【整番】FE-20-TM-002	【標題】基本的なターボポンプ系流れのサージングの可否(その 2)	
分類：流れ(流れ不安定)／種別：技術メモ	作成年月 ：H18.10／改訂：Ver0.0 (H18. 10)	作成者：N.Miyamoto

全 5 枚

1. はじめに

流れの不安定は、サージング、流量逸走、ポジション不安定あるいはチャタリングなどの形をとって、流量、静圧、液位、ポジションあるいは遊動体の変動/振動/揺動を生じ種々のトラブルとなる。これら不安定現象の中で、ターボマシン(遠心ポンプ/ブロワー/ファン)のサージングは、最も発生のチャンスが多く、旧来より種々の検討/研究が行われ、解析的なアプローチも一般化しているようである。しかし、設計的にみれば解析は最終手段であって、その前に、設計者がこの現象を意識しその発生を判定できることが重要である。その点、下記の文献に示される、代表的サージングパターンに関する簡易判定式の導入は、たいへん役にたつ。

> The Stability of Pumping System－The 1980 Freeman Scholar Lecture
> By E. M. Greitzer (J of Fluid Engineering June 1981 Vol.103/193)

本 TS はこの文献に示される、基本的なターボポンプ系モデル(下図)に関するサージング判定方法を紹介するものである。なお、もっと初歩的なターボポンプ系モデルについては、別途 FE-20-TM-001 の”その 1”を参照されたし。

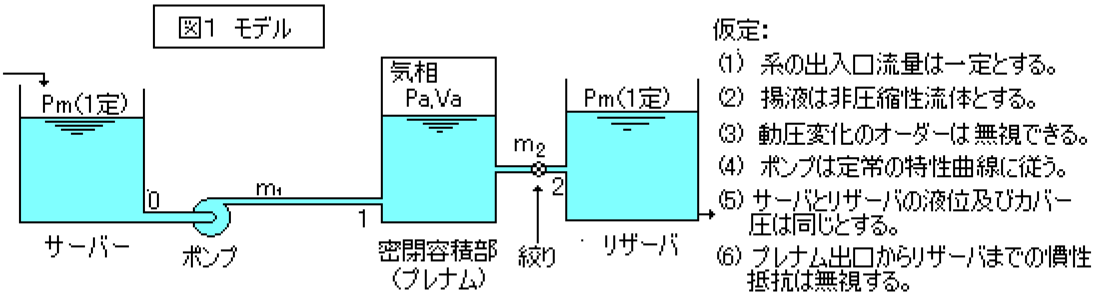


図1 モデル

また、本 TS で使用する記号定義は次の通り、

P＝静圧 (kg/m^2)、	m＝質量流量 (kg s /m)
P^*＝P の平均成分(kg/m^2)	δm＝m の変動成分(kg s /m)
δP＝P の変動成分(kg/m^2)	m_*＝mの平均成分(kg s /m)
ΔP_p ＝ポンプ前後差圧 (kg/m^2)、	q ＝ポンプ特性曲線上の流量(m^3/s)
ΔP_p^*＝ΔP_p の平均成分 (kg/m^2)、	h_p＝ポンプ特性曲線上の揚程(m)
$\delta\Delta p_p$＝Δp_p の変動成分 (kg/m^2)	γ ＝流体の比重量 (kg/m^3)
P_{loss1}＝ 区間 0~1 間の圧力損失(kg/m^2)	g＝ 重力加速度 (m /s^2)
P_{loss2}＝ 区間 1~2 間の管路圧力損失(kg/m^2)	ρ ＝流体(液)の密度 (kg s^2/m^4)
Pa＝ プレナムの気相圧力(kg/m^2)、	ρ_a＝プレナム気相の密度(kg s^2/m^4)
ΔP_T＝ 絞りによる圧力降下(kg/m^2)	A_x＝ 管路の位置 x での断面積(m^2)
ΔP_T^*＝ΔP_T の平均成分 (kg/m^2)	A_{in}＝ 管路入口の断面積 (m^2)
$\delta\Delta P_T$＝Δp_T の変動成分 (kg/m^2)	V_a= プレナムの気相容積 (m^2)
z_{d1}＝ポイント 0~1 間の高さの差(m)	κ ＝ 気相の比熱比(-)
z_{d2}＝ポイント 1~2 間の高さの差(m)	l ＝ 管路長さ(m)
v＝平均流速 (m/s)	L＝ 管路の等価長さ(m)
C_x＝位置 x における軸方向流速 (m/s)	t＝ 時間 (sec.)

