

【整番】 FE-18-TM-007	【標題】 脈動流の計算—伝達マトリックス法その 1
分類：流れ(脈動流)/種別：技術メモ	作成年月：H21.11/改訂：Ver0.0(21.12) 作成者：N.Miyamoto

全 28 枚

1. はじめに

プラント設備の振動問題のひとつに脈動現象がある。この現象は次のような加振源がある時に派生する。

- ・レシプロマシン (レシプロコンプレッサ/プランジャポンプ/ギアポンプ/内燃機関など)
- ・局部的な流体振動(キャビティ振動/ポンプ羽根通過振動/流動層振動など)

脈動流れは配管/機器/計装品にダメージを与えるので、脈動の規模を予測し対策を講じるために設計の早い段階で脈動計算が行われる。

この脈動計算には、次のような方法がある(これらの特徴/方程式は次頁の表に要約される)。

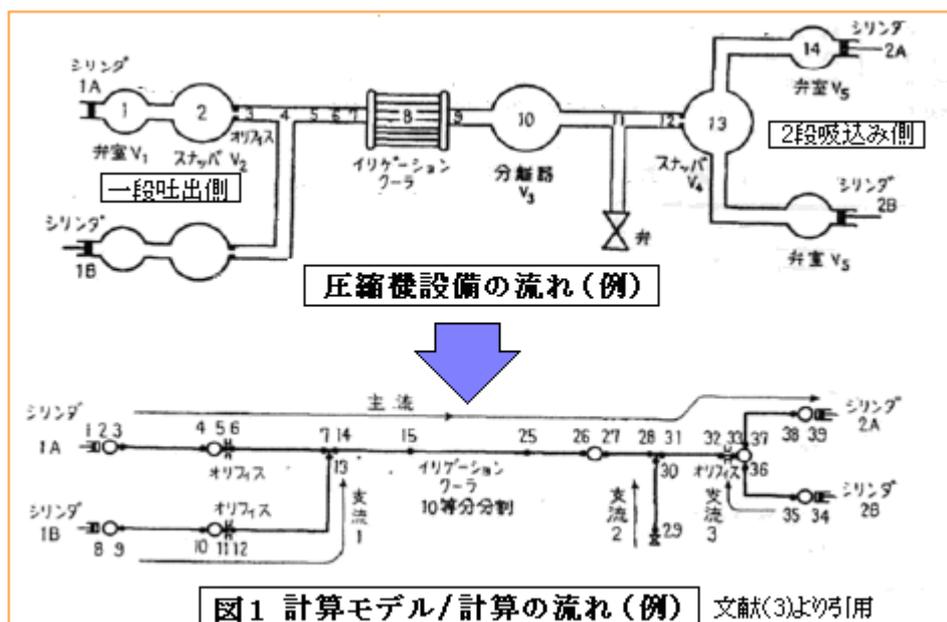
伝達マトリックス法、剛性マトリックス法、モーダル解析法、有限要素法、境界要素法

これらの中で、**伝達マトリックス法が最もよく知られており、古くから利用されてきた**。この方法は線形(1次式)の伝達関数を用いるもの。代数的で判り易く流れの変動を周波数領域で捉える上で、好適な方法である。一方、弱点としては、「管路網的な複雑な流れが扱づらいこと」、「共振域の過大な振幅に対して精度が落ちること」などが挙げられる。

伝達マトリックス法は今まで数多くのテキスト/文献類で扱われている。特に **Streeter** のテキスト⁽⁶⁾ は理論から実際まで、徹底した設計ガイドになっている。従ってわざわざ脈動計算法に関する手引きを書く必要性はない。しかし、いかなるテキスト/文献の内容にも適不適があり、例えば計算プログラムを組む上で、全てがクリアであるわけではない。そこでここでは、**プログラム作成用途を前提にして伝達マトリックス法による脈動計算法をまとめてみた**。なお、伝達マトリックス計算法にはいろんな手法があるようだが、ここでは初心者にも判り易く計算しやすい、文献(3)の手法を採っている。

なおここでは伝達マトリックス法そのものを記述している。例えば派生的なインピーダンス法や簡易マトリックス計算については、下記の TS でまとめているので参照されたい。

【 FE-18-TM-008 脈動流の計算—伝達マトリックス法その 2 】(準備中)



各種脈動計算法の特徴/方程式 [テキスト(1)より引用]

計算法	特徴等	方程式
伝達マトリックス法 文献 ⁷⁻¹⁶⁾	<ul style="list-style-type: none"> 配管内の圧力脈動応答を周波数領域で求める方法であり、最も広く利用されている。 配管内の気柱共鳴周波数が理論的に求まる。 バイパス配管、管路網等配管系が複雑になると解析が難しくなる。 	<p>(p: 圧力変動量、q: 流量変動量)</p> $\begin{Bmatrix} p_{out} \\ q_{out} \end{Bmatrix} = [M] \begin{Bmatrix} p_{in} \\ q_{in} \end{Bmatrix}$
剛性マトリックス法 文献 ¹⁷⁾	<ul style="list-style-type: none"> 伝達マトリックス法を改良して、複雑な配管系も解析できるように改良した周波数領域の解法。 流量と圧力の関係が構造解析の剛性マトリックスのように組み立てられることから名付けられた方法。 	$\begin{Bmatrix} q_{in} \\ q_{out} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} p_{in} \\ p_{out} \end{Bmatrix}$
モード解析法 文献 ¹⁸⁻²³⁾	<ul style="list-style-type: none"> 複雑な配管系の圧力脈動解析に振動解析でよく用いられるモード法を適用した方法。 共鳴周波数やモード関数は伝達マトリックス法等を利用して求め、時刻歴解析で圧力脈動を求める方法であり、直接積分法に比べて計算時間が短い。 	$q = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) \cdot y_i(t)$ $p = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \cdot z_i(t)$
有限要素法 文献 ²⁴⁻²⁷⁾	<ul style="list-style-type: none"> 複雑な配管系の圧力脈動解析方法として開発された解法。 配管内流体を振動解析の縦振動のように一次元問題として解き、全体系のマトリックスを構造解析と同様に組み立てて圧力脈動応答を求める。周波数領域と時刻歴の両方法がある。 	$[M]\dot{q} + [C]q + [K]q dt = p$
境界要素法 文献 ²⁸⁻³²⁾	<ul style="list-style-type: none"> 内部流体が一次元流れとして扱えない大きなタンクやサイレンサ部分への適用に有用な周波数領域の解法。 波長に比べて解析対象物が大きな場合は、計算時間が低減できる。 	$[H]\{p\} = [G]\{q\}$

2. 脈動計算の基本

(1) 伝達マトリックス法は、振動源の波動即ちある周波数をもった圧力/流量の変動が、流体で充満した管路(配管)を伝播してどういう応答が得られるかを伝達関数で表現して計算するものである。伝達関数は

$$p_{out} = T_{11} \cdot p_{in} + T_{12} \cdot m_{in}$$

$$m_{out} = T_{21} \cdot p_{in} + T_{22} \cdot m_{in}$$

で表現される。この一次連立式をマトリックス表示すると、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} p_{out} \\ m_{out} \end{Bmatrix} = [M] \begin{Bmatrix} p_{in} \\ m_{in} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{in} \\ m_{in} \end{Bmatrix}$$

この式では右辺の(p_{in}, m_{in})が発信側(入力側)の情報、左辺の(p_{out}, m_{out})が受信側(出力側)の情報になり情報を伝達する媒体が[M]になる。[M]は正方マトリックスで**伝達マトリックス**と呼ばれている。伝達マトリックスは管路を構成する要素によって異なる。構成要素は主に内部形状、音響的な特性によって区分されている。代表的なものを挙げれば、

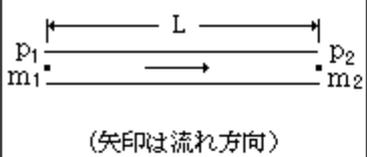
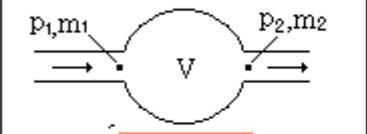
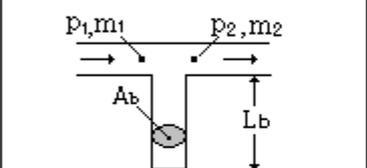
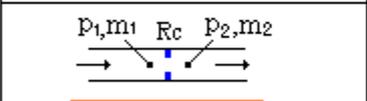
直管要素：曲管/エルボも含め1次元的な拡がりを持った同じ径を有する管/チューブ/ダクトの類い
容積要素：1次元的な拡がりを持たず体積的に扱える部分で、容器/スナッパ/ボトルの類い。

オリフィス要素：抵抗を与えて流れを絞る部分。弁/オリフィスの類い

先止り分岐要素：管路から分岐した長さ部分。排気管/ドレン管の類い。

表1にこれら要素の伝達マトリックス式を示す。その他にも区分すべき要素(例えば多重ループ要素、アキュムレータ要素、ポンプ要素などがあるが、それらは今後追加してゆく予定である。

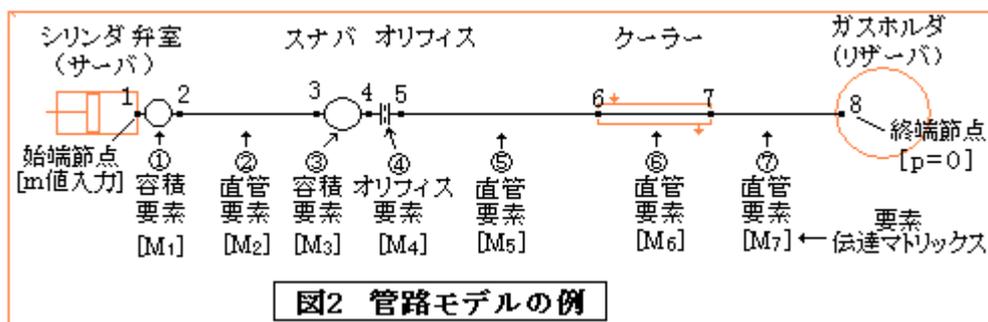
表1 各種管路要素の伝達マトリックス式

要素の種類	伝達マトリックス式
<p>直管要素</p>  <p>(矢印は流れ方向)</p>	$\begin{Bmatrix} p_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(i\sigma L) & -(C\delta/A)\sinh(i\sigma L) \\ -[A/(C\delta)]\sinh(i\sigma L) & \cosh(i\sigma L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ m_1 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} p_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(i\sigma L) & (C\delta/A)\sinh(i\sigma L) \\ [A/(C\delta)]\sinh(i\sigma L) & \cosh(i\sigma L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_2 \\ m_2 \end{Bmatrix}$
<p>容積要素</p> 	$\begin{Bmatrix} p_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i\omega(V/a^2) & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ m_1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} p_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i\omega(V/a^2) & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_2 \\ m_2 \end{Bmatrix}$
<p>先止り分岐要素</p> 	$\begin{Bmatrix} p_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -[A_b/(C\delta_b)]\tanh(i\sigma_b L_b) & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ m_1 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} p_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ [A_b/(C\delta_b)]\tanh(i\sigma_b L_b) & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_2 \\ m_2 \end{Bmatrix}$
<p>オリフィス要素</p> 	$\begin{Bmatrix} p_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ m_1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} p_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_2 \\ m_2 \end{Bmatrix}$
<p>記号説明： $p =$ 圧力変動量(Pa) $= p_o(x) \exp(i\omega t)$, $m =$ 流量変動量(kg/s) $= m_o(x) \exp(i\omega t)$ $p_o(x) =$ 軸方向分布の圧力振幅(Pa)[0-P], $m_o(x) =$ 軸方向分布の流量振幅(kg/s)[0-P] $\omega =$ 脈動の角周波数成分(rad./s), $i =$ 虚数($\sqrt{-1}$), $t =$ 時刻(sec) $\delta =$ パラメータ $= [1 - i(R_p/\omega)]^{0.5}$, $\sigma =$ パラメータ $= (\omega/a)\delta$ $R_p =$ 管の等価線形抵抗係数 $= (1/\rho)\{\lambda/(2D)\}(\hat{m}/A)$ $\rho =$ 流体密度(kg/m³), $\lambda =$ 管摩擦損失係数(-), $D =$ 管内径(m) $\hat{m} =$ 等価線形流量, $A =$ 流路断面積(m²) $C =$ 圧力伝播速度(流体音速)[m/s], $L =$ 要素長さ(m), $V =$ 容積要素の内容積(m³) $A_b =$ 先止り分岐管の流路断面積(m²), $L_b =$ 分岐管長さ(m), $\delta_b =$ 分岐管における δ $\sigma_b =$ 分岐管における σ, $R_c =$ オリフィスの等価線形抵抗係数 サフィックス 1,2 \rightarrow 夫々入口側、出口側の意味</p>	

