

【整番】 FE-20-TM-001	【標題】 基本的なターボポンプ系流れのサージングの可否(その 1)
分類：流れ(流れ不安定)/種別：推奨指針	作成年月：H18.9/改訂：Ver0.0 (H18.10) 作成者：N.Miyamoto

全 5 枚

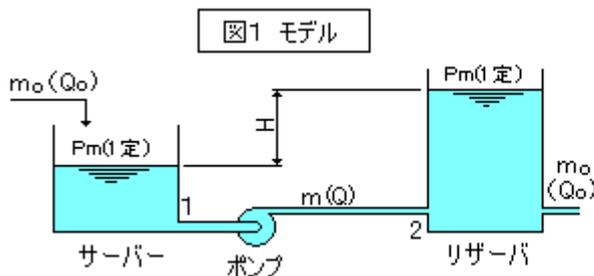
1. はじめに

流れの不安定は、サージング、流量逸走、ポジション不安定あるいはチャタリングなどの形をとって、流量、静圧、液位、ポジションあるいは遊動体の変動/振動/揺動を生じ種々のトラブルとなる。これら不安定現象の中で、ターボマシン(遠心ポンプ/ブロワー/ファン)のサージングは、最も発生 chances が多く、旧来より種々の検討/研究が行われ、解析的なアプローチも一般化しているようである。しかし、設計的にみれば解析は最終手段であって、その前に、設計者がこの現象を意識しその発生を判定できることが重要である。その点、下記の文献に示される、代表的サージングパターンに関する簡易判定式の導入は、たいへん役にたつ。

The Stability of Pumping System – The 1980 Freeman Scholar Lecture

By E. M. Greitzer (J of Fluid Engineering June 1981 Vol.103/193)

本 TS はこの文献の手法に倣って、最も初歩的なターボポンプ系モデル(下図)に関するサージング判定式を作成しその基本的な傾向を説明するものである。なお、上記文献に示される基本的なターボポンプ系モデルはここで示されるものに比べやや複雑になるので、別途 FE-20-TM-002 の”その 2”で紹介する。



仮定:

- (1) 系の出入口流量は一定とする。
- (2) 揚液は非圧縮性流体とする。
- (3) ポンプ揚程に対し 動圧変化のオーダーは無視できる。
- (4) ポンプは定常の特性曲線に従う。

また、本 TS で使用する記号定義は次の通り、

P = 静圧 (kg/m^2)、

ΔP_p = ポンプ前後差圧 (kg/m^2)、

ΔP_p^* = ΔP_p の平均成分 (kg/m^2)、

$\delta \Delta P_p$ = ΔP_p の変動成分 (kg/m^2)

P_{loss} = 区間 1~2 の圧力損失(kg/m^2)

z_d = ポイント 1~2 の高さの差(m)

v = 管内平均流速 (m/s)

C_x = 位置 x における軸方向流速 (m/s)

m = 質量流量 (kg s/m)

m_o = m の平均成分ないし出入口流量(kg s/m)

δm = m の変動成分(kg s/m)

q = ポンプ特性曲線上の流量(m^3/s)

サフィックス 1, 2 = サーバ出口、リザーバ入口を示す

γ = 流体の比重量 (kg/m^3)

g = 重力加速度 (9.807m/s^2)

ρ = 流体の密度 ($\text{kg s}^2/\text{m}^4$)

A_{in} = 管路入口の断面積(m^2)

A_x = 管路の位置 x での断面積(m^2)

A_R = 槽の断面積(m^2)

l = 管路長さ(m)

L = 管路の等価長さ(m)

H = 実揚程(m)

t = 時間(sec.)

h_p = ポンプ特性曲線上の揚程(m)

2. 安定性判別式の導入

区間 1～2 において 1 次元非定常流れの式は、

$$P_1 + \rho v_1^2/2 = P_2 - \Delta P_p + \gamma z_d + \rho v_2^2/2 + P_{\text{loss}} + \rho \int_0^1 (\partial C_x / \partial t) dx$$

↓

$$P_1 - P_2 = \rho \int_0^1 (\partial C_x / \partial t) dx - (\Delta P_p - \gamma z_d - P_{\text{loss}}) + \rho (v_2^2 - v_1^2) / 2$$

動圧項は無視できるとして

$$P_1 - P_2 = \rho \int_0^1 (\partial C_x / \partial t) dx - (\Delta P_p - \gamma z_d - P_{\text{loss}})$$