サフィックス 0、1、2＝サーバ出口、プレナム入口、リザーバ入口の意味

なお図１に示すように、m_1は区間 0〜1 の流量、m_2は区間 1〜2 間の流量を示す。

2. 安定性判別式の導入

（ｉ）区間 0〜1 において１次元非定常流れの式は、

$$P_0 + \rho v_o^2/2 = P_1 - \angle P_p + \gamma z_{d1} + \rho v_1^2/2 + P_{loss1} + \rho \int_0^1 (\partial C_x/\partial t)\,dx$$

↓

$$P_0 - P_1 = \rho \int_0^1 (\partial C_x/\partial t)\,dx - (\angle P_p - \gamma z_{d1} - P_{loss1}) + \rho (v_1^2 - v_0^2)/2$$

動圧項は無視できるとして

$$P_0 - P_1 = \rho \int_0^1 (\partial C_x/\partial t)\,dx - (\angle P_p - \gamma z_{d1} - P_{loss1})$$

$C_x = Q/A_x = (m_1/\rho)(1/A_x)$であるから

$$P_0 - P_1 = \rho \int_0^1 (1/\rho/A_x)(\partial m_1/\partial t)\,dx - (\angle P_p - \gamma z_{d1} - P_{loss1})$$

$$= (dm_1/dt) \int_0^1 (1/A_x)\,dx - (\angle P_p - \gamma z_{d1} - P_{loss1})$$

ここで、等価長さ $L = A_{in}\int_0^1 (1/A_x)\,dx$ を定義すれば、

$$P_o - P_1 = (L/A_{in})(dm_1/dt) - (\angle P_p - \gamma z_{d1} - P_{loss1}) \quad \text{---}(1)$$

次に、密閉容積部(プレナム)においては出入の体積流量の変化は気相容積 V_a の変化に等しいので

$$m_1 - m_2 = -\rho (dV_a/dt) \quad \text{--}(2)$$

なお V_a は次の２つの法則に支配される。

質量の保存則： $d(\rho_a V_a)/dt = 0$ ---(2a)

等エントロピ関係：P_a/ρ_a^{κ} = 一定 --------------------------------(2b)

次に、プレナム出口からリザーバ入口までは、慣性抵抗(イナータンス)を無視し、絞りによる圧力降下のみを考えて

$$(P_1 + \gamma z_{d2}) - (P_2 + P_{loss2}) = \angle P_T \quad \text{--}(3)$$要検討

与えられた系に微小撹乱が加わったとして、各質量m、各圧力 P を平均成分＋変動成分に展開する。

$$m_1 = m_1^* + \delta m_1,\quad m_2 = m_2^* + \delta m_2$$

$$P_o = P_o^*,\quad P_1 = P_1^* + \delta P_1,\quad P_2 = P_2^*$$

$$\angle P_p = \angle P_p^* + \delta \angle P_p = \angle P_p^* + \{d(\angle P_p)/dm\}\,\delta m_1$$

$$\angle P_T = \angle P_T^* + \delta \angle P_T = \angle P_T^* + \{d(\angle P_T)/dm\}\,\delta m_2$$

これらを(1)(2)(3)式に用いる。まず(1)式にて

$$(P_o^* - P_1^*) - \delta P_1 = (L/A_{in})(dm_1^*/dt) - (\angle p_p^* - \gamma z_{d1} - P_{loss1}) + (L/A_{in})(d\delta m_1/dt) - \{d(\angle P_p)/dm\}\,\delta m_1$$