これら伝達式からわかるように、圧力変動及び流量変動は軸方向について周期関数であり、振動状態を表わしている。なおこの場合、変動量[p,m]を圧力/流量の振幅(片振幅) [p_o,m_o]で代表させて云うことが多い。これは、付帯のパラメータ $\exp(i\omega t)$ 即ち時間変化項を無視しても特に影響がないからである。従って伝達マトリックス法では脈動をその位置における振幅のみで考えればよい。ここでも時間変化項は割愛する。振幅の大きさは周波数に依存するので、これは周波数領域で現象をとらえることになる。

表1にはそれぞれ2種類の式が表示されている。流れ方向に沿って、上流から下流に向かって計算する時はコラム上段あるいは左側の式を、下流から上流に遡る時はコラム下段あるいは右側の式を適用する。

(2) 管路は、**管路要素の集合体**である。例えば下図のコンプレッサ出口からガスホルダに到るラインはサーバ(始端節点)、容積要素、直管要素、オリフィス要素およびリザーバ(終端節点)が集合したものでその出入口(節点と称す)は、隣接要素と共有される。



これらの要素はシーケンシャルに繋がれており、始端の節点に入力された波動は逐次、要素という媒体を経て終端の節点に到る。この場合、波動の伝播に伴う消長(振幅変化)は、節点のデータ(p,m)でカウントされる。上記の例でいえば、

- ・ 節点1と節点2を初めの容積要素(要素①)の入口/出口節点とし、入口節点データ(p₁,m₁)に要素伝達マトリックス[M₁]を乗じて出口節点データ(p₂,m₂)を計算する。更に、
- ・ 節点2と節点3を次の直管要素(要素②)の入口/出口節点とし、入口節点データ(p₂,m₂)に要素伝達マトリックス[M₂]を乗じて出口節点データ(p₃,m₃)を計算する。更に・・・

これを繰り返して、終端の節点まで計算すれば、全節点の(p,m)がクリアにできる。

しかし通常、始端のコンプレッサ出口(サーバ)の流量変動mは、各次の周波数に対して与えられているが、圧力変動は未知であるから、計算は未知数を含んで進められる。この場合、全ての要素の伝達マトリックス[M]は、定数として与えられる必要がある。定数であれば、伝達関数は線形となり未知数を含んだまま、終端節点まで1次式として伝達計算ができる(実際には1次式の係数を計算)。

しかし直管の伝達マトリックスなどには流体抵抗による減衰項が存在し変数mが含まれるので、もともと伝達マトリックスは定数ではない。ただ流量変動が過大にならない限り、近似的に変数mを排除することは可能である。本TSの脈動計算は、この[流量変動が過大でない]という前提に拠っている(詳しくは解説・補足を参照)。

ともあれ終端の(p,m)も当然ながら未知数を含んでいるが、終端の節点データ(p, m)のいずれかが既知であれば、ここまで持ち越されてきた未知数は一挙にクリアにできる。この例では、ガスホルダは容積が大きく、その入口から少しはといった領域で、圧力変動p=0とみなされるから、終端の圧力変動pの実数部と虚数部を零と置く事で未知数(x,y)が得られる。

始端/終端の節点データは管路モデルの境界条件に当る。境界条件がなければモデルとして成立しない。管路モデルの境界条件を下表に示す。

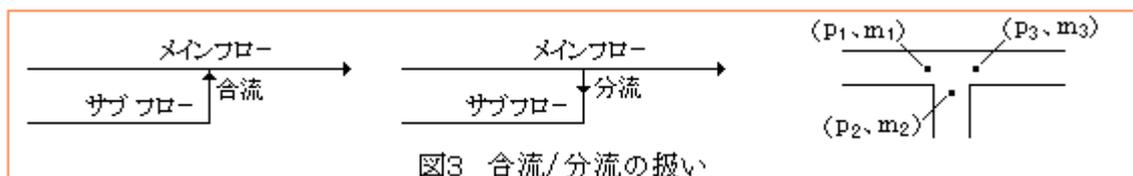
表2 管路モデル端の扱い

境界の種類		境界条件	
		圧力変動(p)	流量変動(m)
始端	レシプロマシン 入口または出口	$x+iy$ (x,y は未知数)	$m_R + im_I$ (各周波数成分に対し m_R, m_I が既知)
	流体振動箇所	$p_R + ip_I$ (通常、卓越周波数に対し p_R, p_I 設定)	$x+iy$ (x,y は未知数)
終端	開端 (大気/タンク等への流出)	0	(計算の結果による。未知数を含む)
	閉端 (管路の閉塞/行き止まり)	(計算の結果による。未知数を含む)	0

以上のように管路が単一な場合は、上流要素の出口節点データを、下流要素の入口節点データにしてシーケンシャルに計算していけばよい。然るに管路が合流/分流する場合は、流量変動もまたその影響を受ける。そこで図3のように合流/分流ポイントで互いに節点を分離し、次のような設定を行う。

$$p_1 = p_2 = p_3 \quad , \quad m_3 = m_1 + m_2$$

(分流では $m_3 = m_1 - m_2$ であるが、表1のように要素マトリクスが変わるので $m_3 = m_1 + m_2$ のまま。)

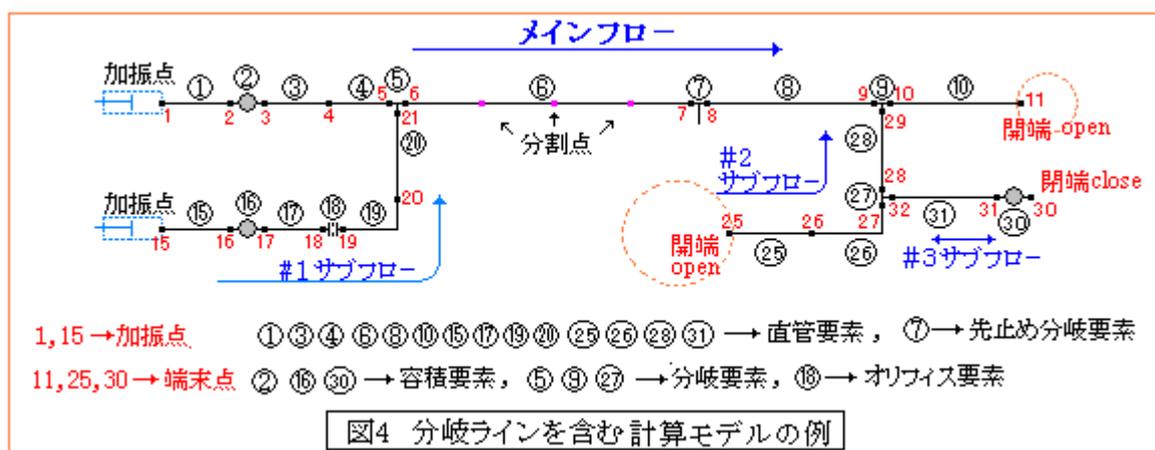


また、分岐(サブフロー)側の境界条件は、その始端(管路終端で分岐点ではない)で、表2と同じように設定される。特に、開端の場合は $p=0$ 、 $m=x'+iy'$ 、閉端の場合は $p=x'+iy'$ 、 $m=0$ になる。なお x', y' は未知数で、メインフロー側の未知数(x, y)を含んでいる。

- (3) 脈動計算は固有値計算にも適用できる。この場合は、始端に任意の流量変動をセットし、0.1Hz程度の刻みで加振周波数(即ち角振動数 ω)を変えて広い範囲で応答計算を繰り返し、指定節点における圧力変動ピークの推移をカウントし、最も高いピーク値から順に、当該周波数を以って1次,2次,3次,...の流体柱の固有振動数とする。なお、固有値計算では、減衰を考えないので、等価線形抵抗係数 R_p を零にしておくのがよい。

3. 脈動計算の手順

脈動計算の具体的な手順を以下に示す(併せて下図の例を参照のこと)。



ステップ 1) 加振点の圧力/流量変動のフーリエ級数分解。予め加振波形を設定し、これを展開して1次から計算打ち切り次数までの各周波数における圧力変動成分(実数部/虚数部)または流量変動成分(実数部/虚数部)を求めておく。詳しくは別途 TS[FE-18-RP-005]など参照のこと。

ステップ 2) 管路を図4の如く構成要素の列としてモデルをつくる。この場合、要素列をメインフローとサブフローに分ける。この場合、

メインフロー：主要な流れ部分で、管路端を始点とし、一方の管路端を終点とする。

サブフロー：メインフローに合流/分流する流れ部分で、複数以上設置できる。

サブラインに更にサブラインをとってもよい(但し1回限り)。管路端を始点とし分岐点を終点とする。

要素および要素番号のとり方としては、

- 要素は現状、直管要素、容積要素、先止め分岐要素、オリフィス要素、分岐要素。これ以外の要素は直接入力要素として扱う(直接、マトリックス係数を与える)。直管要素は曲管部分も含めたものであるが、内径が異なるときは分離して扱う。
- メインフローでは1からスタートし連続して要素番号をとる。サブフローでは、メインフローあるいは他のサブフローラインと少し間をおいて付け番を始めてもよいが、同じく始点から終点まで、連続して要素番号をとる。

節点および節点番号のとり方としては、

- メインフローでは必ず加振点(加振力入力点)を始端の節点とし、加振点ないし端末点を終端の節点とする。サブフローでは必ず管端の加振点ないし端末点を始端の節点とし、分岐点の分岐節点を最終の節点とする。
- 必ずある要素の入口節点番号とその要素の番号が一致するように、当該フローにつき連続して節点番号をとる(フローが異なる時は連続しない)。

