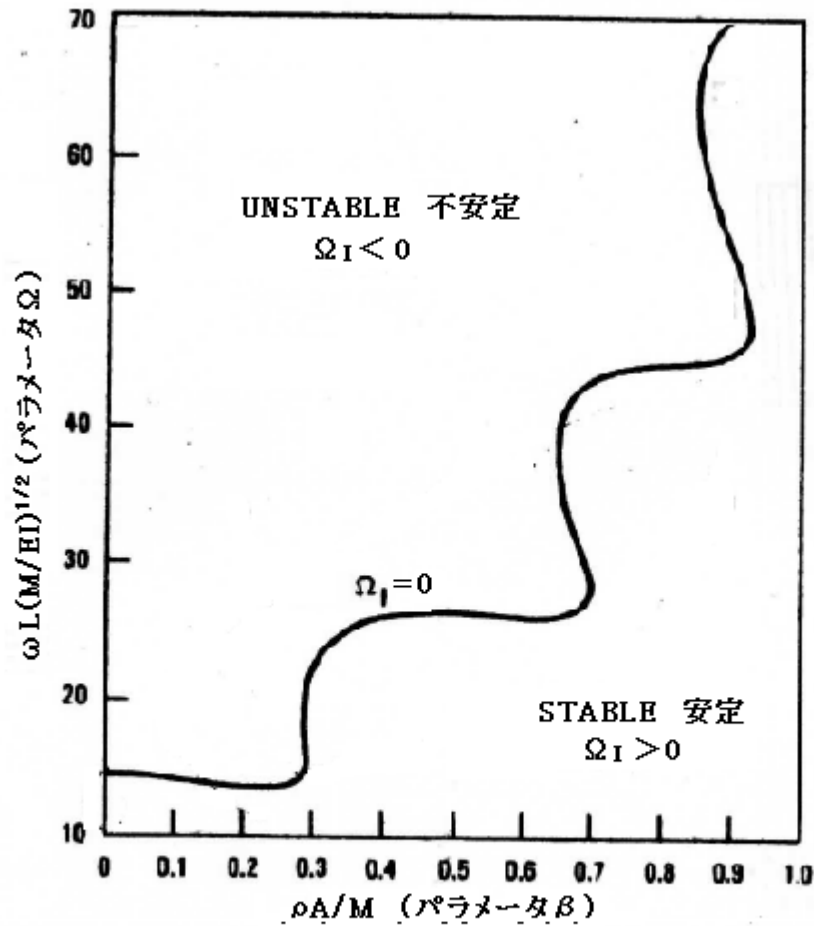


Fig. 10-7 Real component of frequency Ω_R as a function of mass ratio at onset of instability of a cantilever pipe. (Ref. 10-9)

