

【整番】FE-20-TM-005	【標題】キャビポンプ系流れのサージングの可否
分類：流れ(流れ不安定)／種別：技術メモ	作成年月：H23.07／改訂：Ver0.0 (H23.08)
	作成者：N. Miyamoto

全 17 枚

流れの不安定は、サージング、流量逸走、ポジション不安定あるいはチャタリングなどの形を取り流量、静圧、液位、ポジションあるいは遊動体の変動/振動/揺動を生じ種々のトラブルとなる。これら不安定現象の中で、**キャビテーションないしこれに近い状態にあるポンプ(ここではキャビポンプ)で駆動される流れシステムに発生するサージング**は 比較的知られた現象で、ポンプメーカー筋を中心に解析的なアプローチも一般化しているようである。しかし解析は最終手段であって、設計的にみればその前にシステム設計者がこの現象を認識してその発生を判定できエンジニアリング的に対処できることが望ましい。その点、この不安定現象について下記の文献に示された簡易判定式は、かなり有効な設計手段になるのではないかと思う。

The Stability of Pumping System – The 1980 Freeman Scholar Lecture

By E. M. Greitzer (J of Fluid Engineering June 1981 Vol.103/193)

本 TS では、下記のキャビポンプ系の基本モデルを対象にして、上記文献に基づく簡易判定式を紹介するとともに、これに関連する知見を紹介してみたい。

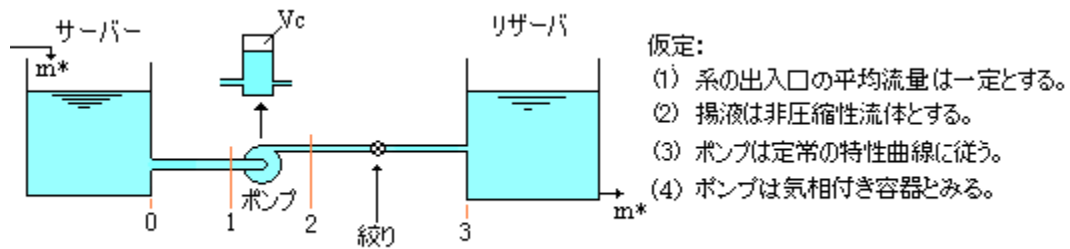


図1 キャビ発生ポンプ系モデル

また、本 TS で使用する記号定義は次の通り。

P = 任意位置の静圧 (N/m ²)	m = 質量流量 (kg/s)
P^* = P の平均成分 (N/m ²)	m^* = m の平均成分 (kg/s)
δP = P の変動成分 (N/m ²)	δm = m の変動成分 (kg/s)
ΔP_p = ポンプ前後差圧 (N/m ²)、	Q = 体積流量 (m ³ /s)
ΔP_p^* = ΔP_p の平均成分 (N/m ²)、	V_c = キャビティ(蒸気相)容積 (m ³)
ΔP_L = 任意区間の圧力損失 (N/m ²)	V_c^* = V_c の平均成分 (m ³)
ΔP_T = 絞りによる圧力降下 (N/m ²)	δV_c = V_c の変動成分 (m ³)
ΔP_T^* = ΔP_T の平均成分 (N/m ²)	Z = 任意区間のレベル差 (m)
P_v = 液の飽和蒸気圧 (N/m ²)	A = 任意区間の流れ断面積 (m ²)
v = 任意位置の流速 (m/s)	A_p = ポンプ内流れの等価断面積 (= A_{01}) (m ²)
U = 羽根車入口軸方向流速 (m/s)	A_x = 管路位置 x での断面積 (m ²)
U_t = 羽根車入口軸方向流速 (m/s)	L = 任意区間の配管長さ (m)
U_T = 羽根車の周方向速度 (m/s)	L_p = ポンプ内流れの等価長さ (m)
C_x = 位置 x の軸方向流速 (m/s)	ρ = 流体(液)の密度 (kg/m ³)
K_s = 吸込配管の圧損係数、	g = 重力加速度 (m/s ²)

d = 微分演算子、 ∂ = 偏微分演算子、 t = 時間(s)、 l = 軸方向長さ(m)

サフィックス 0、1、2、3 → サーバ出口、ポンプ入口、ポンプ出口、リザーバ入口を云う

サフィックス 01、12 → 吸込み区間、ポンプ区間を云う。

1. イントロダクション

- (1) 軸流/斜流/遠心ポンプなどターボポンプでキャビテーションが起きると、**揚程の低下や騒音・振動の発生**あるいは**キャビテーション・エロージョンによる羽根車の損傷**が問題になる。そのためポンプ設計では、吸込み性能の向上のための工夫（例えばインデューサ設置/入口径・入口角アップ/羽根枚数削減）を行うことで、装置設計では、設備配置に際して十分な有効 NPSH を確保することで、有意なキャビテーションの発生を抑えている(NPSH については添付 2 参照)。

しかし設備によっては、たとえ運転点でもあって若干のキャビを抱え込んだまま運転されるケースや、運転の局面によって低流量域/低吸込みヘッドで運転されるケースもある。その場合、ポンプの前後配管などにキャビテーションを引き金とした強いサージ現象(サージング)が発生することがある。

このサージ現象でよく知られているのは、液体燃料ロケットにおける不安定現象(いわゆる **POGO** 不安定)で、1990 年 11 月の **H2 ロケットの打ち上げ失敗の原因**にもなっている。打ち上げ直後に搭載されたインデューサ付き燃料ポンプに過渡的なキャビテーションが起きて、システムが著しく不安定化したためである。

- (2) キャビテーションに伴う不安定現象には次のようなものがある。

- ① キャビテーションサージ-----ポンプを含めたシステム不安定
- ・ 設計流量領域 → 全体的なシステム不安定
 - ・ 低流量域 → 吸込み側の不安定
- ② 旋回キャビテーション-----ポンプ入口の局所的不安定

①は、流れ方向(軸方向)に存在する 1 次元的なサージであり、吸込み側のみならず吐出し側にも拡がる不安定現象で、強い脈動(流量変動/圧力変動)が現れる。この不安定は流量の多寡によって不安定の形が異なる。設計流量域に比べ低流量域では吸込み側に不安定が偏る傾向がある。その場合キャビ体積の増大に伴って羽根入口で逆流が起こるが、これが上流に及ぶと逆流が消滅して正流に戻り、逆流と正流が反復する。場合によって二相流になる。

②はインペラ入口で周方向の流速変動が加わって起きる 2 次元的なサージで、ポンプ入口近傍に限られた局所不安定である。やや低流量域のキャビサージやストール(旋回失速)に似るが、グロスな現象になることはないようである。

これらの不安定現象は、キャビティ体積が流量変動を誘起する点で同根であり、基本的にその発生条件には大差はなく、次項の簡易判定式はおおむね共有できると思われる。

- (3) キャビ不安定が起きると、他のサージ現象(ストールなど)と同じように、脈動による振動や雷音を伴う騒音が派生し、その結果、配管/支持金具/弁などに高サイクル疲労を、極端にはインデューサの

のグロスな破壊を引き起こす。従って有効 NPSH が不足気味のポンプ設備では、設計段階で不安定の可否をチェックして対策を講じる必要がある。また運転においてこの種の不安定がでたら、その傾向を観察して対処する必要がある。不安定の可否判定については次項で、不安定現象の傾向やそのメカニズムについては次々項でそのベースを述べる。

3. 簡易安定性判別式の導入⁽¹⁾

ポンプのインディーズ/インペラにキャビテーション空洞(キャビティ)を持った流れ系の最も基本的なモデルを図 1 に示す。以下、次の前提をおいてこのモデルに関する簡易的な安定性判別式を導入する。

- (i) 微小変動を仮定しすべての挙動を線形近似で扱う(変動量が大きくなると逸脱が大きい)。
- (ii) ポンプ吸込み区間 0～1 では、一般に流動抵抗が少ないのでイナータンス(流体加速による圧力変化)のみを考慮する。
- (iii) ポンプ区間 1～2 では、ポンプの昇圧とイナータンスによる圧力変化、およびキャビティ体積の消長に伴う流量変化を考慮する。
- (iv) 吐出し区間 2～3 ではリアクタンス(流体抵抗による圧力変化)のみを考慮する。これに比ベイナータンスは軽微なので割愛する。

(1) ポンプ吸込み区間 0～1 において 1 次元非定常流れの式(ベルヌーイ式)は、

$$\begin{aligned} & \downarrow P_0 + \rho v_0^2/2 = P_1 + \rho gZ_{01} + \rho v_1^2/2 + \triangle P_{L01} + \rho \int_0^1 (\partial C_x / \partial t) dx \\ & P_0 - P_1 = \rho \int_0^1 (\partial C_x / \partial t) dx + (\rho gZ_{01} + \triangle P_{L01}) + \rho (v_1^2 - v_0^2)/2 \end{aligned}$$