$C_x = Q/A_x = (m_1/\rho)(1/A_x)$ であるから

$$P_1 - P_2 = \rho \int_0^1 (1/\rho/A_x) (\partial m_1 / \partial t) dx - (\Delta P_p - \gamma z_d - P_{\text{loss}})$$

$$= (dm_1/dt) \int_0^1 (1/A_x) dx - (\Delta P_p - \gamma z_d - P_{\text{loss}})$$

ここで、等価長さ $L = A_{\text{in}} \int_0^1 (1/A_x) dx$ を定義すれば、

$$P_1 - P_2 = (L/A_{\text{in}})(dm_1/dt) - (\Delta P_p - \gamma z_d - P_{\text{loss}})$$

また、 $P_2 - P_1 = \gamma H - \gamma z_d - P_{\text{loss}}$ であるから、

$$\gamma H - \Delta P_p + (L/A_{\text{in}})(dm_1/dt) = 0 \quad \text{-----}(1)$$

次にリザーバにおいて、質量保存則より

$$m - m_0 = \rho A_R (dH/dt) \quad \text{-----}(2)$$

(1)を(2)に代入して

$$m - m_0 = \rho A_R (d/dt) \{ \Delta P_p / \gamma - (1/\gamma)(L/A_{\text{in}})(dm/dt) \} = (A_R/g) \{ d\Delta P_p/dt - (L/A_{\text{in}})(d^2m/dt^2) \} \quad \text{-----}(3)$$

次に任意時刻の質量流量 m は平均成分 (m_0) と変動成分 (δm) の和であるから

$$m = m_0 + \delta m \quad \text{-----}(4)$$

また、ポンプの出入り口の差圧 (ΔP_p) は流量 m の関数であることから同様に時間変動する。即ち

$$\Delta P_p = \Delta P_p^* + \delta P_{pp} = \Delta P_p^* + (d\Delta P_p/dm) \delta m \quad \text{-----}(5)$$

この式で ΔP_p^* はポンプの平均ヘッド圧、 $(d\Delta P_p/dm)$ はポンプ特性曲線の勾配を表すものである。

(4) (5) 式を(3)式に代入して、次の 2 階常微分方程式が得られる。

$$d^2 \delta m/dt^2 - (A_{\text{in}}/L)(d\Delta P_p/dm)(d\delta m/dt) + (g/L)(A_{\text{in}}/A_R) \delta m = 0 \quad \text{-----}(6)$$

解のフォームを e^{st} とおいて

$$s^2 + 2\alpha s + \beta = 0 \quad \text{-----}(7)$$

ここで $\alpha = -1/2(A_{\text{in}}/L)(d\Delta P_p/dm)$ 、 $\beta = (g/L)(A_{\text{in}}/A_R)$

この方程式の特性は次のようである (末尾参照)。

$\beta < 0$ のとき	-----→	静的不安定
$\alpha < 0$ のとき	-----→	動的不安定

ターボポンプ系では $[\beta = (g/L)(A_{\text{in}}/A_R)]$ は常に正であるから静的には常に安定である。一方、動的には次のように明暗を分ける。

- (a) ポンプがその特性曲線の負勾配(右下がり勾配)の領域で使われるときは $(d\Delta P_p/dm) < 0$ の故に、 $\alpha > 0$ になるので、不安定になることはない。

(b) ところがポンプがその特性曲線の正勾配(右上がり勾配)の領域で使われるときは、

$(d\Delta P_p/dm) > 0$ の故に、 $\alpha < 0$ になるので、不安定になる。

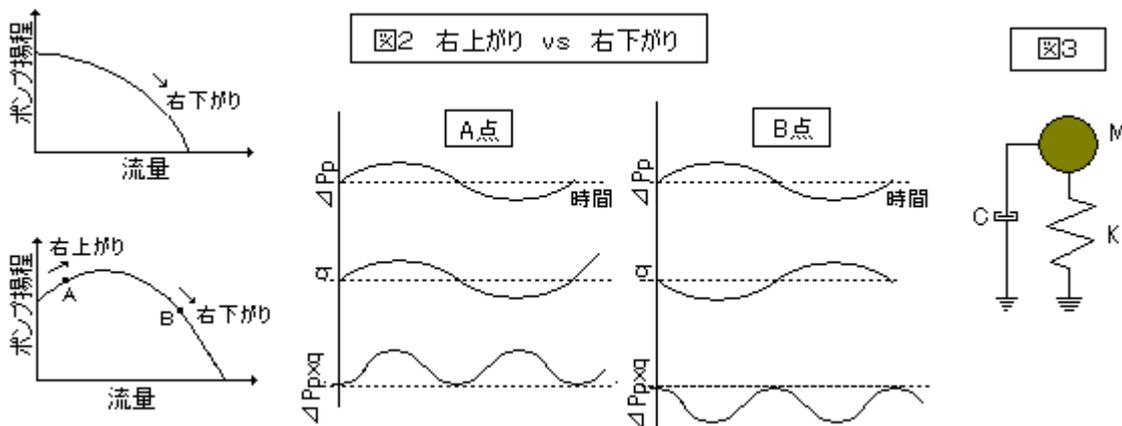
$(d\Delta P_p/dm) < 0 \rightarrow (dh_p/dq) < 0$ であるから、動的不安定は運転点におけるポンプ特性曲線の勾配をみれば、すぐに判定できる。