$(P_o^* - P_1^*) = (L/A_{in})(dm_1^*/dt) - (\angle p_p^* - \gamma z_{d1} - P_{loss1})$であるから、

$$\{d(\angle P_p)/dm\}\,\delta m_1 - (L/A_{in})(d\delta m_1/dt) - \delta P_1 = 0 \quad \text{---------------------------------------}(4)$$

次に(2)式の場合。(2a)式より　$\rho_a(dV_a/dt) + V_a(d\rho_a/dt) = 0 \ \rightarrow\ dV_a/dt = -(V_a/\rho_a)(d\rho_a/dt)$

この結果と(2b)式を(2)式の右辺に代入すると、

$$-\rho (dV_a/dt) = \rho (V_a/\rho_a)(d\rho_a/dt) = \rho \{V_a/(CP_a^{1/\kappa})\}\{d(CP_a^{1/\kappa})/dt\}$$　(但し c ＝定数)

$$= \rho \{V_a/(P_a^{1/\kappa})\}\{d(P_a^{1/\kappa})/dP_a\}(dP_a/dt) = \{\rho V_a/(\kappa P_a)\}(dP_a/dt)$$

ここで$(dP_a/dt) = (dP_1/dt)$であるから(2)式は次のようになる。

$m_1-m_2=\{\rho V_a/(\kappa P_a)\}(dP_1/dt)$

$m_1=m_1^*+\delta m_1$、$m_2=m_2^*+\delta m_2$、$P_1=P_1^*+\delta P_1$ であるから

$m_1-m_2+\delta m_1-\delta m_2=\{\rho V_a/(\kappa P_a)\}(dP_1^*/dt+d\delta P_1/dt)$

$m_1-m_2=\{\rho V_a/(\kappa P_a)\}(dP_1^*/dt)$ であるから

$\delta m_1-\delta m_2=\{\rho V_a/(\kappa P_a)\}(d\delta P_1/dt)$ ------------------------------(5)

次に(3)式の場合。$\Delta P_T=\Delta P_T^*+\{d(\Delta P_T)/dm\}\delta m_2$、$P_1=P_1^*+\delta P_1$、$P_2=P_2^*$であるから

$(P_1^*+\gamma z_{d2}-P_2^*-P_{loss2})+\delta P_1=\Delta P_T^*+\{d(\Delta P_T)/dm\}\delta m_2$

$(P_1^*+\gamma z_{d2}-P_2^*-P_{loss2})=\Delta P_T^*$であるから

$\{d(\Delta P_T^*)/dm\}\delta m_2-\delta P_1=0$ ------------------------------(6)

(4)(5)(6)式から、2 次成分 δm_2 と δP_1 を消去する。

まず(6)式を(5)式に代入して

$\delta m_1-\delta m_2-\{\rho V_a/(\kappa P_a)\}[\delta m_2 d\{d(\Delta P_T)/dm\}/dt+\{d(\Delta P_T)/dm\}(d\delta m_2/dt)]=0$

ここで、[ ]内の第 1 項は微小なのでゼロとして

$\delta m_1-[1+\rho V_a/(\kappa P_a)\}[\{d(\Delta P_T)/dm\}(d/dt)]\delta m_2=0$ この辺り修正要

また、(6)式を(4)式に代入して

$\delta m_2=[(d\Delta P_p/dm)/(d\Delta P_T/dm)-(L/A_{in})/(d\Delta P_T/dm)(d/dt)]\delta m_1$

これを前の結果に代入して

$\{\rho V_a/(\kappa P_a)\}(L/A_{in})d^2\delta m_1/dt^2+[(L/A_{in})/(d\Delta P_T/dm)-\{\rho V_a/(\kappa P_a)\}/(d\Delta P_p/dm)]d\delta m_1/dt$
$+[1-(d\Delta P_p/dm)/(d\Delta P_T/dm)]\delta m_1=0$