口径変化がなければ、 $v_1^2 \doteq v_0^2$ とみていいので、

$$P_0 - P_1 = \rho \int_0^1 (\partial C_x / \partial t) dx + (\rho gZ_{01} + \triangle P_{L01})$$

軸方向速度 $C_x = Q/A_x \doteq (m_1/\rho) (1/A_x)$ であるから、

$$P_0 - P_1 = (dm_1/dt) \int_0^1 (1/A_x) dx + (\rho gZ_{01} + \triangle P_{L01})$$

ここで、 $A_x = A_{01} = \text{一定}$ 、 $l = L_{01}$ とすれば、

$$P_0 - P_1 = (L_{01}/A_{01})(dm_1/dt) + (\rho gZ_{01} + \triangle P_{L01})$$

平均成分+変動成分を考え、 $P_0 = P_0^*$ 、 $P_1 = P_1^* + \delta P_1$ 、 $m_1 = m_1^* + \delta m_1$ とし、

$$(P_0^* - P_1^*) - \delta P_1 = (L_{01}/A_{01})\{d(m_1^* + \delta m_1)/dt\} + (\rho gZ_{01} + \triangle P_{L01})$$

ここで平均成分を考えると $P_0^* - P_1^* = (L_{01}/A_{01})(dm_1^*/dt) + (\rho gZ_{01} + \triangle P_{L01})$ であるから、

$$- \delta P_1 = (L_{01}/A_{01})\{d(\delta m_1)/dt\} \text{-----(a)}$$

(2) ポンプ区間 1～2 において 1 次元非定常流れの式(ベルヌーイ式)は、

$$\begin{aligned} P_1 + \rho v_1^2/2 &= P_2 - \triangle P_p + \rho gZ_{12} + \rho v_2^2/2 + \triangle P_{L12} + \rho \int_0^1 (\partial C_x / \partial t) dx \\ P_2 - P_1 &= -\rho \int_0^1 (\partial C_x / \partial t) dx + \triangle P_p - (\rho gZ_{12} + \triangle P_{L12}) + \rho (v_1^2 - v_2^2)/2 \end{aligned}$$

軸方向速度 $C_x = Q_1/A_x \doteq (m_1/\rho) (1/A_x)$ であるから

$$P_2 - P_1 = -(dm_1/dt) \int_0^1 (1/A_x) dx + \triangle P_p - (\rho gZ_{12} + \triangle P_{L12}) + \rho (v_1^2 - v_2^2)/2$$

ここで、 $A_x = A_p = \text{一定}$ 、 $l = L_p$ とすれば、

$$P_2 - P_1 = -(L_p/A_p)(dm_1/dt) + \triangle P_p - (\rho gZ_{12} + \triangle P_{L12}) + \rho (v_1^2 - v_2^2)/2$$

平均成分+変動成分を考え、 $P_1=P_1^*+\delta P_1$ 、 $P_2=P_2^*+\delta P_2$ 、 $m_1=m_1^*+\delta m_1$ とし、
ポンプ差圧を $\Delta P_p=\Delta P_p^*+(\partial \Delta P_p/\partial P_1) \delta P_1+(\partial \Delta P_p/\partial m) \delta m_1$ とすれば、

$$(P_2^*-P_1^*)+(\delta P_2-\delta P_1)=- (L_p/A_p)(dm_1^*/dt)-(L_p/A_p)(d \delta m_1/dt) \\ + \Delta P_p^*+(\partial \Delta P_p/\partial P_1) \delta P_1+(\partial \Delta P_p/\partial m) \delta m_1-(\rho g Z_{12}+\Delta P_{L12})+\rho (v_1^2-v_2^2)/2$$

ここで平均成分を考えると、

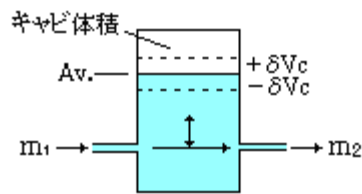
$$(P_2^*-P_1^*)=- (L_p/A_p)(dm_1^*/dt)+\Delta P_p^*-(\rho g Z_{12}+\Delta P_{L12})+\rho (v_1^2-v_2^2)/2$$

[ΔP_{L12} と $(v_1^2-v_2^2)$ には変動成分も含まれるが変動分は自乗され微少なのでここでは無視]

この式と前式の辺々を差し引いて、

$$(\delta P_2-\delta P_1)=- (L_p/A_p)(d \delta m_1/dt)+(\partial \Delta P_p/\partial P_1) \delta P_1+(\partial \Delta P_p/\partial m) \delta m_1 \text{-----}(b)$$

(3) 同じくポンプ区間 1～2 において、質量保存則を考えると、下図より $m_2-m_1=\rho (dV_c/dt)$



$m_2=m_2^*+\delta m_2$ 、 $m_1=m_1^*+\delta m_1$ 、 $V_c=V_c^*+\delta V_c$ であるから、

$$(m_2^*-m_1^*)+(\delta m_2-\delta m_1)=\rho (dV_c^*/dt)+\rho (d \delta V_c/dt)$$

ここで、 $(m_2^*-m_1^*)=\rho (dV_c^*/dt)$ であるから、

$$(\delta m_2-\delta m_1)=\rho (d \delta V_c/dt) \text{-----}(c)$$

なお、キャビティ体積変動量 δV_c は、入口圧力と入口流量に依存するとして、次式で得られる。

$$\delta V_c=(\partial V_c/\partial P_1) \delta P_1+(\partial V_c/\partial m) \delta m_1 \text{-----}(d)$$

実際のキャビティ体積は圧縮性であるが、ここでは非圧縮性として扱っている。

(4) 吐出し区間 2～3 の絞り(弁/オリフィスなど)においては、

$$P_2-P_3=(d \Delta P_T/dm)m_2$$

$P_2=P_2^*+\delta P_2$ 、 $P_3=P_3^*$ 、 $m_2=m_2^*+\delta m_2$ とすれば、

$$(P_2^*-P_3^*)+\delta P_2=(d \Delta P_T/dm)m_2^*+(d \Delta P_T/dm) \delta m_2$$

平均成分を考えると、 $(P_2^*-P_3^*)=(d \Delta P_T/dm)m_2^*$ であるから

$$\delta P_2=(d \Delta P_T/dm) \delta m_2 \text{-----}(e)$$

(5) 以上得られた(a)～(e)より、変数 m_2, P_2, P_1 を消去して変数 m_1 のみの式を導く。

(c)式を変形して、 $\delta m_2=\rho (d \delta V_c/dt)+\delta m_1$ としこれを(e)式に代入し更に(d)(a)式を代入する。

$$\delta P_2=(d \Delta P_T/dm)\{\rho (d \delta V_c/dt)+\delta m_1\} \\ =\rho (d \Delta P_T/dm)d\{(\partial V_c/\partial P_1) \delta P_1+(\partial V_c/\partial m) \delta m_1\}/dt+(d \Delta P_T/dm) \delta m_1 \\ =\rho (d \Delta P_T/dm)\{-(\partial V_c/\partial P_1) (L_{01}/A_{01})d^2(\delta m_1)/dt^2+(\partial V_c/\partial m) (d \delta m_1/dt)\}+(d \Delta P_T/dm) \delta m_1$$

この δP_2 と (a) 式の δP_1 を (b) 式に代入して整理すれば、

$$-\rho (d \Delta P_T/dm) (\partial V_c/\partial P_1) (L_{01}/A_{01})(d^2 \delta m_1/dt^2)+\{\rho (d \Delta P_T/dm)(\partial V_c/\partial m)+(L_{01}/A_{01}) \\ +(d \Delta P_T/dP_1)(L_{01}/A_{01})+(L_p/A_p)\}(d \delta m_1/dt)+\{(d \Delta P_T/dm)-(\partial \Delta P_p/\partial m)\} \delta m_1=0$$

これを变形して次の 2 次微分方程式を得る。但し $A_p=A_{01}$ とする。

$$(d^2 \delta m_1/dt^2)-[\{L_{01}/(\rho A_{01})\}\{1+(\partial \Delta P_p/\partial P_1)+L_p/L_{01}\}/(d \Delta P_T/dm)+(\partial V_c/\partial m)]/[(L_{01}/A_{01})(\partial V_c/\partial P_1)]$$

$$x(d\delta m_1/dt) - \{1 - (\partial \angle P_p / \partial m) / (d \angle P_T / dm)\} \{ \rho (L_{01}/A_{01}) (\partial V_c / \partial P_1) \} \delta m_1 = 0 \quad \text{----- (f)}$$