カンチレバ-管の不安定発生における振動数 Ω 実部と質量比の関係

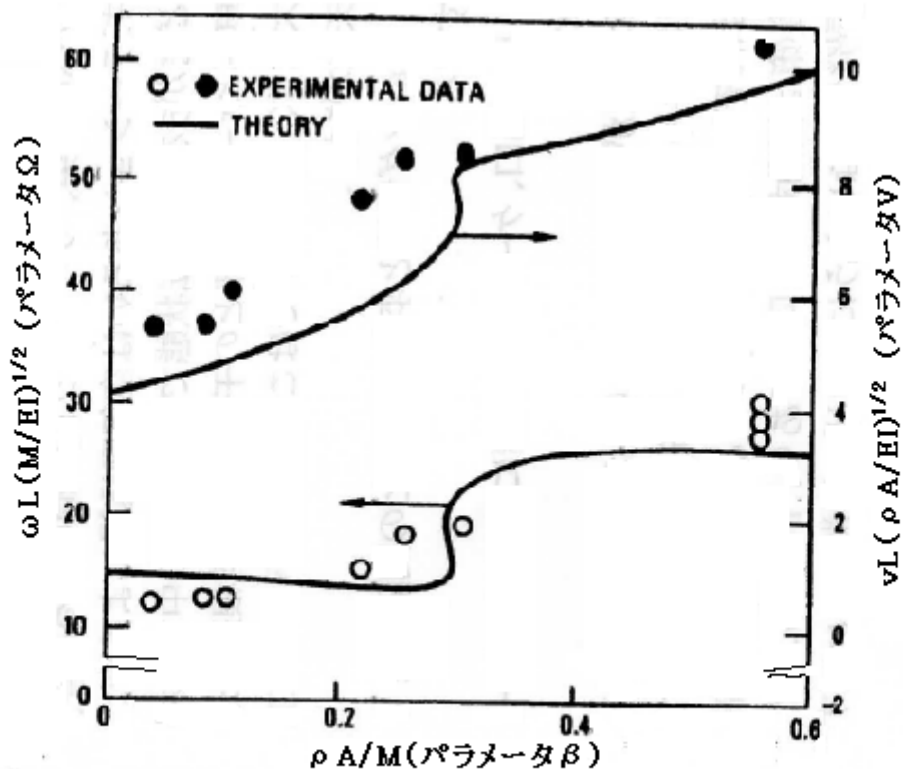


Fig. 10-8 Comparison of theory and experimental data for onset of instability of a cantilever. (Ref. 10-22)

カンチレバ-管の不安定発生に関する理論値と実験値の比較

10.5 曲がり管に関する結果

曲がり管は熱交や燃料フィードラインの配管系によくみられる。これら曲がり管部分の安定性解析は、管の湾曲からくる幾何学的連結から、直管と較べてかなり複雑になる。しかしながら、変則的な微積分学を用いマトリックス技法を応用して曲管の運動方程式を求めて不安定の発生について線型方程式を解くことはできる。

Fig.10-9 に曲管の形状を示す。パイプはその面内/面外にあるいは軸対称/非軸対称で振動できる。

Fig.10-10、10-11 は Chen によって得られた無次元限界速度でピン・ピン(単純支持)及びクランプ・クランプ(固定支持)の境界条件を持った面外に揺れる曲管部分を対象にしている。その限界速度は質量比 β に依存しないことがわかっている。これらの解は流体が曲管部分の弧を通過してターンの際の流体圧力や流体反力から生じるパイプ内の初期引張や変形は考慮していない。これらの初期フォースはクランプ・クランプ端をもったパイプの座屈を防止することができる。

Fig.10-12 と 10-13 を較べると、もしその初期フォースが解析に含まれているならば、パイプは安定化し座屈しないことがわかる。多分これらの予測を確認できる実験結果はない。なお面外の基本振動数は面内の基本振動数よりかなり低くなることを書き留めておく。

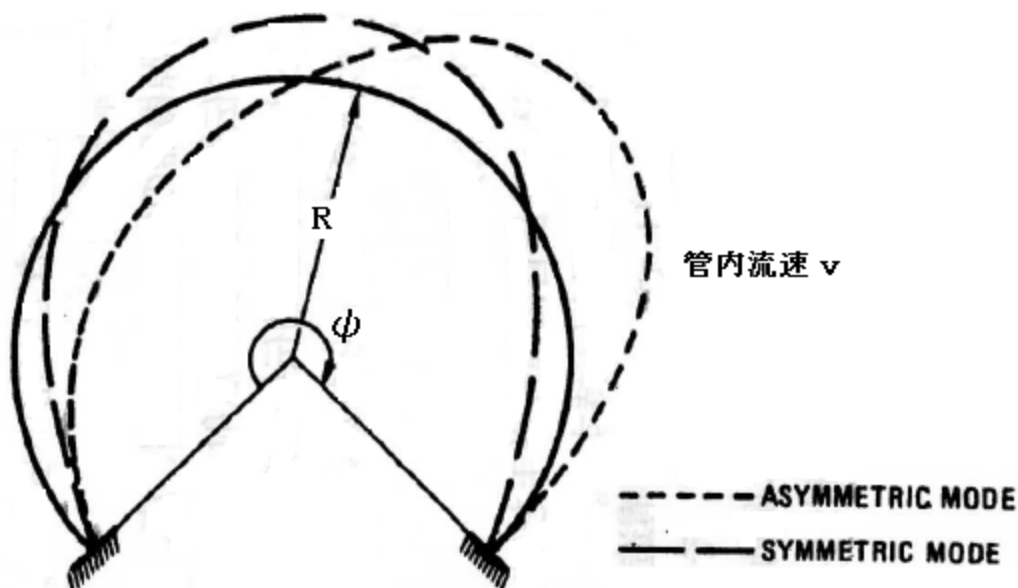


Fig. 10-9 Curved pipe with fixed ends bending in symmetric and asymmetric in plane modes.