$d^2\delta m_1/dt^2+[\{\rho V_a/(\kappa P_a)\}(L/A_{in})\{1/(d\Delta P_T/dm)\}-(d\Delta P_p/dm)](A_{in}/L)d\delta m_1/dt$
$+\{1-(d\Delta P_p/dm)/(d\Delta P_T/dm)\}(A_{in}/L)\{\kappa P_a/(\rho V_a)\}\delta m_1=0$

これは 2 階常微分方程式の解を $\delta m_1=e^{st}$ とすると、その特性方程式は

$s^2+2\alpha s+\beta=0$

$\alpha=[\{\kappa P_a/(\rho V_a)\}(L/A_{in})\{1/(d\Delta P_T/dm)\}-(d\Delta P_p/dm)](A_{in}/L)/2$ -------(7)

$\beta=\{1-(d\Delta P_p/dm)/(d\Delta P_T/dm)\}(A_{in}/L)\{\kappa P_a/(\rho V_a)\}$

安定性判別は次の通り。

$\beta<0$ のとき	----------→	静的不安定
$\alpha<0$ のとき	----------→	動的不安定

パラメータ α、β のなかで、ポンプ特性曲線の傾き$(d\Delta P_p/dm)$は、運転点における特性曲線の**接線勾配**である。ポンプ特性曲線は通常、体積流量－揚程のカーブで与えられるので、$(d\Delta P_p/dm)\rightarrow g(dh_p/dq)$で計算する。ここで dh_p は揚程 h(m)の増(減)分、dq は体積流量 q(m^3/s)の増(減)分、g は重力加速度(9.807m/s^2)である。dh_p、dq はいずれも特性曲線図より読み取る。

また、絞り要素(制御弁/オリフィス類)の$(d\Delta P_T/dm)$は、運転点における圧力損失-流量関係曲線の**接線勾配**である。ここで $d\Delta P_T$ は圧力損失(kg/m^2)の増(減)分、dm は質量流量(kg s/m)の増(減)分。$d\Delta P_T$、dm もまた関係線図より読み取る。

3.　安定性の傾向

静的不安定は、$\beta=\{1-(d\angle P_p/dm)/(d\angle P_T/dm)\}(A_{in}/L)\{\kappa P_a/(\rho V_a)\}<0$　即ち

$$(d\angle P_p/dm) > (d\angle P_T/dm) \quad \text{------(8)}$$

のときに起こる。しかし、絞り要素の特性曲線の接線勾配$(d\angle P_T/dm)$は常に正であるのに対してポンプ特性曲線の右下がり部分ではポンプ特性曲線の接線勾配$(d\angle P_p/dm)$は負であるから、βは常に正の値を持ち安定する。然るに、ポンプ特性曲線の右上がり部分では、ポンプ特性曲線の接線勾配も絞り要素の特性曲線の接線勾配も正であって、必ずしもβは正とは限らないことになる！

動的不安定は、$\alpha=[\{\kappa P_a/(\rho V_a)\}(L/A_{in})\{1/(d\angle P_T/dm)\}-(d\angle P_p/dm)](A_{in}/L)/2<0$　即ち

$$\{\kappa P_a/(\rho V_a)\}(L/A_{in})\{1/(d\angle P_T/dm)\}<(d\angle P_p/dm) \quad \text{------(9)}$$

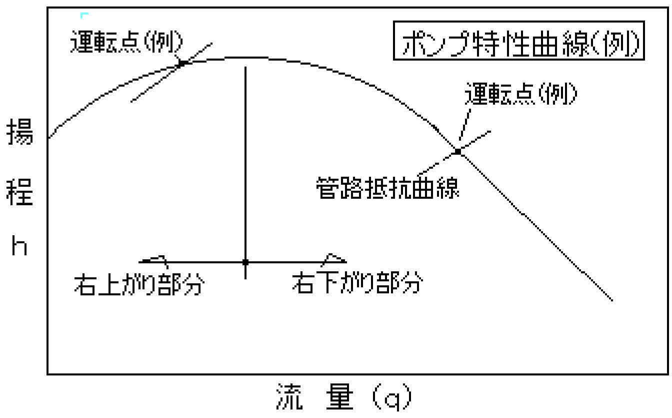
のときに起きる。しかし静的不安定と同じく$(d\angle P_T/dm)$は常に正であるのに対し、ポンプ特性曲線の右下がり領域では$(d\angle P_p/dm)$は常に負であるから、αは常に正の値を持ち安定する。然るに、ポンプ特性曲線の右上がり部分では$(d\angle P_p/dm)$は負になり、必ずしもβは正とは限らないことになる。実際には$(d\angle P_p/dm)$が険しくなることが多く、また(ρV_a)が大きくなることが多いことから、殆どの場合、この不等式が成立して不安定化することの方が多い。また、プレナムの気相が大気につながりV_aが非常に大きくなると不等式の右辺はゼロに近づき、不安定になる。ただ、注目すべきは、