なお、加振点は管路の中間にあってはいけない、必ず管端になければならない。また、端末点は、モデルの管端(大気放出口/タンク入口/弁閉止部など)を云うが必ず圧力変動/流量変動の何れかが既知でなければならない。

ステップ3) これ以降がプログラム計算になる(チャート1参照)。まずコントロールデータを入力する。コントロールデータは、節点数/要素数/加振点数/分岐点数/フロー定義などを云う。なお、チャート中の $\text{SBF}(k)=[\text{始点の節点番号(JSB)}, \text{終点の節点番号(JSE)}]$ は、SBF というデータボックス中のデータ所在を表現するもので、例えば#2 サブフローでは2行目の1列目にJSBを、2行目の2列目にJSEを収納している。チャート1ではデータ保存としてこの表示を使用している、念為。

ステップ4) 次いで加振点のデータを所定の端末節点に入力する(加振点は管路の中途に置かない)。加振点のデータはステップ1で得られたもので、1次～任意次数までの[周波数成分+圧力 or 流量変動成分]セットである。このデータセットは、次のように記述する。未知数 x, y はホールドになる。

$$\omega(i)\text{の時の } p(j)=(ax+by+c)+i(a'x+b'y+c') \rightarrow p(i, j)=[\omega, a, b, c, a', b', c']$$

$$\omega(i)\text{の時の } m(j)=(dx+ey+f)+i(d'x+e'y+f') \rightarrow m(i, j)=[\omega, d, e, f, d', e', f']$$

例えば、流量の変動成分 m が既知のときは係数 c, c' を m_R, m_I にして、他の係数は零にする。その場合、メインフローの終端以外では、他方の未知の変動成分 p は $x+iy$ にしておく必要があるので、 $p(j)=[\omega, 1, 0, 0, 0, 1, 0]$ にする。

ステップ5) 次いで端末点のデータを所定節点に入力する。端末点は開端、閉端のいずれかにセットし、 p or m の係数を全て零とする。なおメインフローの終端以外(サブフローの始端)では他方の未知の変動成分を $x'+iy'$ (x', y' は未知数) にしておく必要があるから、 $p(j)=[\omega, 1, 0, 0, 0, 1, 0]$ もしくは $m(j)=[\omega, 1, 0, 0, 0, 1, 0]$ にする。

ステップ6) 次いで要素データ(要素番号/要素タイプなど)を入力する。分岐要素については分岐するサブフローの番号のみ入力する。また直接入力要素についてはパスする。それ以外はマトリックス係数の計算に必要なパラメータを入力する。なお計算方向はこれによって正マトリックス、逆マトリックスに分かれるので必須。直管要素については長さを分割して細かい応答値を調べる必要があれば、その要素番号と分割数を登録しておく。

ステップ7) 次いで要素マトリックス各項の係数を表3によって計算する。直接入力要素については予め計算しておいたマトリックス各項の係数を入力する。なお以降ステップ9までは周波数成分毎に計算を反復する。

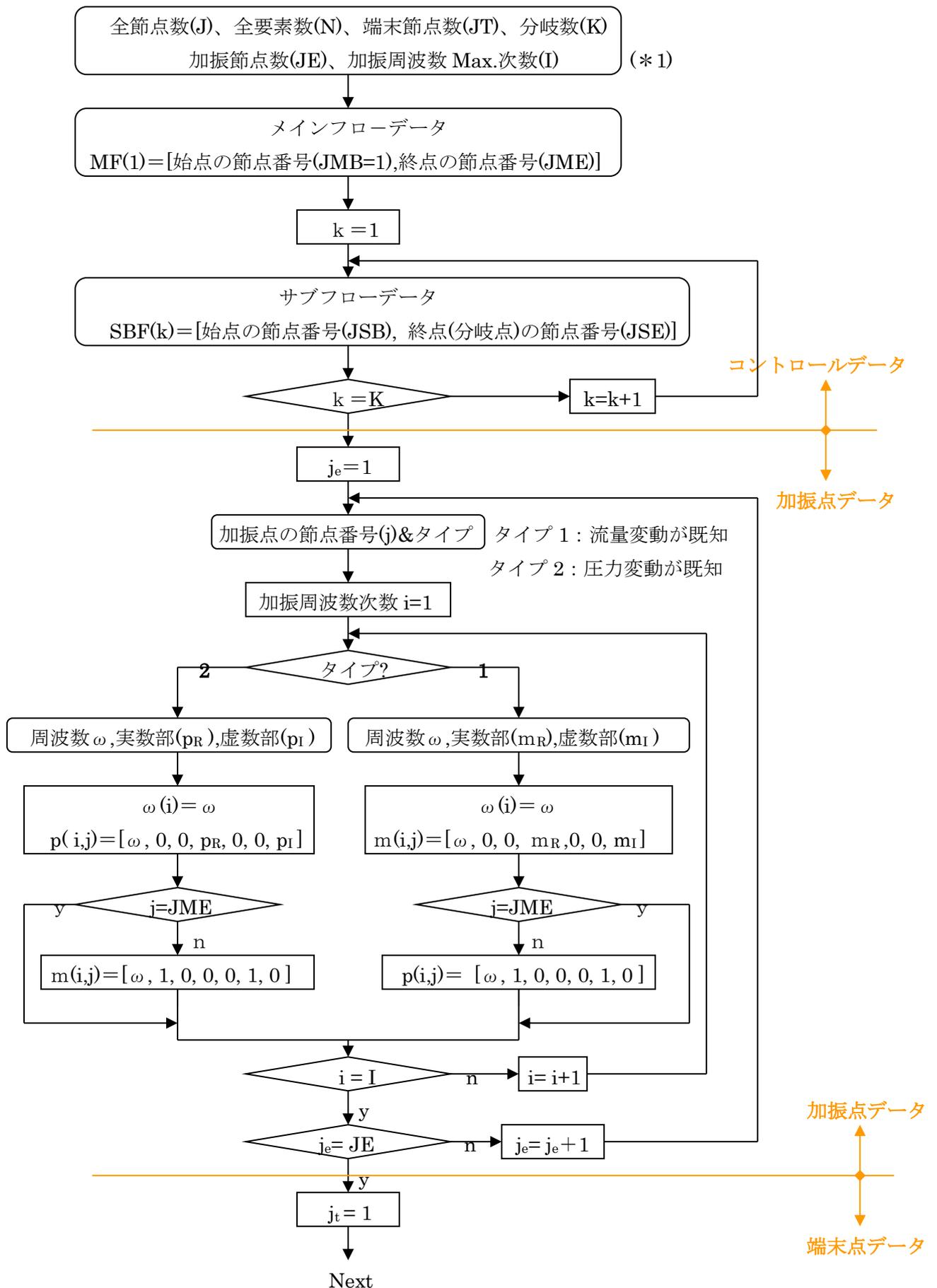
ステップ8) 次いで各節点の係数を逐次計算してゆく。まず与えられたメインフロー始端の節点データと要素データから次の節点の諸係数を表4によって計算し、更にこの計算結果と次の要素データを用いて、次の節点の諸係数を計算。この反復によって全ての節点係数をクリアする。

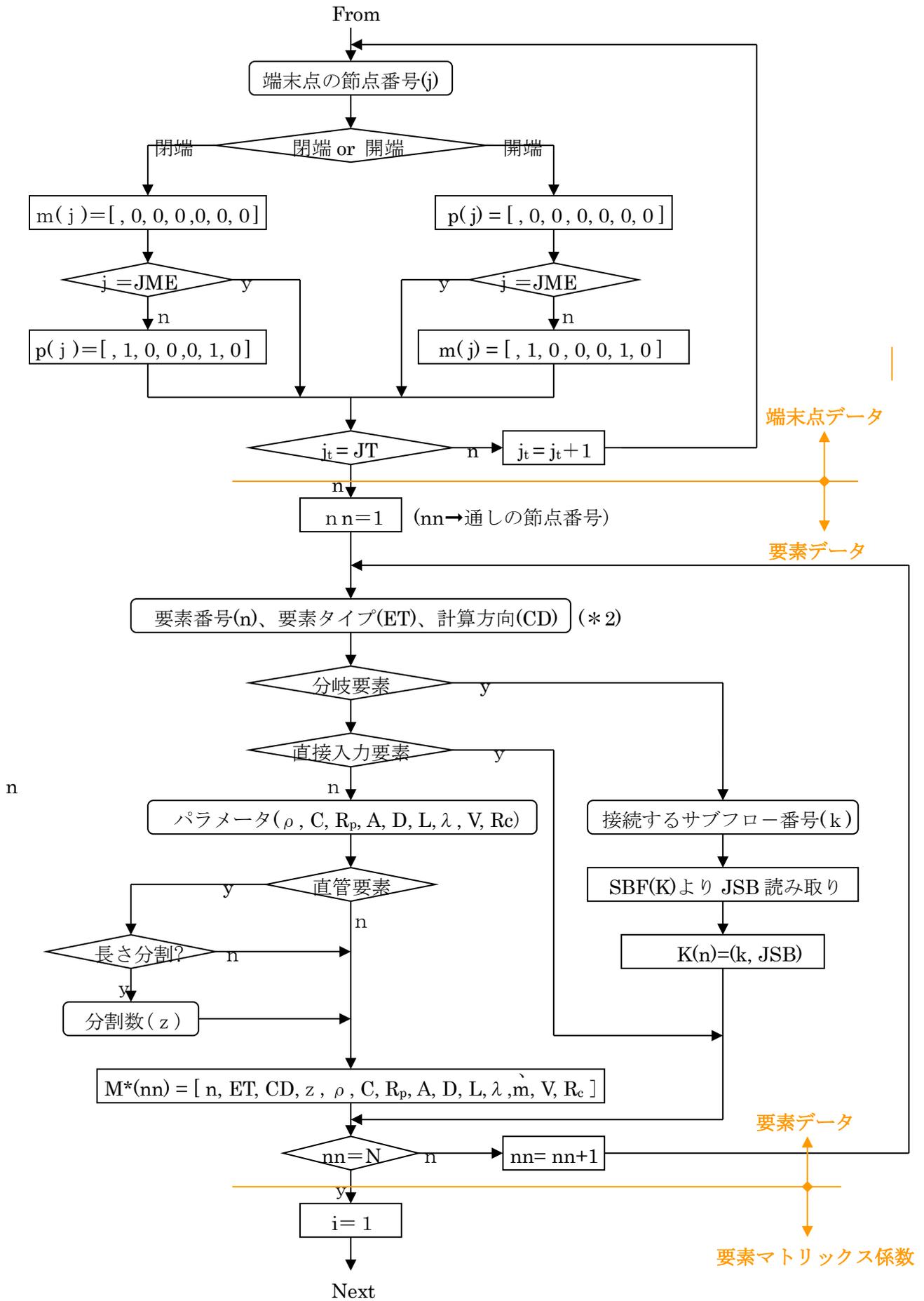
中途に分岐があるときは、これに接続するサブフローの管端を始点して同様の係数計算を繰り返して分岐側節点まで遡る。そして表5を用いて分岐要素の分岐側節点データと入口側節点データから出口側節点データを求めてメインフローに帰り計算を続行する。なお、サブフローの中途にも分岐要素があるときは、メインライン分岐の場合と全く同じやり方で、サブサブフローの計算を行いサブフローに戻る。いずれにしろ、サブフローの如何によらずメインフローの終端節点が、最終の到達点になる。