ポンプ入口流量変動 δm_1 を、複素数表示 $\delta m_1 = A e^{st}$ (但し $s = j\omega$) として整理して、次の特性方程式が得られる。

$$s^2 + \alpha s + \beta = 0 \quad \text{----- (g)}$$

$$\alpha = - \{ \{ L_{01} / (\rho A_{01}) \} \{ 1 + (\partial \angle P_p / \partial P_1) + L_p / L_{01} \} / (d \angle P_T / dm) + (\partial V_c / \partial m) \} / \{ (L_{01} / A_{01}) (\partial V_c / \partial P_1) \}$$

$$\beta = - \{ 1 - (\partial \angle P_p / \partial m) / (d \angle P_T / dm) \} \{ \rho (L_{01} / A_{01}) (\partial V_c / \partial P_1) \} = 0$$

安定性の判定は、以下の通り (FE-20-TM-001 参照)。

$\beta < 0$ のとき \longrightarrow 静的不安定

$\alpha < 0$ のとき \longrightarrow 動的不安定

----- (h)

サージングは動的現象であるから、 $\alpha < 0$ 即ち

$$- \{ \{ L_{01} / (\rho A_{01}) \} \{ 1 + (\partial \angle P_p / \partial P_1) + L_p / L_{01} \} / (d \angle P_T / dm) + (\partial V_c / \partial m) \} / \{ (L_{01} / A_{01}) (\partial V_c / \partial P_1) \} < 0$$

のとき不安定になる。その場合、分母の $(\partial V_c / \partial P_1)$ は、ポンプ入口圧 P_1 の増加とともにキャビ体積 V_c が縮小して負の勾配になるので、

$$\{ L_{01} / (\rho A_{01}) \} \{ 1 + (\partial \angle P_p / \partial P_1) + L_p / L_{01} \} / (d \angle P_T / dm) < - (\partial V_c / \partial m) \quad \text{----- (i)}$$

のときに不安定化することになる。右辺の $- (\partial V_c / \partial m)$ が大きくなると、左辺はこれを上回ることができず、システムは不安定になる。

(6) 上記の判別式の右辺 $[- (\partial V_c / \partial m)]$ は質量流量ゲイン係数 (M_b)、また $(\partial V_c / \partial P_1)$ はキャビテーションコンプライアンス (C_p) と呼んでいる。質量流量ゲイン係数は簡易判別式で最も重要なパラメータである。このパラメータは、分母の質量流量 m が増加すると分子のキャビティ容積 V_c が減少するので変動量は負(−)になるが、更にマイナス符号が付くので全体で正(+)になる。故に、流量が減少するほど V_c が増加して質量流量ゲイン係数 $[- (\partial V_c / \partial m)]$ は大きくなり左辺をオーバーして不安定になる。即ち、質量流量ゲイン係数が大きいとシステムは不安定になる。

(7) 上記の判別式計算を行うには、パラメータ $(\partial \angle P_p / \partial P_1)$ 、 $(d \angle P_T / dm)$ 、 $- (\partial V_c / \partial m)$ 、 L_p を設定する必要がある。この場合、 $(d \angle P_T / dm)$ は弁等の絞り特性曲線 (流量－圧損曲線) から得られる。また L_p は通常 L_{01} よりかなり小さいので厳密なモデル化は不要と思われる (ブレード長さの 2 倍程度の割増しで設定すればどうかと思う)。

$(\partial \angle P_p / \partial P_1)$ についてはポンプ特性曲線 ($\angle P_p - m$ 昇圧曲線) が流量に対して与えられるので、考えている入口圧力変化 ∂P_1 に相当する ∂m を設定する必要がある。吸込み配管に着目するとベルヌーイ式より $P_s - (P_1 + \rho g Z_{01}) = (1/2)(K_s + 1) \rho V^2 = \{ (K_s + 1)/2 \} (1/\rho) (m/A_{01})^2$ であるから、流量は次のようになる (ただし P_s = サーバ出口全圧である)。

$$m = \{ \{ 2 \rho A_{01}^2 / (K_s + 1) \} (P_s - P_1 - \rho g Z_{01}) \}^{0.5}$$

この関係を用いた $(\partial \angle P_p / \partial P_1)$ の設定手順は次のようになる。

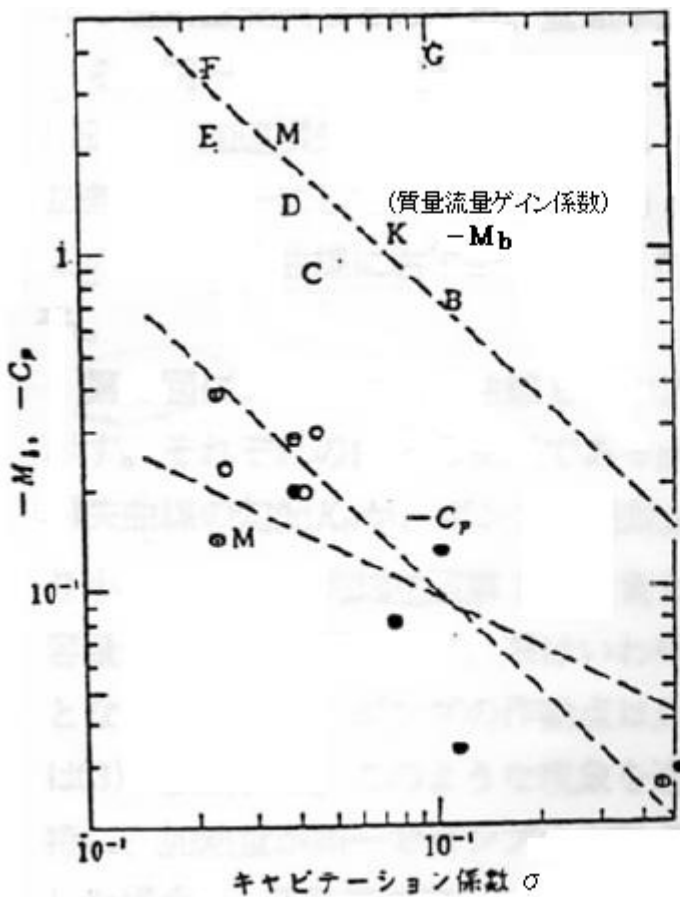
S1. 目標圧力 P_m とその変動幅 $\pm dp$ を設定する (dp は多少大きめにとる)。

S2. $P_1 = P_m - dp$ として上記の $[m - P_1]$ の関係より m を求め m' とする。同じく

- $P_1 = P_m + dp$ として m を求めて m'' とする。
- S3. $[\angle P_p - m]$ のポンプ特性曲線から、 $m = m'$ に相当する $\angle P_p$ を求めこれを $\angle P_p'$ とする。同じく m'' から $\angle P_p$ を求め $\angle P_p''$ とする。
- S4. $(\partial \angle P_p / \partial P_1) = (\angle P_p' - \angle P_p'') / (m' - m'')$ を計算する。

さて、質量流量ゲイン係数 $[-(\partial V_d / \partial m)]$ についてどうするか？ これについて手堅くは、ポンプメーカーが持っている、当該ポンプの使用条件(キャビテーション係数…)に対応したデータを入手するのがよい。ただ公開資料にも使えそうなデータがある(特に ASME 関連)。

図 2 は文献(4)で引用されているもので、キャビテーション係数 σ に対して M_b , C_p の値が与えられている(定義が異なるので注意)。 $[M_b, C_p$ の公開データはいずれ整理して本 TS に追加してゆきたい。]



(注) M_b および C_p の定義については下記の原典を確認のこと(本 TS の定義と異なる)。

Ng, S.L. and Brennen, C.E. "Experiences on the Dynamic Characteristics of Cavitating Pumps"

(ASME J. Fluid Eng. Vol. 100 (1978-6) 166)

図2 第18図 σ と M_b , C_p [文献(4)より引用]

- (8) ここで示した簡易判定式は、全てのケースとバリエーションに対応しているわけではなく、不適切な判定になる場合もある。更に厳密に求める方法として伝達マトリックス法がある(添付 3 参照)。

3. キャビ不安定の定的傾向など^{(1)~(4)}

(1) キャビテーションサージの発生点について

キャビテーションサージはキャビテーションの介在を前提している。その場合、キャビテーションレベルを表す指標として一般に、次のキャビテーション数 σ が使用されている。

$$\sigma = (P_1 - P_v) / (\rho U_t^2 / 2)$$

入口圧力 P_1 が高く σ が高い間はキャビの発生はないが、 P_1 が低下して σ が低くなるにつれ、潜在的にキャビ傾向が強まりやがてキャビが発現する。

キャビがない場合、ポンプの昇圧能力は通常のポンプ特性曲線(揚程 vs 揚量)によっている。これを無次元表示したのが図3で、流量によって一義的に昇圧量が決まる[$\rightarrow \phi_p = f(\phi_t)$]。然るにキャビテーションがあると、図4のように昇圧の度合は質量流量とキャビテーション数に依存して決まる[$\rightarrow \phi_p = f(\phi_t, \sigma)$]。この図では、幾つかの無次元質量流量 ϕ が表示されているが、 σ が高く曲線が横軸に併行する領域ではキャビは起きていない。 σ が低下しキャビが始まると、曲線は右下にダウンして昇圧度は低下する^(注)(流量 ϕ が低いほど低下傾向が強い)。サージはこの昇圧低下が始まる段階から発生するから、キャビ初生が不安定化の引き金になっているのは確かである。図5は、これをもっと端的に表わしている。また図6はサージ発生時の2~3Hzの小規模な脈動(例)を示している。