[FE-20-TM-001(その 1)]で示すように大気開放プレナムではポンプカーブに右上がりがあると例外無しに不安定になるが、密閉プレナムでは(9)の不等式を満たさないならば、たとえ右上がりであってもサージングは起きないということになる。例えば、

　　プレナム気相容積 Va が極めて小さいとき、配管径が相当に小さく(A_{in}小で)L が相当に長いとき、

　　絞りが緩やかなとき(但し静的不安定の懸念あり)

にサージングが回避される可能性がある。



【 解 説 】

1. 本 TS は文献(0)の付録に基づいている。モデルは、別途[FE-20-TM-001 基本的なターボポンプ系流れのサージングの可否(その 1)]と同じような単純なモデルであるが、ポンプ送り先が大気開放タンクでなく密閉タンク(プレナム)になる。大気開放タンクの場合では、入口側即ちポンプ吐出管路側で起きた流量変動はタンク内で十分開放されタンク出口側には流量変動がないと仮定してもそれほどおかしくはなかったが、密閉タンクの場合で、は気相のバネ効果によって出口側にも流量変動が起きると考えざるを得ない。そのため、本 TS の方が(その 1)に比べて多少複雑になっている。

2. 図 1 のモデルは文献(0)に記述に従ったもの。仮定(5)は、ポンプで付加されたエネルギ(揚程)を絞り要素ですべて消耗させる($\triangle P_p$=$\triangle P_T$ とする)趣旨からセットしたもの。しかし$\triangle P_p$=$\triangle P_T$ であれば、実揚程も圧力損失も位置ヘッドもゼロという仮定になり、結果は同じになったとしても、結果に至る過程では不安がのこるので、判別式の導入仮定ではこれらを全て取り込んでいる。この場合、絞り部の$\triangle P_T$ は実際に要素に生じる圧力損失となる。

3. 絞り要素が、果たしてプレナムの後方にくるかどうかはプラント次第である。また、プレナムのすぐ後にリザーバがくるかどうかも然り。そう考えると図 1 のモデルに一般性は乏しい。しかし、ターボポンプの後で何らかの絞りがあり、その間に大きな空気溜りができているようなケースでは、本 TS の判別法は有効である。絞り要素としては、原本は制御弁/オリフィスのようなきつい絞りを想定しているが、もっとマイルドな絞りでも構わないだろう。

4. 判定式の導入では、(5)式の導出で無理がある。本来、P_a や V_a には変動成分が含まれるので多分数学扱いはこんなに単純ではない。ただ V_a が比較的大きくてそれらの変化がインパクトにならない
範囲では、近似的に(5)式は成立すると思う。なお、文献(0)の式では(5)式の P_a は P_1 になっているが、P_a≒P_1 になるとは限らないので、P_a のままにしておいた。

5. このほか、いろいろ理解しきれないところがある。この点は今後の Ver.Up で対処する。
ただ、**文献(0)の簡易判別式の導入方法はサージング問題を扱う上で大変役にたつ**と思う。残念ながら、普遍性が乏しいので、個々のモデルでは、新たに判別式を導く必要がある。その場合、本 TS は有効な手引きになると思う。

引用文献：

(0) The Stability of Pumping System－The 1980 Freeman Scholar Lecture
by E. M. Greitzer (J of Fluid Engineering June 1981 Vol.103/193)