ポンプの不安定現象はエネルギーのサプライからも説明される。

振動エネルギーは常にポンプから供給されその1サイクル当たりのエネルギーインプットは

$$E_{in} = \oint \Delta P_p q dt \quad (\text{ここで } \Delta P_p = \text{圧力変動}, q = \text{流量変動})$$

E_{in} は、右上がり部分と右下がり部分で異なっている。図2にこれを示す。右上がりのA点では ΔP_p と q が同位相になっているので $E_{in} > 0$ である。振動は持続する。一方、右下がりのB点では、逆位相になるので $E_{in} < 0$ である。振動は減衰する。



3. 傾向と対策

ポンプサージングの周期性について少し考えてみる。(6)式を変形し質量流量の変動分 δm を X とおいて

$$M d^2 X / dt^2 + C dX / dt + K X = 0 \quad \text{-----(8)}$$

ここで $M = (L/A_{in})$ 、 $C = -d\Delta P_p/dm$ 、 $K = g/A_R$ 、 $X = \delta m$

この式は第1項が管路流体の慣性力、第2項が外力(ポンプ差圧)による減衰力、第3項が容積部のバネ力に対応しており、図3のマスーバネーダッシュポットモデルの自由振動式と同じフォームになる。この場合、系の一次固有振動数 f_1 は

$$f_1 = (1/2\pi)(K/M)^{0.5} = (1/2\pi)\{(g/L)(A_{in}/A_R)\}^{0.5}$$

となり、管路が長く大きなりザーバになると分母が大きくなるので相当に低い値になる。ポンプの吐出流量が長周期で揺らぐのはこのためと思われる。1次の固有値が低いと高次の固有値は密になり、流れのいかなる攪乱にも敏感に反応するようになる。また、流体の場合はかなりの高次まで有意な共鳴が起こるので、例えば $0.02 \sim 5\text{Hz}$ といった広い周波数域で増幅現象が現れる。ただ、攪乱が微小に留まるときはこの現象は殆ど問題にならない。ところがポンプ特性曲線が右上がりでは $(d\Delta P_p/dm)$ が正の値を持っていると、減衰相当項 C は負(いわゆる**負性減衰**)になって攪乱は自励的に肥大化するので、増幅現象ははっきり表面に現れサージングとして認知できる。そしてこの増幅された攪乱の振動数が、管路(流体柱)の固有振動数や配管構造の固有振動数と漸近すると顕著な揺れとなって現れる。

サージングを防止するには、特性曲線の右下がり部分に運転点を移せばよいが、立ち上げ運転や低流量運転などサージング域で運転せざるをえないことが多い。この場合、次の対策が考えられる。

(i) ポンプの出口にオリフィスを設け右上がりのポンプ性能曲線をフラットにする。

(ii) ミニフローラインを大きくとり右下がり域を回避する。

(iii) 容量として働く部分で圧力エネルギーを消耗させる。例えばリザーバ水位を一定に保つ。

実際には、(i)(ii)がよく採用されている。

以上

(引用文献)

(0) The Stability of Pumping System—The 1980 Freeman Scholar Lecture

by E. M. Greitzer (J of Fluid Engineering June 1981 Vol.103/193)

添付：2階常微分方程式の解の安定性について：文献(0)より抜粋

¹The terms dynamic and static instability can be made more quantitative by the following illustration. Consider a simple second order system described by the equation

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + 2\alpha \frac{dX}{dt} + \beta X = 0$$

where α and β are constants of the system. The transient response of the system to an initial perturbation is given by

$$X = A \exp [(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta})t] + B \exp [(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta})t]$$

where the constants A and B are determined by the initial conditions. If $\beta > \alpha^2$, the condition for instability is simply $\alpha < 0$, which corresponds to oscillations of exponentially growing amplitude. Instability will also occur if $\beta < 0$, independent of the value of α ; however in this case the exponential growth is non-oscillatory. It is usual to denote these two types of instability as dynamic and static respectively. Static stability ($\beta > 0$) is a necessary but not sufficient condition for dynamic stability.