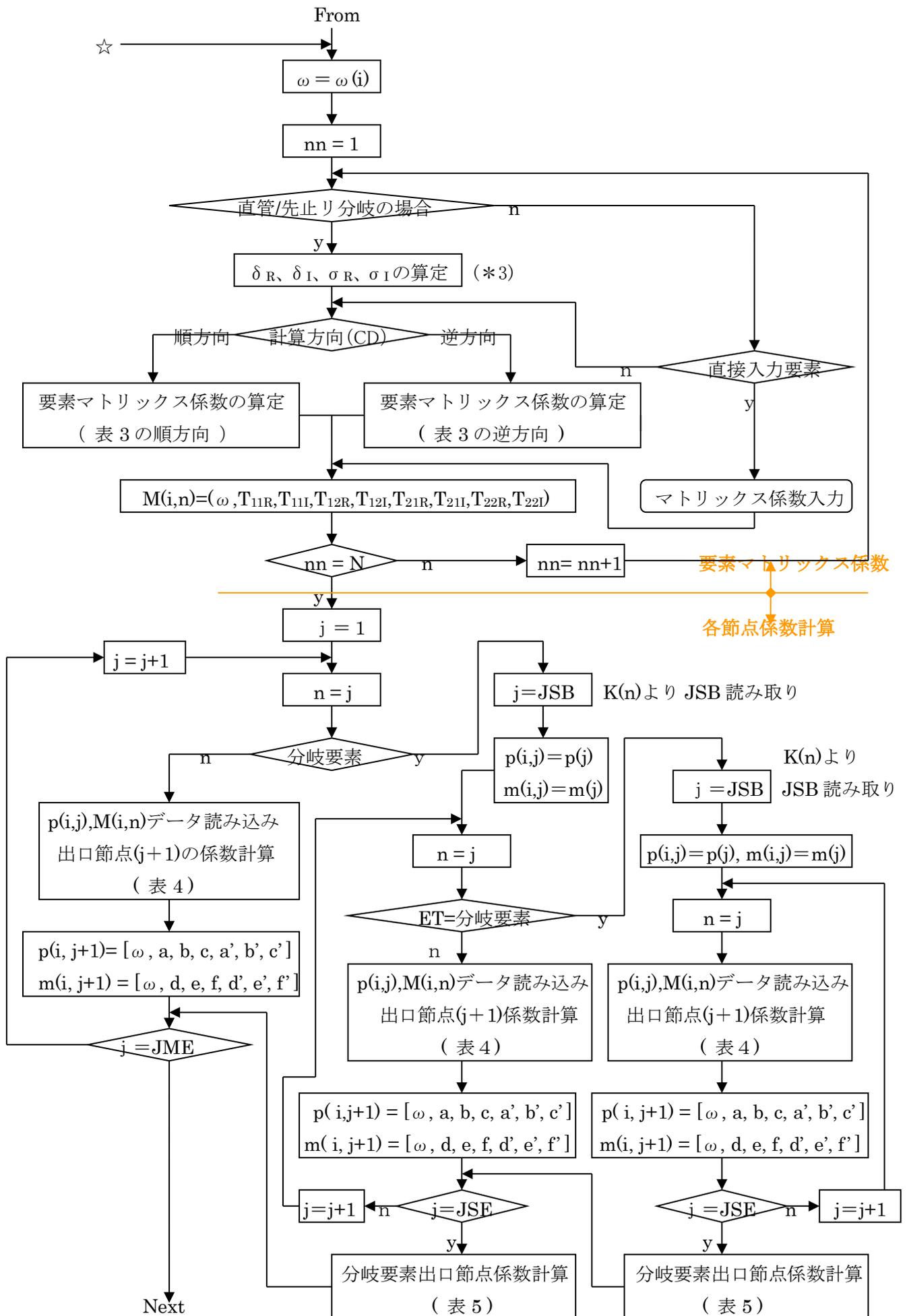
ステップ 9) 次いで各節点の応答量の計算を行う。メインフローの終端(端末節点)では p, m いずれかが既知であるから表 6 を用いて、メインフロー始端で設定された未知数 (x, y) を求める。そしてこの結果と前ステップで得られた諸係数を用いて逐次、各節点の応答量 (p_R, p_L, m_R, m_L) を計算してゆく。途中で分岐要素があれば、要素の入口側節点と分岐側節点の係数を用いて、サブフローの管端で定義された未知数 (x', y') を計算し、この (x', y') を用いてサブフローの節点応答量を求める。なお、サブフローに分岐要素があれば同様に未知数 (x'', y'') を計算する。いずれにしる、メインラインに帰り、終端節点までクリアする。また直管要素の分割点があれば同様に未知数 $(x, y), (x', y')$, または (x'', y'') を用いて、分割点の諸係数/応答量を計算する。

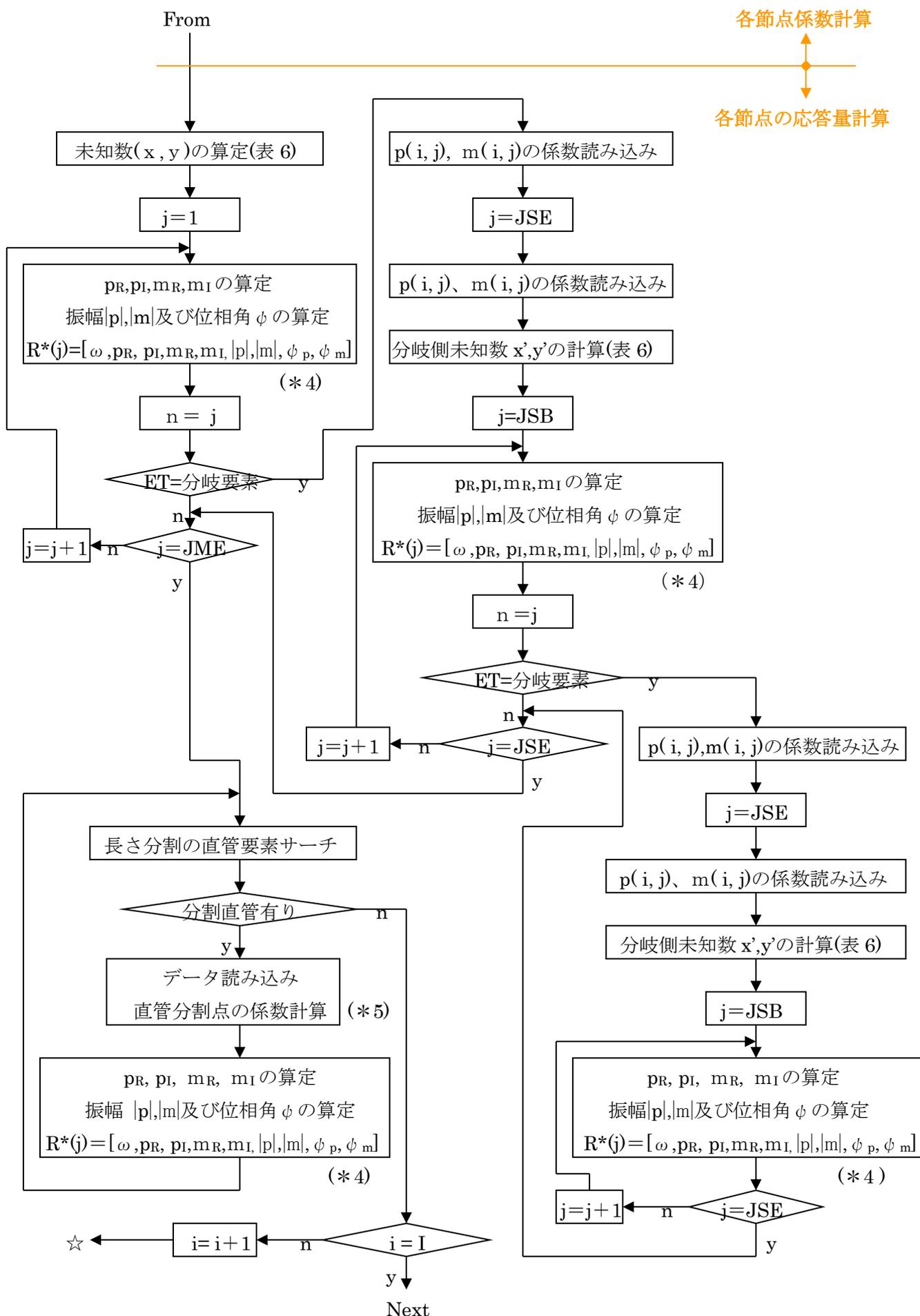
ステップ 10) ステップ 7~9 は最終の周波数次数まで反復される。こうして得られた全応答成分を合成して、応答波形を作る。