注) キャビテーション状態では羽根入口にキャビティ(空洞)ができて通路が塞がれる傾向になる。このためポンピング作用(運動エネルギーの圧力への転換)が損なわれて昇圧は低下する。

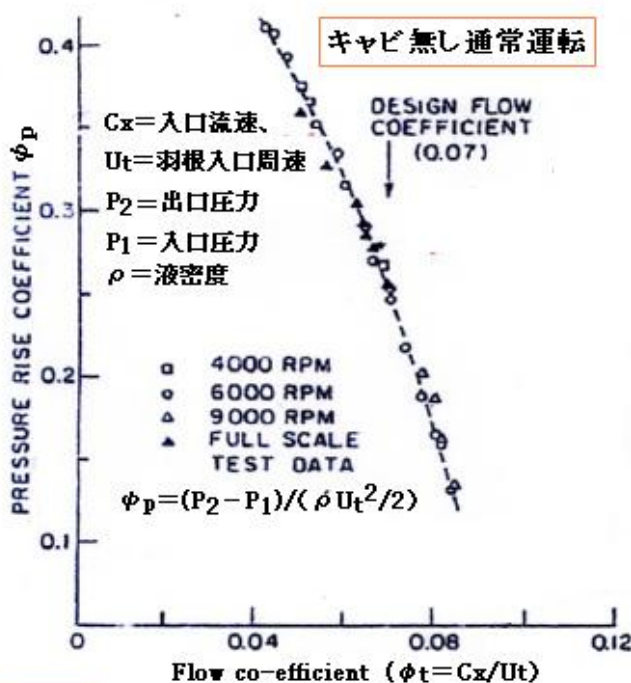


図3 Fig.40 Noncavitating Impeller performance 文献(1)抜粋

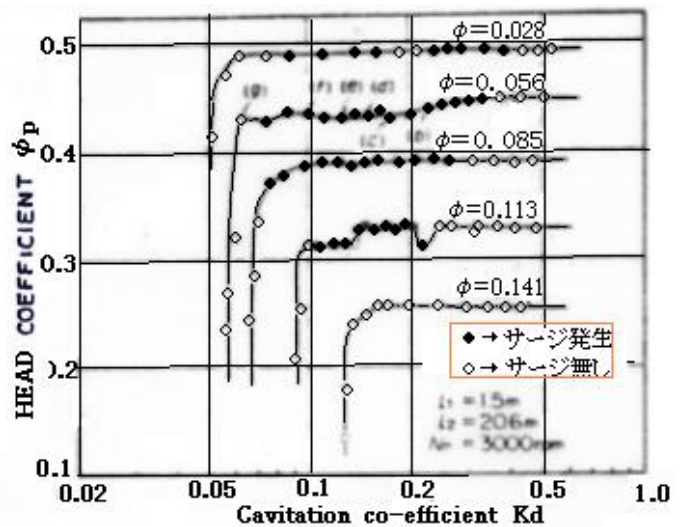


図5 — 文献(3)より引用



図6 — 文献(3)より引用

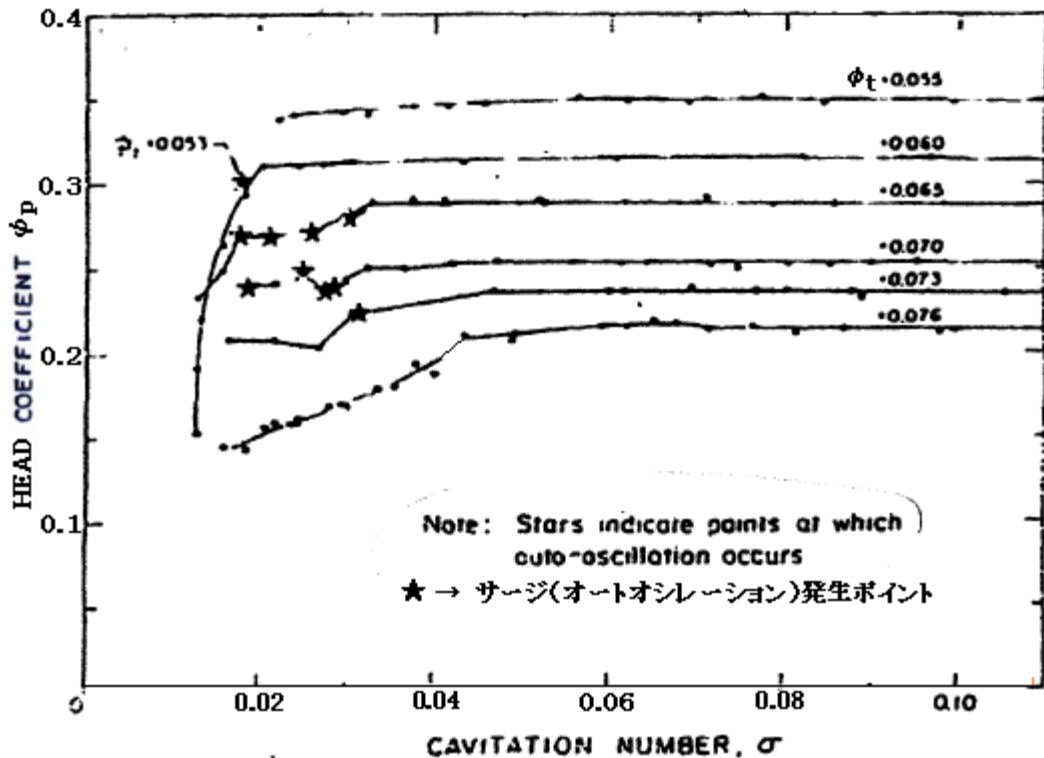


図4 Fig.41 Cavitation performance of Impeller (108) 文献(1)抜粋

(2) 不安定化のメカニズムについて。不安定化の指標として次のエネルギーフラックス(エネルギー流出) E_f を考える。

$$E_f = \int_c |\delta P_2 \cdot \delta m_2 - \delta P_1 \cdot \delta m_1| dt \quad (c \text{ は 1 サイクル分を意味する})$$

E_f はポンプから配管に流出し変動を与える機械エネルギーであり、この量が多くなるほど、不安定が著しくなる。 $\delta P_2 \cdot \delta m_2$ はポンプ出口における圧力と流量の変動分の積、 $\delta P_1 \cdot \delta m_1$ はポンプ入口における圧力と流量の変動分の積で、その差を積分しエネルギー流出分とする。これが前後配管系の擾乱源となる。

図7は各変動量とその積を模式的に表わしたものである。図の左側はキャビ無しの場合、図の右側はキャビ有りの場合を示している。入口側の吸込み配管の圧力変動は摩擦損失などの影響が少なく、流量変動から($\pi/2$)の遅れをもっているので、積($\delta P_1 \cdot \delta m_1$)は、図右の最下段と同じく調和波形になって、その積分は零になる。従って $E_f \approx \int_c \delta P_2 \cdot \delta m_2 dt$ になり、($\delta P_2 \cdot \delta m_2$)の消長のみに注目すればよいことになる(図の最下段にそれが示されている)。

なお δP_2 は、ポンプの昇圧によって $\delta P_2 = \delta P_1 + (\partial \Delta P_p / \partial P_1) \delta P_1 + (\partial \Delta P_p / \partial m) \delta m_1$ になる。その場合、ポンプ特性曲線の右下がり域では係数の $(\partial \Delta P_p / \partial m)$ が負性勾配になりやや安定化傾向があるが、 $\delta P \rightarrow \delta P_1 + (\partial \Delta P_p / \partial P_1) \delta P_1$ と、 δP_1 への依存度が残る、 δP_1 と同じ波形パターンになり遅れは発生しない。

キャビ無しケースでは、キャビティ V_c が存在しないので、ポンプ前後の流量変動は変化せず、 $\delta m_1 = \delta m_2$ で同期して変動する。一方、前述のように δP_2 も δP_1 とほぼ同期して変動するので、積($\delta P_2 \cdot \delta m_2$)は図のような調和波になって、その積分は零になる。従って、キャビ無しの場合はエネルギーフラックスは零になって不安定化に向かうことはない。