The distinction between the two types of instability appears to have been made first by Maxwell [2], who wrote:

"It will be seen that the motion of a machine with its governor consists in general of a uniform motion, combined with a disturbance which may be expressed as the sum of several component motions. These components may be of four different kinds:

1. The disturbance may continually increase.
2. It may continually diminish.
3. It may be an oscillation of continually increasing amplitude.
4. It may be an oscillation of continually decreasing amplitude.

The first and third cases are evidently inconsistent with the stability of motion; and the second and fourth alone are admissible in a good governor."

The first case is the static instability, the third is the dynamic instability.

メモ：減衰自由振動式： $m d^2x/dt^2 + c dx/dt + kx = 0$ (マス-バネ-ダッシュポットモデル)

解を $x = e^{st}$ とおいて 特性方程式は $s^2 + (c/m)s + (k/m) = 0$

$c/(2m) = \alpha$ 、 $k/m = \beta$ とおいて $s^2 + 2\alpha s + \beta = 0$

この2次方程式の解は $s_1 = -\alpha + (\alpha^2 - \beta)^{0.5}$ 、 $s_2 = -\alpha - (\alpha^2 - \beta)^{0.5}$

自由振動式の一般解は $x = A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t}$

上記の2次方程式の解が実数になるか、虚数になるかはカッコ内の正負による。即ち

$\beta > \alpha^2 \rightarrow$ 虚根(複素根) 、 $\beta < \alpha^2 \rightarrow$ 実根

複素根の場合、 $x = C_5 \exp[-\alpha t] \cos(\omega_d t - \theta)$ 但し $\omega_d = (\beta - \alpha^2)^{0.5}$

もし $\alpha > 0$ であれば、時間 t が経つほど $\exp[-\alpha t]$ は小さくなり減衰振動になる(安定化)

もし $\alpha < 0$ であれば、時間 t が経つほど $\exp[-\alpha t]$ は大きくなり発散振動になる(不安定化)

従って、 $\beta > \alpha^2$ かつ $\alpha < 0$ -----> 不安定

次に実根をもつ場合は $\beta < 0$ と $0 < \beta < \alpha^2$ に分けて考える。

実根： $x = A \exp[-\alpha + (\alpha^2 - \beta)^{0.5}] + B \exp[-\alpha - (\alpha^2 - \beta)^{0.5}]$

もし $\beta < 0$ であれば、 $(\alpha^2 - \beta)^{0.5} > |\alpha|$ なので

$\exp[-\alpha + (\alpha^2 - \beta)^{0.5}]$ は、 α の正負によらず 正の値をもち時間が経つほど大きくなる

$\exp[-\alpha - (\alpha^2 - \beta)^{0.5}]$ は、 α の正負によらず 負の値をもち時間が経つと 1 に収束する

結局、これらの定数項を乗じて合算した解 x は α の如何によらず発散する。但し発散振動はないので静的不安定になる

もし $0 < \beta < \alpha^2$ であれば、 $(\alpha^2 - \beta)^{0.5} < |\alpha|$ なので

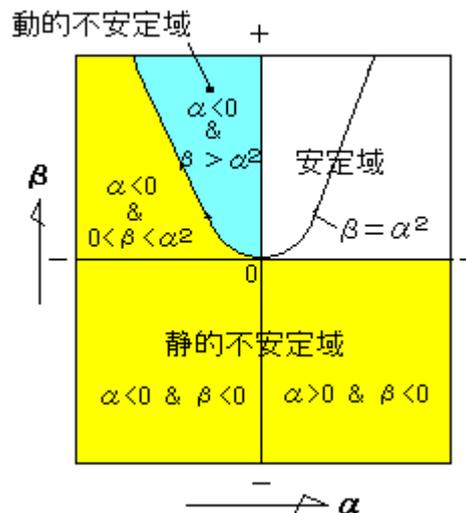
$\exp[-\alpha + (\alpha^2 - \beta)^{0.5}]$ 、 $\exp[-\alpha - (\alpha^2 - \beta)^{0.5}]$ と

α が正のとき 負の値をもち時間が経つと 1 に収束する

α が負のとき 正の値をもち時間が経つほど大きくなる

従って α が負のとき発散するが、発散振動はなく静的不安定になる。

以上を図に表せば下図のようになる。以上、文献(0)の記述の背景を説明した。



なお、上記の記述では $\alpha < 0$ & $0 < \beta < \alpha^2$ 域については触れられていない。何故？