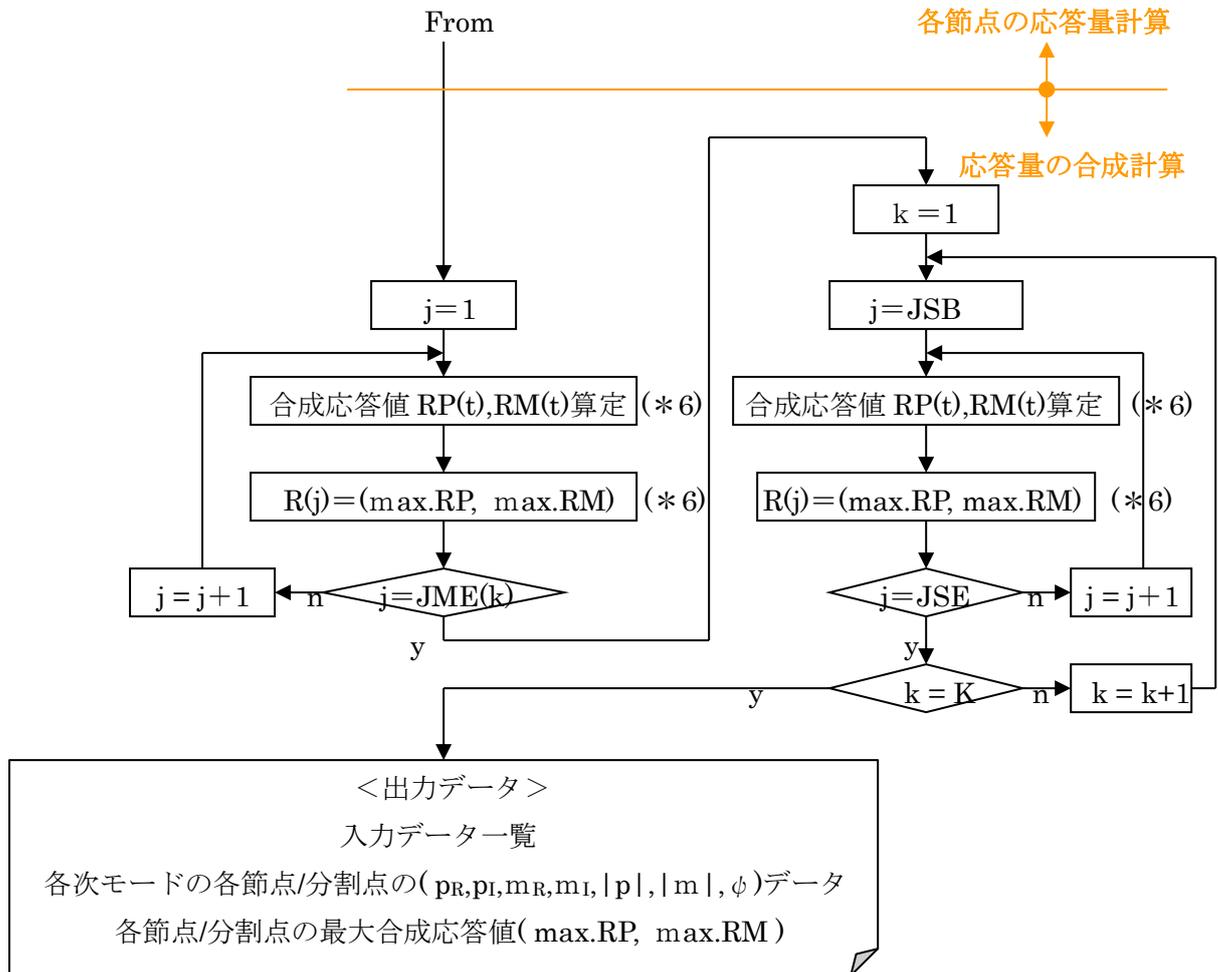
チャート 1. 脈動計算の概略フローチャート











【 チャート1の脚注 】

(*1) 場合によっては、15次を越える様な高次の共振が顕著になる可能性があるので、最大次数の設定は予備的な計算を行って設定するのがよい。

(*2) 要素タイプは 直管要素、容積要素、オリフィス要素、先止り分岐要素、分岐要素、直接入力要素など。計算方向は、定常の流れ方向に計算を進めてゆく場合、順方向とし、流れと逆方向に計算してゆく場合、逆方向とする。順方向で正マトリックス、逆方向で逆マトリックス。

(*3) 次の式で計算する。なお サフィックス R, I は実数, 虚数の意。

$$\delta_R = (1/2)^{0.5} \{1 + (R_p/\omega)^2\}^{0.5}, \quad \delta_I = (1/2)^{0.5} \{1 + (R_p/\omega)^2\}^{0.5} - 1$$

$$\sigma_R = (\omega/a)(1/2)^{0.5} \{1 + (R_p/\omega)^2\}^{0.5}, \quad \sigma_I = (\omega/a)(1/2)^{0.5} \{1 + (R_p/\omega)^2\}^{0.5} - 1$$

(*4) 変動量 p_R, p_I, m_R, m_I は次の式から求める。

$$p_R = ax + by + c, \quad p_I = a'x + b'y + c', \quad m_R = dx + ey + f, \quad m_I = d'x + e'y + f'$$

振幅 $|p|, |m|$ は次の式から求める。

$$|p| = (p_R^2 + p_I^2)^{0.5}, \quad |m| = (m_R^2 + m_I^2)^{0.5}$$

位相 ϕ は、次式から求める。

$$p \text{ について } \phi_p = \tan^{-1}(p_I/p_R), \quad m \text{ について } \phi_m = \tan^{-1}(m_I/m_R)$$

(*5) 分割点を節点とし管長さ L を (L/z) に置き換え、(*3)+(表3)+(表4)+(*4)の手順で各分割(節)点の $R^*(j)$ データを作成する。

(*6) 次のステップで処理する。

ステップ 1: 1 次周期 $T_1 = 2\pi / \omega(1)$ を求める。

ステップ 2: $-T_1/2 \leq t \leq T_1/2$ の範囲を、時間刻み Δt で細分割する。

ステップ 3: $t = -T_1/2$ から Δt 刻みで $t = T_1/2$ まで、各時間における合成応答量を次式で計算する。

$$RP(t) = \sum \{[(p_R^2 + p_I^2)^{0.5}]_n \cos(i\omega t + \phi_p)\} \quad (i=1 \sim I)$$

$$RM(t) = \sum \{[(m_R^2 + m_I^2)^{0.5}]_n \cos(i\omega t + \phi_m)\} \quad (i=1 \sim I)$$

この式で $\{(p_R^2 + p_I^2)^{0.5}\}_n$ は i 次の $\{p_R^2 + p_I^2\}$ を表現している。 m についても然り。

ステップ 4: $RP(t), RM(t)$ の最大ピーク値をピックアップし $\max. RP$ 、 $\max. RM$ とする。

【 チャート 1 の記号定義 】

p = 圧力変動量[0-P 即ち片振幅値](Pa) 、 $p(i,j)$ = 周波数 $\omega(i)$ の時の節点 j の圧力変動量(Pa)

m = 流量変動量[0-P 即ち片振幅値](kg/s)、 $m(i,j)$ = 周波数 $\omega(i)$ の時の節点 j の圧力変動量(kg/s)

$RP(t)$ = ある時刻の圧力の合成応答値(Pa)、 $RM(t)$ = ある時刻の流量の合成応答値(kg/s)

$\max. RP$ = 最大圧力応答量/1 次周期(Pa)、 $\max. MP$ = 最大流量応答量/1 次周期(kg/s)

$|p|$ = 圧力変動振幅(Pa) = $(p_R^2 + p_I^2)^{0.5}$ 、 $|m|$ = 流量変動振幅(kg/s) = $(m_R^2 + m_I^2)^{0.5}$

$\omega(i)$ = i 次の加振周波数(rad./s)、 $T_1 = 1$ 次周期(sec.) = $2\pi / \omega(1)$

ϕ_p = 圧力変動の位相(rad.)、 ϕ_m = 流量変動の位相(rad.)

i = 加振周波数の次数(1,2,3,...)、 j = 節点番号(整数)、 n = 要素番号(整数)、

nn = 要素通し番号(1,2,3,...) 、 k = サブフロー番号(1,2,3,...)

ρ = 流体密度(kg/m³)、 C = 圧力伝播速度[流体音速](m/s)、 A = 管流れ断面積(m²)

D = 管内径(m)、 L = 直管要素長さ(m)、 z = 分割数(-)、 V = 容積要素体積(m³)

R_p = 直管要素の等価線形抵抗係数(s^{-1}) = $\lambda / D \{ \dot{m} / (\rho A) \}$ 、 \dot{m} = 定常平均流量(kg/s)、

λ = Moody 線図による管摩擦損失係数(-)、 R_c = オリフィスの抵抗係数、

δ = 直管要素で用いる係数(-)、 σ = 直管要素で用いる係数(m⁻¹)

T = 要素のマトリックス係数(サフィックスは行列番号及び実数部/虚数部を示している)

a, b, c, a', b', c' = 圧力変動量(応答量)の諸係数、 d, e, f, d', e', f' = 流量変動量(応答量)の諸係数

サフィックス $R, I \rightarrow$ 実数部, 虚数部を意味する。

[なお、先止り分岐要素については分岐管の寸法(A_b, L_b), 係数(δ_b, σ_b)を A, L, δ, σ に当てがう。

その場合、分岐管の \dot{m} が零なので抵抗係数は $R_p = 0$ とする。]

表3 伝達マトリックスのブレイクダウン

	方向	マトリックス係数
直管要素	順方向	$T_{11R} = \cos(\sigma R L) \cosh(\sigma I L)$ 、 $T_{11I} = \sin(\sigma R L) \sinh(\sigma I L)$ $T_{12R} = -\{(C \delta R/A) \cos(\sigma R L) \sinh(\sigma I L) + (C \delta I/A) \sin(\sigma R L) \cosh(\sigma I L)\}$ $T_{12I} = -\{(C \delta R/A) \sin(\sigma R L) \cosh(\sigma I L) - (C \delta I/A) \cos(\sigma R L) \sinh(\sigma I L)\}$ $T_{21R} = -[A/\{C(\delta R^2 + \delta I^2)\}]\{\delta R \cos(\sigma R L) \sinh(\sigma I L) - \delta I \sin(\sigma R L) \cosh(\sigma I L)\}$ $T_{21I} = -[A/\{C(\delta R^2 + \delta I^2)\}]\{\delta R \sin(\sigma R L) \cosh(\sigma I L) + \delta I \cos(\sigma R L) \sinh(\sigma I L)\}$ $T_{22R} = \cos(\sigma R L) \cosh(\sigma I L)$ 、 $T_{22I} = \sin(\sigma R L) \sinh(\sigma I L)$
	逆方向	$T_{11R} = \cos(\sigma R L) \cosh(\sigma I L)$ 、 $T_{11I} = \sin(\sigma R L) \sinh(\sigma I L)$ $T_{12R} = \{(C \delta R/A) \cos(\sigma R L) \sinh(\sigma I L) + (C \delta I/A) \sin(\sigma R L) \cosh(\sigma I L)\}$ $T_{12I} = \{(C \delta R/A) \sin(\sigma R L) \cosh(\sigma I L) - (C \delta I/A) \cos(\sigma R L) \sinh(\sigma I L)\}$ $T_{21R} = [A/\{C(\delta R^2 + \delta I^2)\}]\{\delta R \cos(\sigma R L) \sinh(\sigma I L) - \delta I \sin(\sigma R L) \cosh(\sigma I L)\}$ $T_{21I} = [A/\{C(\delta R^2 + \delta I^2)\}]\{\delta R \sin(\sigma R L) \cosh(\sigma I L) + \delta I \cos(\sigma R L) \sinh(\sigma I L)\}$ $T_{22R} = \cos(\sigma R L) \cosh(\sigma I L)$ 、 $T_{22I} = \sin(\sigma R L) \sinh(\sigma I L)$
容積要素	順方向	$T_{11R} = 1$ 、 $T_{11I} = 0$ 、 $T_{12R} = T_{12I} = 0$ 、 $T_{21R} = 0$ 、 $T_{21I} = -\omega(V/C^2)$ 、 $T_{22R} = 1$ 、 $T_{22I} = 0$
	逆方向	$T_{11R} = 1$ 、 $T_{11I} = 0$ 、 $T_{12R} = T_{12I} = 0$ 、 $T_{21R} = 0$ 、 $T_{21I} = \omega(V/C^2)$ 、 $T_{22R} = 1$ 、 $T_{22I} = 0$
先止り 分岐管	順方向	$T_{11R} = 1$ 、 $T_{11I} = 0$ 、 $T_{12R} = 0$ 、 $T_{12I} = 0$ 、 $T_{22R} = 1$ 、 $T_{22I} = 0$ $T_{21R} = -[A_b/\{C(\delta R^2 + \delta I^2)\}][1/\{\cos(2\sigma R L_b) + \cosh(2\sigma I L_b)\}]\{\delta R \sinh(2\sigma I L_b) - \delta I \sin(2\sigma R L_b)\}$ $T_{21I} = -[A_b/\{C(\delta R^2 + \delta I^2)\}][1/\{\cos(2\sigma R L_b) + \cosh(2\sigma I L_b)\}]\{\delta R \sin(2\sigma R L_b) + \delta I \sinh(2\sigma I L_b)\}$
	逆方向	$T_{11R} = 1$ 、 $T_{11I} = 0$ 、 $T_{12R} = 0$ 、 $T_{12I} = 0$ 、 $T_{22R} = 1$ 、 $T_{22I} = 0$ $T_{21R} = [A_b/\{C(\delta R^2 + \delta I^2)\}][1/\{\cos(2\sigma R L_b) + \cosh(2\sigma I L_b)\}]\{\delta R \sinh(2\sigma I L_b) - \delta I \sin(2\sigma R L_b)\}$ $T_{21I} = [A_b/\{C(\delta R^2 + \delta I^2)\}][1/\{\cos(2\sigma R L_b) + \cosh(2\sigma I L_b)\}]\{\delta R \sin(2\sigma R L_b) + \delta I \sinh(2\sigma I L_b)\}$
オリフィ ス要素	順方向	$T_{11R} = 1$ 、 $T_{11I} = 0$ 、 $T_{12R} = -R_c$ 、 $T_{12I} = 0$ 、 $T_{21R} = 0$ 、 $T_{21I} = 0$ 、 $T_{22R} = 1$ 、 $T_{22I} = 0$
	逆方向	$T_{11R} = 1$ 、 $T_{11I} = 0$ 、 $T_{12R} = R_c$ 、 $T_{12I} = 0$ 、 $T_{21R} = 0$ 、 $T_{21I} = 0$ 、 $T_{22R} = 1$ 、 $T_{22I} = 0$
備考	<p>1. 全般に、記号はチャート1における記号定義に同じ。</p> <p>2. T_{11}、T_{12}、T_{21}、T_{22} は、下記で定義されるマトリックス係数を示す。 順方向: $p_2 = T_{11}p_1 + T_{12}m_1$、$m_2 = T_{21}p_1 + T_{22}m_1$ 逆方向: $p_1 = T_{11}p_2 + T_{12}m_2$、$m_1 = T_{21}p_2 + T_{22}m_2$</p> <p>2. 順方向は定常流れが入口節点(j)→出口節点(j+1)の場合、逆方向はその反対の場合を指す。<u>流れがない時は順流れで扱う。</u></p> <p>3. パラメータ σ、δ の定義は下記による。 $\delta_R = (1/2)^{0.5} \{1 + (R/\omega)^2\}^{0.5} + 1\}^{0.5}$、$\delta_I = (1/2)^{0.5} \{1 + (R/\omega)^2\}^{0.5} - 1\}^{0.5}$ $\sigma_R = (\omega/C)(1/2)^{0.5} \{1 + (R/\omega)^2\}^{0.5} + 1\}^{0.5}$、$\sigma_I = (\omega/C)(1/2)^{0.5} \{1 + (R/\omega)^2\}^{0.5} - 1\}^{0.5}$</p> <p>4. サフィックス R, I は実数部分, 虚数部分を表わす。</p>	