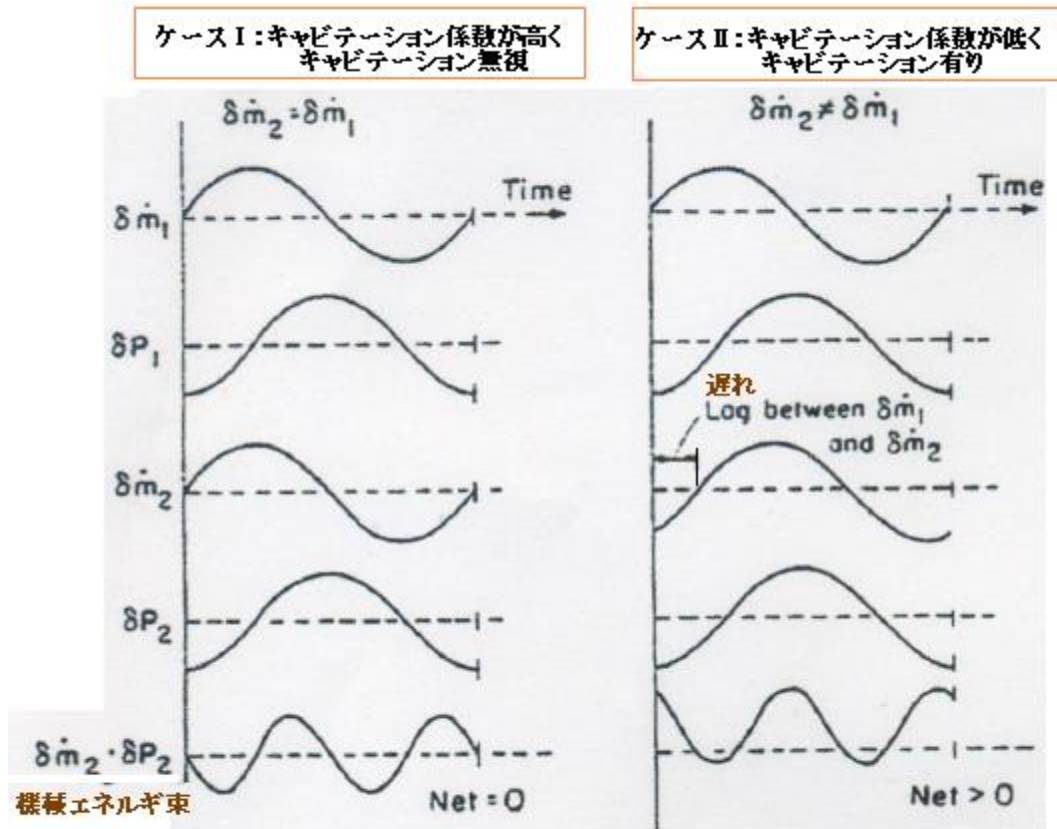


図 7

Fig.42 Mechanical energy flux due to mass flow gain in cavitating inducer

キャビ有りケースでは、例えば入口圧力が低下するとキャビティ体積 V_c が増加し、図左に示すように出口流量変動 $\delta \dot{m}_2$ の遅れが大きくなる。 δP_2 は変化しないので、結局 $\delta \dot{m}_2$ と δP_2 の遅れは解消傾向になり、積 ($\delta \dot{m}_2 \cdot \delta P_2$) は正のエネルギーフラックスになる。従ってキャビ有りの場合はエネルギーフラックスは正值の方向に動いて不安定化に向かうことになる。

- (3) キャビテーションサージの周波数について。前 2.節の特性方程式(g)式を複素式の形で解くとサージの周波数(角振動数) ω は次のようになる。

$$\omega \propto U_T (\partial V_c / \partial P_1)^{-0.5}$$

キャビティ体積 V_c は空気バネとして働くので $(\partial V_c / \partial P_1)$ の逆数は、バネ定数とみなされる。 P_1 に対して V_c が大きければ、バネ定数は低下して周波数も低くなる。

添付 2 に示されるサージ周波数を下記に転記する(多少、記号表示を変更)。これは吐出し側の流量変動を零とおいて得られたものであるが、基本的には図 1 モデルの周波数に同じとみていい。

$$f = \{U_T / (2\pi)\} \{1 / \sin \beta_1\} \{1 / (2KL_{01}h)\}^{0.5}$$

ここで U_T = 羽根車の周方向速度、 β_1 = 羽根相対角、 L_{01} = 吸込み管長、 h = 羽根ピッチ

K = コンプライアンス(無次元) = $-\partial a / \partial \sigma_1$ 、 a = 無次元キャビ体積(= $V_c / (h^2 x_1)$)、

σ_1 = キャビテーション数(= $(P_1 - P_v) / (\rho \dot{W}_1^2 / 2)$ 、 \dot{W}_1 = 相対流速(羽根間通過流速)(m/s)

コンプライアンス K は、 $\omega \propto U_T (\partial V_c / \partial P_1)^{-0.5}$ の $(\partial V_c / \partial P_1)$ に該当する(何故なら $\sigma \propto P_1$ である)。

これはポンプ情報を含んでいるので、計算が厄介であるが、要はサージ周波数が羽根周速 U_T (→ポンプ回転数) に比例することに注目すべきである。ポンプの右上がり勾配に起因する通常のサージングでは、系の流体柱の固有振動数がサージ周波数に繋がることを考えれば、これは特徴的である。なお、前述の如く空気バネ的效果を含むので、周波数はかなり低い(多くの場合 10Hz 未満)。

(4) ポンプ特性曲線との関係について。羽根車(インペラ)の昇圧特性は直接、キャビテーションサージの発生に関与しない。通常のサージはポンプの右上がり勾配に起因するが、このサージは 前節の(i) 式の条件さえ満たせば、不安定化する。たとえ設計点に近い右下がり勾配部分でもキャビテーション数がダウンすれば不安定化する。

(5) キャビ不安定の防止策としては、

- (i) 液体と別流体の気体(例えば空気)泡を混入させる(キャビの発生抑制)。
- (ii) ポンプ羽根車入口入口に吐き出し側から昇圧された流体を噴流状に注入する。
- (iii) 吸い込み側にアキュムレータを取り付ける(脈動抑制?)

などがある。キャビ抑制が安定化につながるので、短期運転であっても NPSH に十分なマージンを持たせるのが手堅い。

後書き：

- (1) Greitzer 文献の簡易判別式は、設計流量付近におけるキャビテーションサージを対象にしていると思われるが、ここでは低流量域のキャビサージと旋回キャビテーションにも拡大適用している。これについては問題があるのかもしれない。今後の検討課題にしたい。
- (2) 質量流量ゲイン係数 M_b 、キャビコンプライアンス C_p については今後 ASME 関連情報などを調べ追加していきたい。
- (3) 伝達マトリックスアプローチは、サージング全般に有望な解析法と思われるので、更に情報を集め TS 化してゆく必要がある (プログラム化を考える)。

引用文献：

- (1) The Stability of Pumping System—The 1980 Freeman Scholar Lecture
by E. M. Greitzer (J of Fluid Engineering June 1981 Vol.103/193)
- (2) 展望・解説「ターボ機械の不安定現象」 辻本、上条 (ターボ機械第 25 巻第 4 号)
- (3) 「キャビテーションに伴う不安定現象」 山本 機械学会講演会 JSME psc-52
- (4) 「配管設計と流体力学(12)―管路に生じる諸問題 2.圧力脈動とサージング」山本(配管技術 '84. 7)

添付 1. キャビポンプ系不安定の簡易判定 [文献(2)より]

キャビポンプ系の不安定について、上条氏らは文献(2)で別趣の簡易式を示しているのでその要点を以下に示す。モデルは下図のようで、ポンプまでは Greitzer のモデルと同じである。ポンプ以降は非常に長い配管が大きな絞り抵抗が設けられており、殆ど流量変動は無視できるものとする(流量変動