面内モードで対称/非対称の曲げを受ける両端固定端付き曲管

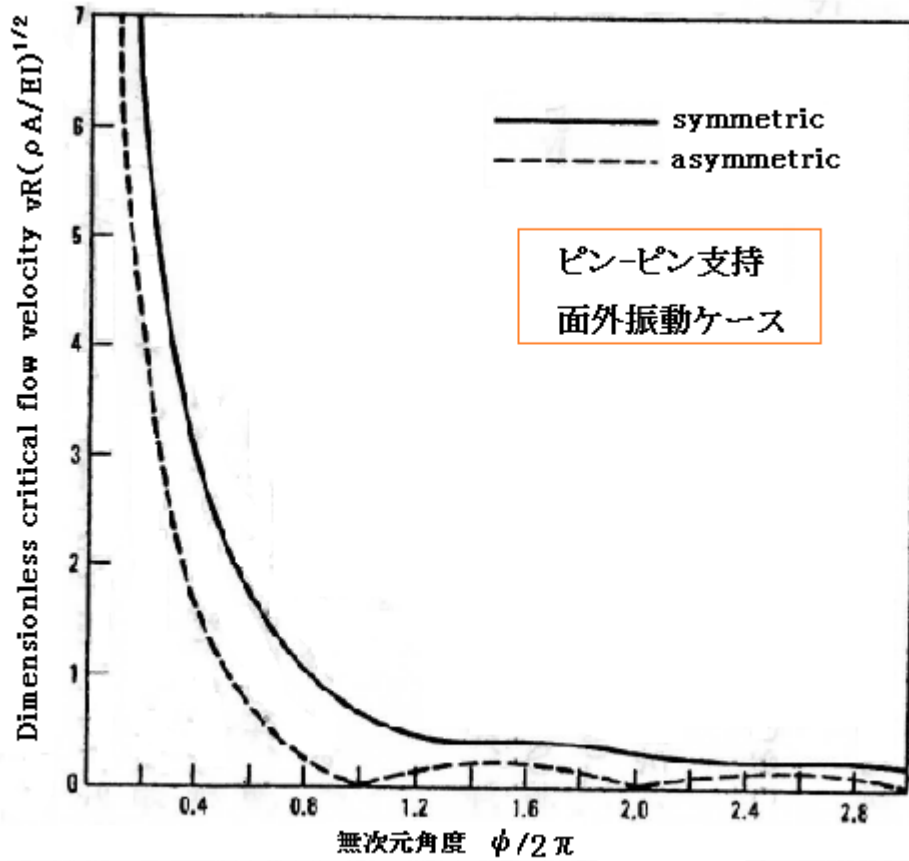


Fig. 10-10 Critical flow velocity for curved pipes with pinned-pinned ends for vibrations 曲管の限界流速

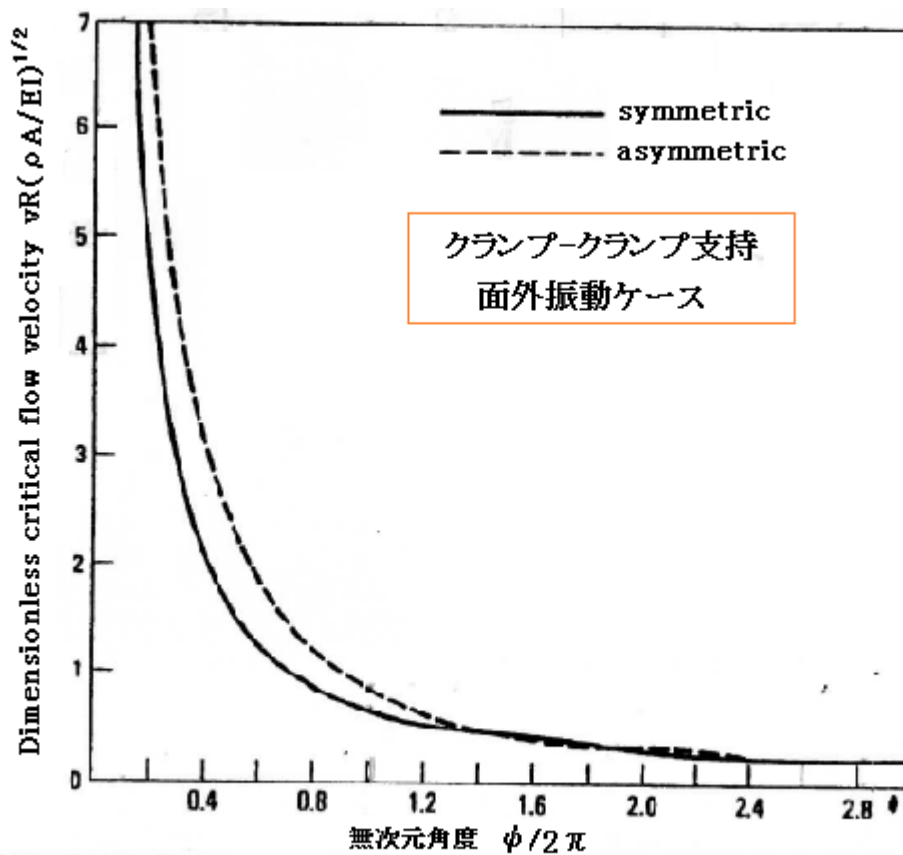


Fig. 10-11 Critical flow velocity for curved pipes with clamped-clamped ends for vibrations out of plane. (Ref. 10-18) 曲管の限界流速