表4、要素出口側節点の応答量(変動量)の係数(式)

	諸係数の算定式	
	実数部	虚数部
圧力変動量 $p(i, j+1)$	$a_{j+1} = (a_j T_{11R} - a_j' T_{11I} + d_j T_{12R} - d_j' T_{12I})$ $b_{j+1} = (b_j T_{11R} - b_j' T_{11I} + e_j T_{12R} - e_j' T_{12I})$ $c_{j+1} = (c_j T_{11R} - c_j' T_{11I} + f_j T_{12R} - f_j' T_{12I})$	$a_{j+1}' = (a_j' T_{11R} + a_j T_{11I} + d_j' T_{12R} + d_j T_{12I})$ $b_{j+1}' = (b_j' T_{11R} + b_j T_{11I} + e_j' T_{12R} + e_j T_{12I})$ $c_{j+1}' = (c_j' T_{11R} + c_j T_{11I} + f_j' T_{12R} + f_j T_{12I})$
流量変動量 $m(i, j+1)$	$d_{j+1} = (a_j T_{21R} - a_j' T_{21I} + d_j T_{22R} - d_j' T_{22I})$ $e_{j+1} = (b_j T_{21R} - b_j' T_{21I} + e_j T_{22R} - e_j' T_{22I})$ $f_{j+1} = (c_j T_{21R} - c_j' T_{21I} + f_j T_{22R} - f_j' T_{22I})$	$d_{j+1}' = (a_j' T_{21R} + a_j T_{21I} + d_j' T_{22R} + d_j T_{22I})$ $e_{j+1}' = (b_j' T_{21R} + b_j T_{21I} + e_j' T_{22R} + e_j T_{22I})$ $f_{j+1}' = (c_j' T_{21R} + c_j T_{21I} + f_j' T_{22R} + f_j T_{22I})$
備考	定義式： $p(i, j) = (a_j x + b_j y + c_j) + (a_j' x + b_j' y + c_j')$ $p(i, j+1) = (a_{j+1} x + b_{j+1} y + c_{j+1}) + (a_{j+1}' x + b_{j+1}' y + c_{j+1}')$ $m(i, j) = (d_j x + e_j y + f_j) + (d_j' x + e_j' y + f_j')$ $m(i, j+1) = (d_{j+1} x + e_{j+1} y + f_{j+1}) + (d_{j+1}' x + e_{j+1}' y + f_{j+1}')$ 記号： p = 圧力変動(応答)量(Pa)、 m = 流量変動(応答)量(kg/s)、 i = 周波数次数 $a, b, c, a', b', c', d, e, f, d', e', f' = i$ 次における応答量の諸係数、 j = 節点番号 $T_{11R}, T_{11I}, T_{12R}, T_{12I}, T_{21R}, T_{21I}, T_{22R}, T_{22I} = i$ 次における要素マトリックス係数 サフィックス： $j, j+1 \rightarrow$ 当該要素の入口, 出口節点番号を指す $R \rightarrow$ 実数部を指す、 $I =$ 虚数部を指す	

表5 分岐要素出口節点の応答量(変動量)の係数(式)

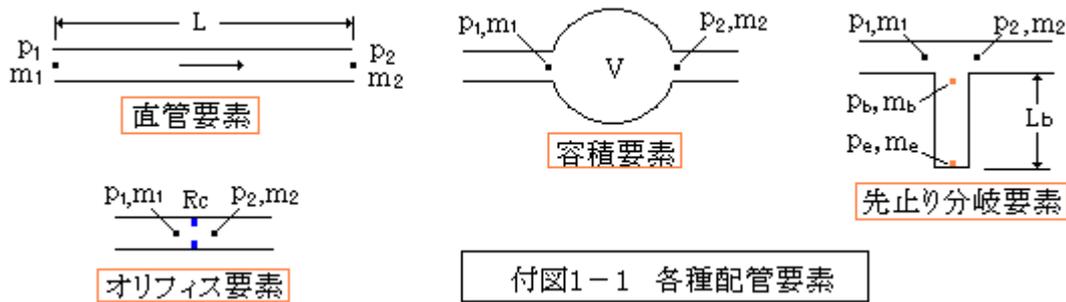
	諸係数の算定式
圧力変動量 $p(i, j+1)$	$a_{j+1} = a_j, b_{j+1} = b_j, c_{j+1} = c_j, a_{j+1}' = a_j', b_{j+1}' = b_j', c_{j+1}' = c_j'$
流量変動量 $m(i, j+1)$	$d_{j+1} = d_j + [r(l'a_j - la_j') / (l'k - lk') + s(k'a_j - ka_j') / (lk' - l'k)]$ $e_{j+1} = e_j + [r(l'b_j - lb_j') / (l'k - lk') + s(k'b_j - kb_j') / (lk' - l'k)]$ $f_{j+1} = f_j + [t + r\{(l'c_j - lc_j') - (l'm - lm')\} / (l'k - lk') + s\{(k'c_j - kc_j') - (k'm - km')\} / (lk' - l'k)]$ $d_{j+1}' = d_j' + [r(l'a_j - la_j') / (l'k - lk') + s(k'a_j - ka_j') / (lk' - l'k)]$ $e_{j+1}' = e_j' + [r(l'b_j - lb_j') / (l'k - lk') + s(k'b_j - kb_j') / (lk' - l'k)]$ $f_{j+1}' = f_j' + [t + r\{(l'c_j - lc_j') - (l'm - lm')\} / (l'k - lk') + s\{(k'c_j - kc_j') - (k'm - km')\} / (lk' - l'k)]$
備考	記号定義： $a, b, c, a', b', c', d, e, f, d', e', f' =$ 分岐要素の入口/出口節点の諸係数、 $k, l, m, k', l', m', r, s, t, r', s', t' =$ 分岐要素の分岐側節点の諸係数 サフィックス： $j, j+1 \rightarrow$ メインライン側の入口, 出口節点番号を指す なお、分岐側節点の諸係数は以下の定義式による。 $p(i, j) = (kx' + ly' + m) + (k'x' + l'y' + m')$ $m(i, j) = (rx' + sy' + t) + (r'x' + s'y' + t')$ (詳しくは解説・補足の3. を参照のこと。)

表 6 未知数の算定式

境界条件		算定式
メイン フロー	終端節点の圧力変動量(p_R, p_I)が 既知の場合	$x = \{b'(p_R - c) - b(p_I - c')\} / (ab' - a'b)$ $y = \{a'(p_R - c) - a(p_I - c')\} / (a'b - ab')$
	終端節点の流量変動量(m_R, m_I)が 既知の場合	$x = \{e'(m_R - f) - e(m_I - f')\} / (de' - d'e)$ $y = \{d'(m_R - f) - d(m_I - f')\} / (d'e - de')$
	終端節点のインピーダンス(z_R, z_I)が 既知の場合。	$x = \{(b - z_{Re} + z_{Ie}') (c' - z_{Rf}' - z_{If}) - (b' - z_{Re}' - z_{Ie})$ $(c - z_{Rf} + z_{If}')\} / \{(b' - z_{Re}' - z_{Ie}) (a - z_{Rd} + z_{Id}') -$ $(b - z_{Re} + z_{Ie}') (a' - z_{Rd}' - z_{Id})\}$ $y = \{(a - z_{Rd} + z_{Id}') (c' - z_{Rf}' - z_{If}) - (a' - z_{Rd}' - z_{Id})$ $(c - z_{Rf} + z_{If}')\} / \{(a' - z_{Rd}' - z_{Id}) (b - z_{Re} + z_{Ie}') -$ $(a - z_{Rd} + z_{Id}') (b' - z_{Re}' - z_{Ie})\}$
サブ フロー	終点節点分岐要素分岐側節点の 場合	$x' = \{(l'a - la') / (l'k - lk')\} x + \{(l'b - lb') / (l'k - lk')\} y$ $+ \{(l'c - lc') - (l'm - lm')\} / (l'k - lk')$ $y' = \{(k'a - ka') / (lk' - l'k)\} x + \{(k'b - kb') / (lk' - l'k)\} y$ $+ \{(k'c - kc') - (k'm - km')\} / (lk' - l'k)$
備考	<p>1. メインフローの場合、算定式の諸係数(a, b, c, \dots)は終端節点の値であって、係数計算の結果に拠る。またサブフローの場合、算定式の係数(a, b, c, a', b', c')は当該分岐要素の入口側節点の値、また係数(k, l, m, k', l', m')は分岐側節点の値で、いずれも係数計算の結果による。</p> <p>2. 係数の定義式は表 3、表 4 の通り。</p> <p>3. インピーダンスは下記定義。なおチャートではインピーダンス既知のケースは割愛。 $z = \text{圧力変動} / \text{流量変動} = p/m = z_R + iz_I$</p>	