は上流側のみ、Greitzer モデルは下流側も変動)。

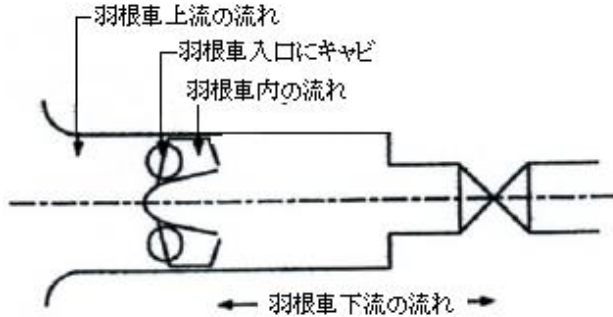


図1 対象とするターボ機械系と要素流れ

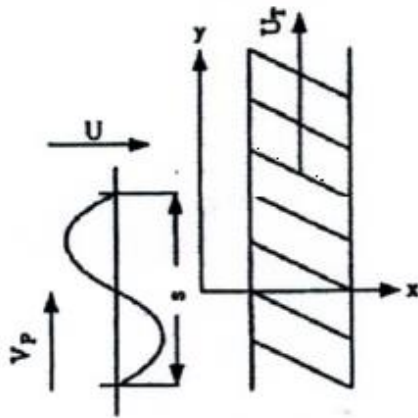


図2 羽根車および上流の二次元流れ

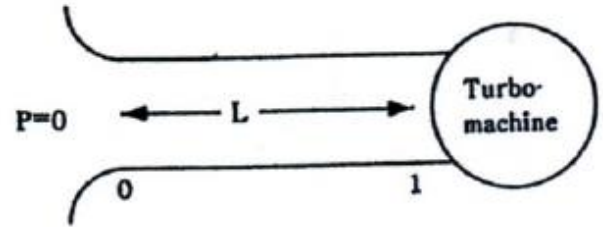


図3 吸い込み管内の一次元流れ

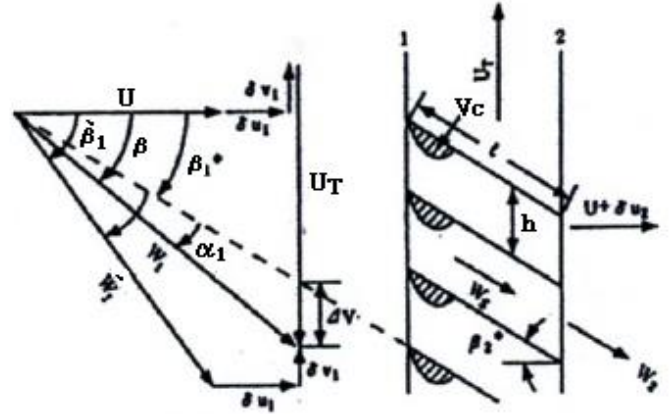


図4 羽根車入口の速度三角形とキャビテーションおよび羽根車内の流れ

ポンプ上流区間：

$$\delta u_1 = \dot{u}_1 \exp[2\pi j n t] \quad , \quad \delta v_1 = 0 \quad \text{-----}(1)$$

$$\delta P_1 = -\rho U(1+jk_L)\dot{u}_1 \exp[2\pi j n t] \quad \text{-----}(2)$$

ポンプ通過区間：

$$\delta u_2 - \delta u_1 = j(h/L)k_L U \{F_1(\delta u_1/U) + F_3\{\delta P_1/(\rho U^2)\}\} \quad , \quad \delta u_2 = 0 \quad \text{-----}(3)$$

$$F_1 = 2\sigma \cos^2 \beta_1 \cdot K - \sin \beta_1 \cdot \cos \beta_1 \cdot M, \quad F_3 = -2\cos^2 \beta_1 \cdot K$$

ここで δP_1 =羽根車入口の圧力変動(kg/m²)、 $\delta u_1, \delta u_2$ =羽根入口,出口の軸方向流速変動(m/s)

δv_1 =羽根車入口の周方向流速変動(m/s)、 n =周波数(c/s)、 t =時間(sec.)、 j =複素数

U =軸方向平均流速(一様流速)(m/s)、 \dot{u}_1 =軸方向流速振幅(m/s)、 ρ =流体密度(kgs²/m⁴)

k_L =無次元複素周波数($=2\pi nL/U$)、 h =羽根ピッチ(m)、 L =上流側管長(m)、

β_1 =羽根相對角、 M =質量流量ゲイン係数、 K =キャビテーションコンプライアンス

(1)と(2)を(3)に代入して、

$$[1+jk_L(h/L)\{F_1-(1+jk_L)F_3\}](\delta u_1/U)=0$$

δu_1 が零でならないためには、[]内は零になる必要がある。即ち、

$$1+jk_L(h/L)\{F_1-(1+jk_L)F_3\}=0$$

これを整理して、次の特性方程式を得る。この式は(jk_L)に関する2次代数方程式である。

$$(jk_L)^2 - [(h/L)(F_1 - F_3)](jk_L) - 1/(h/L)F_3 = 0 \quad \text{-----}(4)$$

この特性式の1次項の係数 $-(h/L)(F_1-F_3)/\{(h/L)F_3\}$ が負になることが不安定の条件である。
 ここで分母の F_3 は $F_3=-2\cos^2\beta_1\cdot K<0$ であるから、不安定になるには1次係数項 $(F_1-F_3)<0$
 でなければならない。 $F_1=2\sigma\cos^2\beta_1\cdot K-\sin\beta_1\cos\beta_1\cdot M$ であるから、この不等式は、

$$M > 2(1+\sigma)(1/\tan\beta_1)\cdot K$$

$1/\tan\beta_1=\phi$ (ϕ は速度ポテンシャル)であるから、不安定化の条件は、

$$M > 2(1+\sigma)\phi K \quad \text{-----}(5)$$

更にサージ周波数 n を求める。無次元複素周波数の定義 $[k_L=2\pi nL/U]$ から $n=\{U/(2\pi L)\}k_L$ になる。ここで(4)式において $F_1=F_3$ のとき虚数項は消去され、 $(jk_L)^2-1/\{(h/L)F_3\}=0$ となるので、
 $k_L=\{-L/(hF_3)\}^{0.5}$ (実数)、また $F_3=-2\cos^2\beta_j\cdot K$ 、 $U_T/U=\tan\beta_j$ であるから、

$$n=\{U/(2\pi L)\}k_L=\{U/(2\pi L)\}\{-L/(hF_3)\}^{0.5}=\{U_T/(2\pi)\}\{1/(\sin\beta_j)\{1/(2KLh)\}^{0.5} \quad \text{-----}(6)$$

ここで U_T =羽根車の周方向速度。従ってサージ周波数はポンプ回転数に比例することになる。

(5)(6)式に準じて、キャビテーションサージの不安定/安定の傾向をみてみる。

(1) 質量流量ゲイン係数 M 、キャビテーションコンプライアンス(キャビによる容積要素) K は次のように定義される。

$$M=\partial a/\partial \alpha_1 \quad , \quad K=-\partial a/\partial \sigma_1$$

ここで a =無次元キャビ体積 $(-)$ $[=V_c/(h^2x_1)]$ 、 α_1 =衝突角(ラジアン)、

σ_1 =キャビテーション数 $(-)$ $[=(P_1-P_v)/(\rho \dot{W}_1^2/2)]$ 、 \dot{W}_1 =相対流速(羽根間流速)(m/s)

P_1 =入口圧力(kg/m²)、 P_v =液の飽和蒸気圧(kg/m²)、 ρ =流体密度(kg s²/m⁴)

衝突角 α_1 が大きくなると無次元キャビ体積 a は増えるので、通常 $M>0$ である。またキャビテーション数 σ_1 が増えるとキャビ体積 a は減少するので、通常 $K>0$ である。

(2) 流量がわずかに増えると動翼に対する衝突角 α_1 が減少し、 $M>0$ の故にキャビ体積 a が減少する。そこで減少分を埋めるために更に流量が増える。この連鎖によって流れは不安定化する。

(3) 入口圧が増えるとキャビの発生が押さえられ、キャビテーション数 σ_1 が大きくなり $K>0$ の故に、キャビ体積 a は減少する。この場合はキャビティ周辺の流体がキャビティの縮退分を埋める形でキャビティの芯に向かい加速されキャビティ廻りの局所圧力を減じ縮退を緩和する。