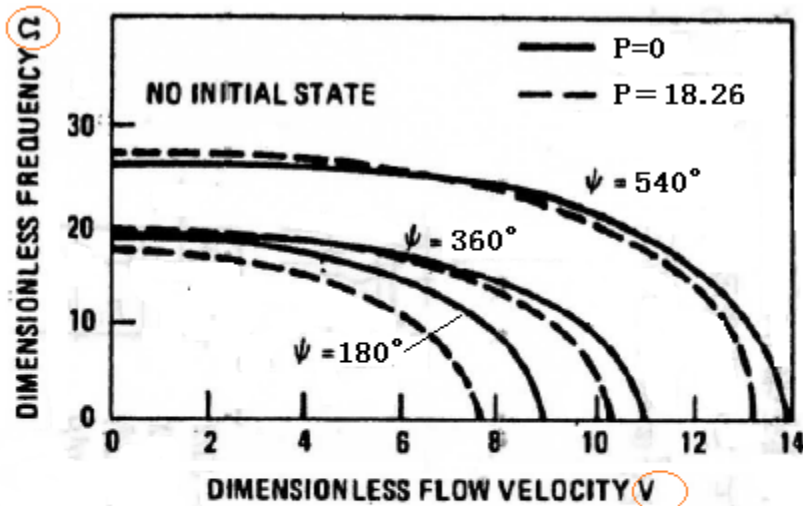


Fig. 10-12 Fundamental out-of-plane frequency of circular arcs with clamped ends, neglecting initial forces (Ref. 10-19); V and Ω are defined by Eq. 10-38. $P = (AL^2/EI)p$, where p is pressure in pipe. $\Omega = 0$ corresponds to onset of instability.

初期フォースを無視した固定端付き円弧の基本面外振動数
 $V, \Omega = (10-38)$ 式定義、 $P = (AL^2/EI)p$ 、 $p =$ 内圧、 $\Omega = 0$ で不安定発生！

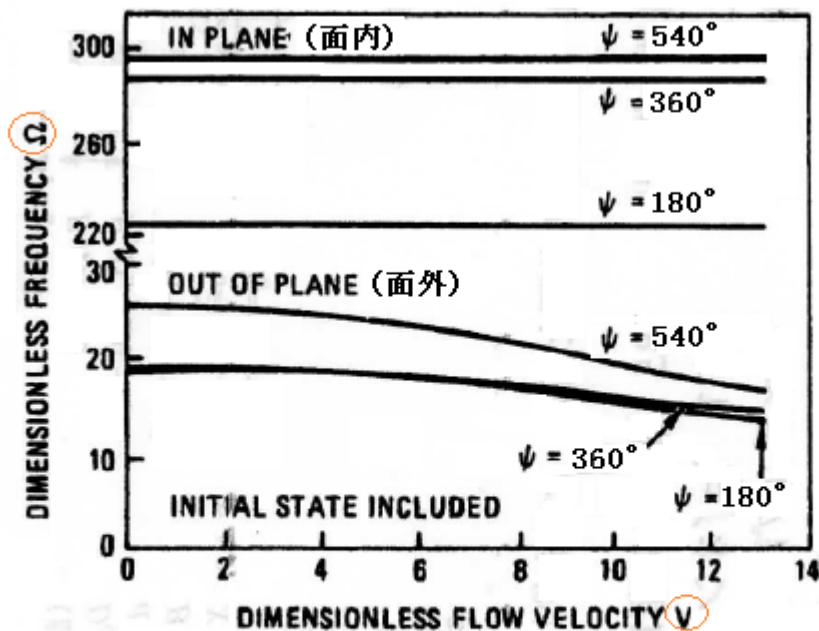


Fig. 10-13 Fundamental frequency of circular arcs with clamped ends, including initial forces (Ref. 10-19); V and Ω are defined by Eq. 10-38, where L is overall tube length.

初期フォースを含んだクランプ端付き円弧の基本振動数
 $V = (10-38)$ 式定義 ($L =$ オーバーオール の管長)