[解説・補足]

1. 伝達マトリックスの作成方法にはバリエーション^{(1)~(2)}があるが、基本的には同じ。ここでは文献(3)の考えなどに沿って下図の要素の伝達マトリックス式を導入する。



(1) 直管要素について。一次元管路内の流体要素を考える。熱の出入りを無視できる場合に限ると、管路内の流れ状態は、次の3つの式

連続の式、運動量の式、状態の式

で表わすことができる⁽⁴⁾。まず連続の式は、流体要素内に流入する量と流出する量の差が流体要素の質量の増加に等しいとにおいて、

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho AU)}{\partial x} = 0$$

ここで ρ = 流体密度、 U = 流速、 A = 管路断面積、 t = 時間、 x = 管路長さ

次に、運動量の式は、流体要素内の運動量の時間変化から、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) + \left\{ \frac{\lambda}{2D} \right\} |U| U = 0$$

ここで P = 圧力、 D = 管径、

状態の式は気体と液体で異なる、気体の場合は、波動における圧力と密度の関係を断熱変化として、

$$\frac{dP}{(\kappa P)} = \frac{d\rho}{\rho} \quad \text{ここで } \kappa = \text{断熱比(比熱比)}、P = \text{平均圧力}$$

液体の場合は、 V なる体積の液体を圧縮して dV だけ体積を減じたときに生じる圧力上昇を dP とすれば $dP = K/(dV/V)$ となる。 $dV/V = dv/v = \rho/d\rho$ (v = 比容積) とすれば

$$\frac{dP}{K} = \frac{d\rho}{\rho} \quad \text{ここで } K = \text{体積弾性率}$$

これら2つの式から、 $K = \kappa P$ の関係があることがわかる。ここでは K の方を用いて記述する。

状態の式を連続式に取り込み、質量流量 $M = \rho AU$ を使うと、次の2つの連立式が得られる⁽²⁾。

$$\frac{\partial M}{\partial t} + A \frac{\partial P}{\partial x} + \left\{ \frac{1}{\rho A} \right\} \left\{ \frac{f}{2D} \right\} |M| M = 0$$

$$\left(\frac{A}{K} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) + \left(\frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right) = 0$$

1番目の式の第3項は流体抵抗を表わしているが、2次形(非線形)であるため、連立式の解が複雑になってしまう。そこで、この項を次のような1次形に置き換える。

$$\left\{ \frac{1}{\rho A} \right\} \left\{ \frac{f}{2D} \right\} M_s M = R_p M \quad (R_p = \text{等価線形抵抗係数、} M_s = \text{線形化流量})$$

$R_p M$ を用いると上記の連立式は、次のようになる。

$$\frac{\partial M}{\partial t} + A \frac{\partial P}{\partial x} + R_p M = 0$$

$$\left(\frac{A}{K} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) + \left(\frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right) = 0$$

波動のある状態では、変数 M 、 P は定常成分+変動成分である。そこで、

$$M = \dot{m} + m, P = \dot{p} + p \quad (\dot{m}, \dot{p} \text{ は定常成分})$$

とにおいて、上記の式に代入すると、定常成分の微分項は零であるところから、

$$\partial m / \partial t + A \partial p / \partial x + R_p m = 0 \quad \text{-----(1a)}$$

$$(A/K)(\partial p / \partial t) + (1/\rho)(\partial m / \partial x) = 0 \quad \text{-----(1b)}$$

ここで m = 質量流量の変動成分、 p = 圧力(静圧)の変動成分

(1a)(1b)は**波動の状態を表わす式**である。この場合 m, p はあくまで**変動成分**であることを認識すべき。

圧力の変動量 p 、質量流量の変動量 m のぶれを正弦波振動とみて、

$$p = p_0(x) \exp(i \omega t) \quad [= p_0(x) (\cos \omega t + i \sin \omega t)]$$

$$m = m_0(x) \exp(i \omega t) \quad [= m_0(x) (\cos \omega t + i \sin \omega t)]$$

[但し、 $p_0(x)$ = 圧力振幅(0-P)、 $m_0(x)$ = 流量振幅(0-P)、 ω = 角振動数、但し i = 虚数 = $(-1)^{0.5}$]

これらを、(1a)、(1b)式に代入して、

$$i \omega m_0 + A \partial p_0 / \partial x + R_p m_0 = 0 \quad \text{-----(1a')}$$

$$(A/K) i \omega p_0 + (1/\rho) (\partial m_0 / \partial x) = 0 \quad \text{-----(1b')}$$

(1b')より $p_0 = -\{K / (i \omega A \rho)\} (\partial m_0 / \partial x)$ であるから、これを(1a')式に代入して、

$$i \omega m_0 - (K/\rho) \{1 / (i \omega)\} (d^2 m_0 / dx^2) + R_p m_0 = 0$$

$(K/\rho)^{0.5} = C$ 即ち圧力伝播速度(音速)を用いると、次の常微分方程式が得られる。

$$d^2 m_0 / dx^2 + (\omega^2 / C^2) \{1 - i(R_p / \omega)\} m_0 = 0 \quad \text{-----(2)}$$

この場合、特性式 $D^2 + [(\omega^2 / C^2) \{1 - i(R_p / \omega)\}] m_0 = 0$ より $D = \pm i(\omega / C) \{1 - i(R_p / \omega)\}^{0.5} = \pm i \sigma$ であるから、この微分方程式の一般解は、

$$m_0 = C_1 e^{i \sigma x} + C_2 e^{-i \sigma x} \quad \text{-----(3a)}$$

$$\text{ここで } \sigma = (\omega / C) \{1 - i(R_p / \omega)\}^{0.5} = (\omega / C) \delta$$

m_0 を(1b')に代入して、

$$p_0 = -(C^2 / A) \{(\sigma / \omega) (C_1 e^{i \sigma x} - C_2 e^{-i \sigma x})\} = -(C \delta / A) (C_1 e^{i \sigma x} - C_2 e^{-i \sigma x}) \quad \text{-----(3b)}$$

$x = 0$ において $p_0 \rightarrow p_{01}$ 、 $m_0 \rightarrow m_{01}$ であるから、係数 C_1, C_2 は次のようになる。

$$C_1 = -\{A / (2C \delta)\} p_{01} + m_{01} / 2, C_2 = \{A / (2C \delta)\} p_{01} + m_{01} / 2$$

$x = L$ においては $p_0 \rightarrow p_{02}$ 、 $m_0 \rightarrow m_{02}$ である。この場合上記の C_1, C_2 を用いて

$$p_{02} = \{(e^{i \sigma L} + e^{-i \sigma L}) / 2\} p_{01} - (C \delta / A) \{(e^{i \sigma L} - e^{-i \sigma L}) / 2\} m_{01}$$

$$= \cosh(i \sigma L) p_{01} - (C \delta / A) \sinh(i \sigma L) m_{01}$$

$$m_{02} = -\{A / (C \delta)\} \{(e^{i \sigma L} - e^{-i \sigma L}) / 2\} p_{01} + \{(e^{i \sigma L} + e^{-i \sigma L}) / 2\} m_{01}$$

$$= -\{A / (C \delta)\} \sinh(i \sigma L) p_{01} + \cosh(i \sigma L) m_{01}$$

従って、直管要素の伝達マトリックス式は以下のようなになる。

$$\begin{Bmatrix} p_{02} \\ m_{02} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(i \sigma L) & , & -(C \delta / A) \sinh(i \sigma L) \\ -\{A / (C \delta)\} \sinh(i \sigma L) & , & \cosh(i \sigma L) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} p_{01} \\ m_{01} \end{Bmatrix} \quad \text{-----(4)}$$

さて、(4)式は、上流の $[p_{o1}, m_{o1}]$ から下流の $[p_{o2}, m_{o2}]$ への伝達マトリックス式であり、上流の既知の状態量から、下流の未知の状態量を求めるときに使用できる。しかし、下流にあるコンプレッサの吸い込み側の状態が既知で、上流にある吸込み管入口の状態量が不明のときもある。その場合は逆に、下流の $[p_{o2}, m_{o2}]$ から上流の $[p_{o1}, m_{o1}]$ への伝達マトリックス式、即ち逆マトリックス式が必要になる。逆マトリックス $[2 \times 2]$ は、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right) \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

であるから、

$$\begin{Bmatrix} p_{o1} \\ m_{o1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1\{(\cosh(i\sigma L))^2 - (\sinh(i\sigma L))^2\}} \begin{pmatrix} \cosh(i\sigma L) & , (C\delta/A)\sinh(i\sigma L) \\ \{A/(C\delta)\}\sinh(i\sigma L), & \cosh(i\sigma L) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} p_{o2} \\ m_{o2} \end{Bmatrix}$$

$1\{(\cosh(i\sigma L))^2 - (\sinh(i\sigma L))^2\} = 1\{\cos^2(\sigma L) + \sin^2(\sigma L)\} = 1$ であるから、

$$\begin{Bmatrix} p_{o1} \\ m_{o1} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(i\sigma L) & , (C\delta/A)\sinh(i\sigma L) \\ \{A/(C\delta)\}\sinh(i\sigma L), & \cosh(i\sigma L) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} p_{o2} \\ m_{o2} \end{Bmatrix} \quad \text{-----(5)}$$

ここで、(1a)式の第3項の流体抵抗係数 R_p について補足説明しておく(但し R_p は次式で定義される)。

$$R_p = \{1/(\rho A)\} \{\lambda/(2D)\} M_s$$

M_s は、定数扱いの等価線形流量であって、以下のようにして得られる⁽²⁾⁽⁵⁾。

ある管長の1周期あたりの振動エネルギーは、

$$\Delta E = \iint m V |V| dx dt = \iint m \{M|M|/(\rho A)^2\} dx dt = \{1/(\rho A)^2\} \iint m \{M|M| dx dt$$

ここで、 $M = \text{全流量} = \dot{m} + m$ (\dot{m} = 定常成分, m = 変動成分) である。 $|M|$ は変動成分を含んでいるが、積分区間で定数扱いが可能な $M_s (> 0)$ で置き換えれば、

$$\text{等価振動エネルギー} : \Delta E' = \iint m \{M|M_s|/(\rho A)^2\} dx dt = \{M_s/(\rho A)^2\} \iint m M dx dt$$

$\Delta E = \Delta E'$ とおいて、

$$M_s = \iint m \{M|M| dx dt / \iint m M dx dt$$

この式を解くと次のような結果が得られる(過程は煩雑になるので割愛)。

$$M_s = \Sigma k_i m_i^3 / \Sigma m_i^2 \quad (i=1 \sim n)$$

$$m_i < \dot{m} \text{ のとき} : k_i = 2\beta$$

$$m_i \geq \dot{m}, m_i \geq 0 \text{ のとき} : k_i = (4/\pi) \{ \beta \sin^{-1} \beta + (\beta^2 + 2)(1 - \beta^2)^{0.5/3} \}$$