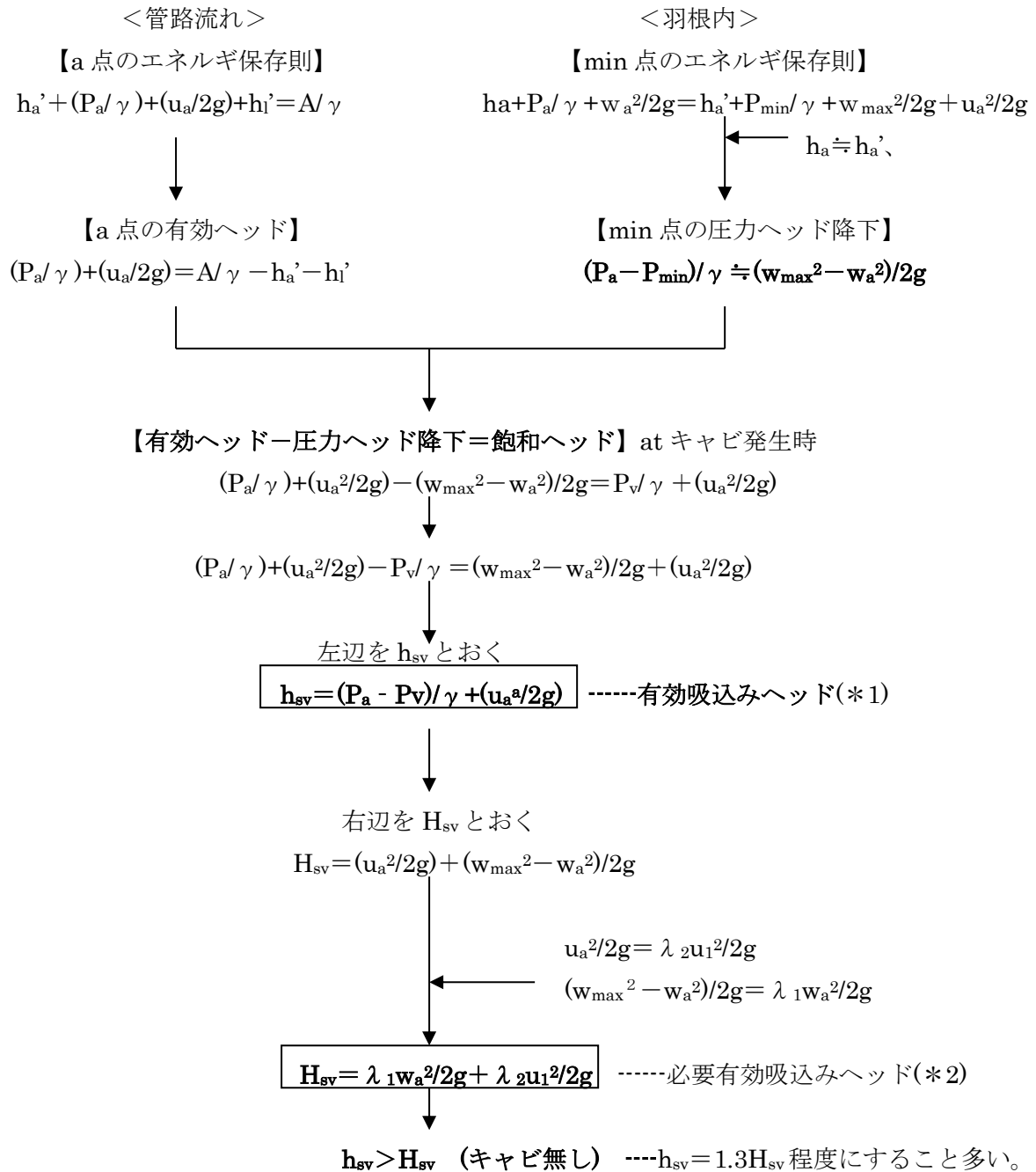
(4) 以上の議論より、 $M>0$ では不安定化、 $K>0$ では安定化というの傾向が理解できる。(5)式は、 $M>0$ の不安定化効果が、 $K>0$ の安定化効果を上回ったときにこのサージが発生することを表わしている。

(5) 注目すべきは、このサージの発生に対して羽根車(インペラー)の昇圧特性は直接的には関与しない。通常のサージが低流量で失速(ストール)により昇圧特性が右上がり勾配をもった場合のみ発生するのに対し、このサージは(5)式の条件さえ満たせば、発生することになる。

(6) 通常のサージの周波数が、管路系の固有振動数を流況を補正した形になるのに対して、このサージの周波数はポンプの回転数に比例する形になる。

添付 2. NPSH に関するメモ

機工便覧の NPSH の説明部分は多少わかりにくいところがあるので、以下のように再説明を試みる。
ポンプ入口のキャビテーションは、主に管路流れが羽根車に掛かるところ(目玉部分)で起きる。



疑問： 絶対速度と相対速度の定義がわからない。相互の関係は？

記号説明： A =吸込み液面の絶対圧力(kg/m²)、 γ =比重量(kg/m³)、

P_a =a 点の絶対圧力(kg/m²)、 P_{\min} =min 点の絶対圧力(kg/m²)、 P_v =飽和蒸気圧(kg/m²)

u_a =a 点の絶対流速(m/s)、 u_1 =目玉の平均絶対速度(m/s)

w_a =a 点の相対流速(m/s)、 w_{\max} =min 点の流速(m/s)、

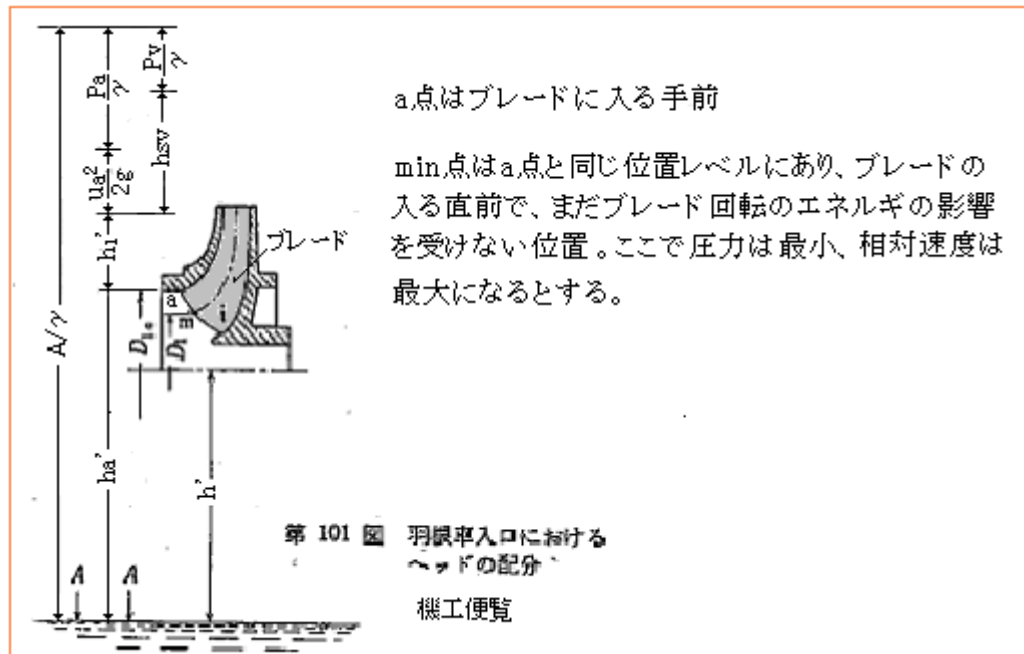
h_a' =a 点の位置ヘッド(m)、 h_i' =吸込み管路内の全圧力損失ヘッド(m)

h_{sv} =有効吸込みヘッド(m)、 H_{sv} =必要有効吸込みヘッド(m)

λ_1 、 λ_2 =キャビ発生に係る無次元経験数

λ_1 はキャビ限界を初生にとるか揚程低下開始点にとるかで変わる、また吐き出し流量でも変わる(102 図)。キャビ初生点をとる場合は羽根形式に余り依存しないが、揚程低下開始点をとる場合は羽根形式により著しく異なる。 λ_2 は羽根車目玉部における流れの偏りや損失などが考慮される。

サフィックス a→入口最高点、



(※1) 普通、有効 NPSH という。実際の算定は下記による。

$P_a/\gamma + u_a^2/2g = A/\gamma - h_a' - h_i'$ であるから、

有効 NPSH = $A/\gamma - h_a' - h_i' - P_v/\gamma$

こうすれば、難儀な絶対速度 u_a を設定することなく求めることができる。

(※2) 普通、必要 NPSH という。機工便覧の算定方法では、

$H_{sv} = \lambda_1 w_a^2/2g + \lambda_2 v_1^2/2g$

λ_1 =係数(第 102 図)、 λ_2 =目玉部分の偏流係数(1~1.25)

w_a =目玉部トップ相対速度(どうとるか? $w_a = \lambda_1^{0.5} v_1$?)

一方、機工便覧/西島ポンプ便覧によれば、

最高効率点にて：吸込比速度式、トーマの係数などから設定

最高効率点以外：メーカーデータから設定

添付 3. 伝達マトリックス解析についてのメモ

[文献(1)の内容を要約して記述]

- (1) キャビ不安定の発生を正しく予測するには、曖昧な M_b や C_p によるのではなく、キャビ発生時のより厳密なポンプの動特性(より正確なポンプの動的挙動)によるのが望ましい。その一つが Brennen, Acosta らによる伝達マトリックス法アプローチである。このアプローチの成立条件は
- ・システムの過渡振幅が十分に小さいこと。
 - ・各エレメントの挙動が線形表示で近似できること。
- 伝達マトリックス法の通念通り、振幅の大きい非線形性の強いシステムの解析には不向きである。

- (2) ポンプの出入口量とポンプの挙動を関係づけるために、次のようなマトリックスを用いる。

$$\begin{Bmatrix} \delta P_2 \\ \delta m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta P_1 \\ \delta m_1 \end{Bmatrix}$$

ここで M_{ij} は伝達マトリックスのエレメントでポンプ挙動を表わす。各エレメントはシステムの平均運転点と振動数に依るが、実際には実験/理論に基づいてキャビ数/無次元流量ごとに多項式近似の曲線で表わされる。その例を **Fig.43** に示す。

- (3) 一般論ではシステムが能動的であるか受動的であるかはマトリックスの形による。通常、単位マトリックス 1 を持つエレメントは受動的、持たないエレメントは能動的といわれるが、ここで扱っているようなポンピングシステムでは負性減衰を持った要素が含まれていて、必ずしもそうではない。そこで、要素の応答をネットのエネルギーフラックスを用いた動的能動パラメータと云う尺度で測っている。ポンプの能動パラメータの例を **Fig.44a** にしめす。この種の図では縦軸の正(+)の値が振動へのエネルギー注入量を表わしている。図中の数値は特定のキャビテーション数で発生する **Max** 値を示している。この場合の周波数は共鳴周波数的といえる。

- (4) しかし、特定要素の能動エネルギーという尺度からだけで、システムの不安定を判断することは不可で、例えばキャビポンプをシステムのほかの要素とリンクして評価する必要がある。そのような解析システムの例を **Fig.45** に示す。この閉システムの任意制御点をブレイクしてネットのエネルギー出力を評価する。**Fig.44b** はその例を示したもので、特定のキャビテーション数で大きなエネルギー流出がみられる。キャビ数は、運転点が安定であるかどうかを決める場合、重要な役割をもっている。また文献では、システムの安定に影響を与えるのは質量流量ゲイン係数であると指摘されている。また不安定の周波数も一定のキャビ数/平均流量に対しポンプ回転速度の尺度で測れることがわかっている。

- (5) 伝達マトリックス解析結果は実験によって裏づけがなされている。揺動発生に関し解析による予測と実験結果は合致している。また実験によってポンプの上流ー下流の流量には遅れがあることが確認されている。マトリックス解析と実験の組み合わせでキャビ不安定という課題に進歩を与えることは確実である。

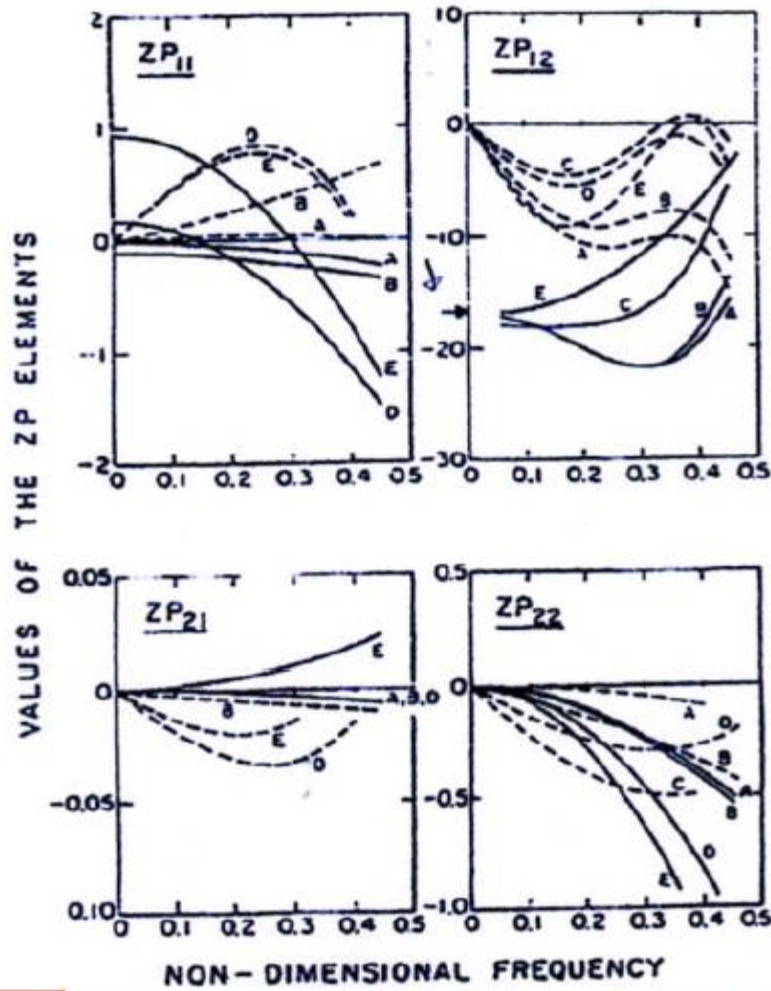


Fig. 43 Curve fits to experimental transfer matrix for pump impeller showing effect of cavitation; $\phi = 0.07$, $\sigma = 0.51$ (A), 0.11(B), 0.046(C), 0.040(D) and 0.023(E). The solid lines indicate the real part and the dashed lines the imaginary part. The quasi-static resistance is indicated by the arrow [108], [111].

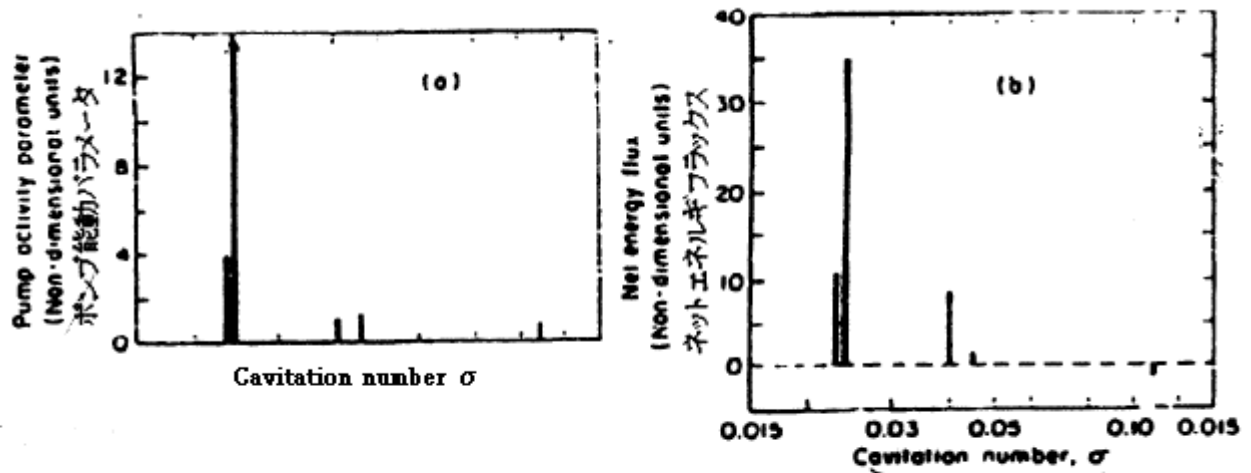


Fig. 44 Effect of cavitation number on pump activity parameter and net system energy flux [108]
ポンプ能動パラメータ及びネットシステムエネルギーフラックスに関するキャビテーション数の影響

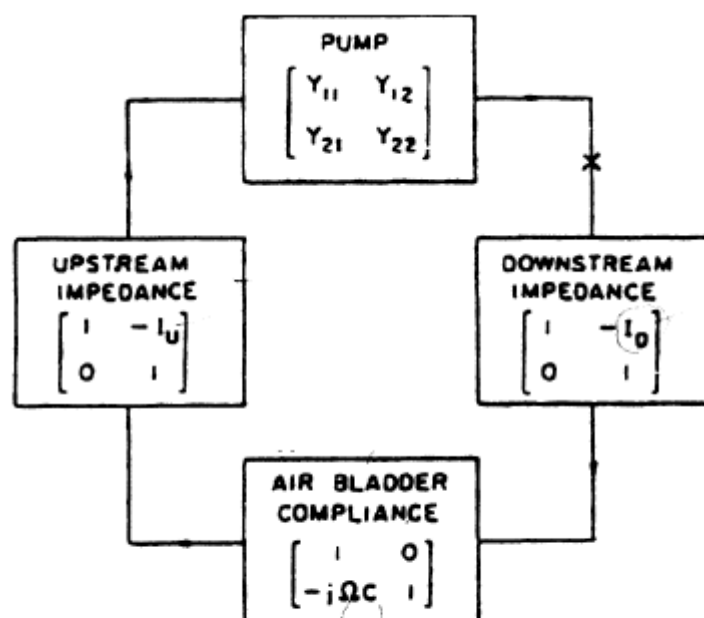


Fig. 45 Transfer matrix representation of overall pumping system
[108, 116]

オーバーオールポンピングシステムの伝達マトリックス