ここで、 m_i = 管長さを n 分割し十分細分化して得られる流量変動量、 \dot{m} = 定常流量(一定)

$$\beta = \text{流量比} = \dot{m}/m_i$$

どの細分区間でも $m_i < \dot{m}$ 、即ち流量変動量が当該管長さにわたって定常流量を超えない領域では、

$$M_s = 2\beta \Sigma m_i^3 / \Sigma m_i^2 = 2\beta \dot{m} = 2\dot{m}$$

即ち定常流量の2倍が等価線形流量になる。従って、

$$R_p = \{1/(\rho A)\} \{f/(2D)\} \cdot 2\dot{m} = f/D \{\dot{m}/(\rho A)\} (=f/DU) \quad \text{ここで } U = \text{定常流速}$$

しかし $m_i > \dot{m}$ の場合に M_s を求めるのは、かなり厄介である。実際には、変動流量が定常流量を超えとなると脈動率は許容を越えてかなり高くなるから、通常設計では設計変更を要する。従って $M_s = 2$ 倍 x 定常流量として解析し、その解析結果をみて、変動流量が定常流量に漸近(例えば 80%)しないように管路形状を修正するようにすれば、特に過大振動($m_i > \dot{m}$)ケースを解析する必要はないと思われる。 従って、本 TS は $M_s = 2x$ 定常流量として解析されるものとする(安全側)。

(なお過大振動ケースの処理法あるいは計算と実際の乖離については別途の TS で議論する)

(2) 容積要素について。波動では容積部分は断熱タンクとして扱う。タンク入口～出口の流量差によってタンク内に圧力変動がでる。別途 TS [FE-02-TM-005] などから、

$$dp/dt = (\kappa RT/V)(m_i - m_o) = \{\kappa P/(\rho V)\}(m_i - m_o)$$

$p = p_o(x)\exp(i\omega t)$ 、 $m_i = m_{o1}(x)\exp(i\omega t)$ 、 $m_o = m_{o2}(x)\exp(i\omega t)$ を用いて、

$$i\omega p_o = \{\kappa P/(\rho V)\}(m_{o1} - m_{o2}) \rightarrow m_{o2} = -i\omega \{\rho V/(\kappa P)\} p_o + m_{o1}$$

$\kappa P \rightarrow K$ 、 $(K/\rho) \rightarrow C^2$ であるから、 $m_{o2} = -i\omega \{V/C^2\} p_{o1} + m_{o1}$

また、入口/出口の圧力変動は等しいから、 $p_{o2} = p_{o1}$ 、故に

$$\begin{Bmatrix} p_{o2} \\ m_{o2} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i\omega(V/C^2) & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} p_{o1} \\ m_{o1} \end{Bmatrix} \quad \text{----- (6)}$$

この逆マトリックスは、前述と同様にして

$$\begin{Bmatrix} p_{o1} \\ m_{o1} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\omega(V/C^2) & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} p_{o2} \\ m_{o2} \end{Bmatrix} \quad \text{----- (7)}$$

次に先止分岐管要素について。分岐部分には次の関係がある。

$$p_{o2} = p_{ob} = p_{o1}, \quad m_{o2} = m_{o1} + m_{ob}$$

分岐側は直管要素であるから、(4)式より

$$p_{ob} = \cosh(i\sigma_b L_b) p_{oe} - (C \delta_b / A_b) \sinh(i\sigma_b L_b) m_{oe}$$

$$m_{ob} = -\{A_b / (C \delta_b)\} \sinh(i\sigma_b L_b) p_{oe} + \cosh(i\sigma_b L_b) m_{oe}$$

端部は流れがないので $m_{oe} = 0$ であるから

$$p_{ob} = \cosh(i\sigma_b L_b) p_{oe}, \quad m_{ob} = -\{A_b / (C \delta_b)\} \sinh(i\sigma_b L_b) p_{oe}$$

$p_{ob} = p_{o1}$ であるから $p_{o1} = \cosh(i\sigma_b L_b) p_{oe} \rightarrow p_{oe} = p_{o1} / \cosh(i\sigma_b L_b)$ これを m_{ob} 式に代入して、

$$m_{ob} = -\{A_b / (C \delta_b)\} \sinh(i\sigma_b L_b) / \cosh(i\sigma_b L_b) p_{o1} = -\{A_b / (C \delta_b)\} \tanh(i\sigma_b L_b) p_{o1}$$

$$m_{o2} = m_{ob} + m_{o1} = -\{A_b / (C \delta_b)\} \tanh(i\sigma_b L_b) p_{o1} + m_{o1}$$

従って、

$$\begin{Bmatrix} p_{o2} \\ m_{o2} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & , & 0 \\ -\{A_b/(C \delta_b)\} \tanh(i \sigma_b L_b) & , & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} p_{o1} \\ m_{o1} \end{Bmatrix} \text{-----}(8)$$

逆マトリックスは、

$$\begin{Bmatrix} p_{o1} \\ m_{o1} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & , & 0 \\ \{A_b/(C \delta_b)\} \tanh(i \sigma_b L_b) & , & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} p_{o2} \\ m_{o2} \end{Bmatrix} \text{-----}(9)$$

オリフィス要素については、下記のようになる。

$$p_{o2} = -R_c m_{o1} \quad , \quad m_{o2} = m_{o1} \text{-----}(10)$$

ここで R_c は R_p と同じく等価線形抵抗係数である。これについては、別途 TS で議論する。

2. 上記(3)~(10)式の右辺の伝達マトリックスの各成分は、複素数の形になるので、このままでは数値計算ができないので、以下のように、予め複素数の形($X+iY$)にブレイクダウンしておく必要がある。

- ・直管要素について： (3)(4)式において、まず次の係数 σ および δ をブレイクダウンする。

$$\delta = \{1 - i(R/\omega)\}^{1/2} \quad , \quad \sigma = (\omega/C) \delta$$

数学便覧によれば、

$$(a - ib)^{1/2} = (1/2)^{1/2} \{ \{(a^2+b^2)^{1/2} + a\}^{1/2} - i \{(a^2+b^2)^{1/2} - a\}^{1/2} \} \quad (\text{但し } b > 0)$$

この場合、 $a=1$ 、 $b=(R/\omega)$ であるから、

$$\delta = \{1 - i(R/\omega)\}^{1/2} = (1/2)^{0.5} \{ [1 + (R/\omega)^2]^{0.5} + 1 \}^{0.5} - i(1/2)^{0.5} \{ [1 + (R/\omega)^2]^{0.5} - 1 \}^{0.5}$$

$$\sigma = (\omega/a)(1/2)^{0.5} \{ [1 + (R/\omega)^2]^{0.5} + 1 \}^{0.5} - i(\omega/a)(1/2)^{0.5} \{ [1 + (R/\omega)^2]^{0.5} - 1 \}^{0.5}$$

ここで $\delta = \delta_R - i \delta_I$ 、 $\sigma = \sigma_R - i \sigma_I$ とすれば、

$$\delta \text{ の実数部} : \delta_R = (1/2)^{0.5} \{ [1 + (R/\omega)^2]^{0.5} + 1 \}^{0.5}$$

$$\delta \text{ の虚数部} : \delta_I = (1/2)^{0.5} \{ [1 + (R/\omega)^2]^{0.5} - 1 \}^{0.5}$$

$$\sigma \text{ の実数部} : \sigma_R = (\omega/C)(1/2)^{0.5} \{ [1 + (R/\omega)^2]^{0.5} + 1 \}^{0.5}$$

$$\sigma \text{ の虚数部} : \sigma_I = (\omega/C)(1/2)^{0.5} \{ [1 + (R/\omega)^2]^{0.5} - 1 \}^{0.5}$$

(3)式のマトリックス成分を T_{11} 、 T_{12} 、 T_{21} 、 T_{22} (サフィックスは行番号 X 列番号)とすれば、

$$T_{11} = \cosh(i \sigma L) \quad , \quad T_{12} = -(C \delta / A) \sinh(i \sigma L) \quad , \quad T_{21} = -\{A/(C \delta)\} \sinh(i \sigma L) \quad , \quad T_{22} = \cosh(i \sigma L)$$

数学便覧によれば、

$$\sinh(ix) = i \sin x \quad , \quad \cosh(ix) = \cos(x)$$

$$\sin(x \pm iy) = \sin x \cdot \cosh y \pm i \cos x \cdot \sin y \quad , \quad \cos(x \pm iy) = \cos x \cdot \cosh y \mp i \sin x \cdot \sin y$$

であるから、 T_{11} は次のようになる。

$$T_{11} = \cosh(i \sigma L) = \cos(\sigma_R L - i \sigma_I L) = \cos(\sigma_R L) \cosh(\sigma_I L) + i \sin(\sigma_R L) \sinh(\sigma_I L)$$

次に T_{12} は、

$$T_{12} = -\{(a \delta_R / A) - i(a \delta_I / A)\} \cdot i \sin(\sigma_R L - i \sigma_I L)$$

$$\begin{aligned}
&= -\{(a \delta_{R/A}) - \mathbf{i}(a \delta_{I/A})\} \cdot \mathbf{i} \{\sin(\sigma_{RL}) \cdot \cosh(\sigma_{IL}) - \mathbf{i} \cos(\sigma_{RL}) \cdot \sinh(\sigma_{IL})\} \\
&= -\{(a \delta_{R/A}) - \mathbf{i}(a \delta_{I/A})\} \cdot \{\cos(\sigma_{RL}) \cdot \sinh(\sigma_{IL}) + \mathbf{i} \sin(\sigma_{RL}) \cdot \cosh(\sigma_{IL})\} \\
&= -\{(C \delta_{R/A}) \cos(\sigma_{RL}) \sinh(\sigma_{IL}) + (C \delta_{I/A}) \sin(\sigma_{RL}) \cosh(\sigma_{IL})\} \\
&\quad - \mathbf{i} \{(C \delta_{R/A}) \sin(\sigma_{RL}) \cosh(\sigma_{IL}) - (C \delta_{I/A}) \cos(\sigma_{RL}) \sinh(\sigma_{IL})\}
\end{aligned}$$

次に T_{21} では、 $\{A/(C \delta)\} = [A/\{C(\delta_{R^2} + \delta_{I^2})\}](\delta_R + \mathbf{i} \delta_I)$ とし、同じやり方で、

$$\begin{aligned}
T_{21} &= -[A/\{C(\delta_{R^2} + \delta_{I^2})\}]\{\delta_{RC} \cos(\sigma_{RL}) \sinh(\sigma_{IL}) - \delta_{IC} \sin(\sigma_{RL}) \cosh(\sigma_{IL})\} \\
&\quad - \mathbf{i} [A/\{C(\delta_{R^2} + \delta_{I^2})\}]\{\delta_{RS} \sin(\sigma_{RL}) \cosh(\sigma_{IL}) + \delta_{IS} \cos(\sigma_{RL}) \sinh(\sigma_{IL})\}
\end{aligned}$$

T_{22} は T_{11} と同じであるから、

$$T_{22} = \cosh(\mathbf{i} \sigma_L) = \cos(\sigma_{RL} - \mathbf{i} \sigma_{IL}) = \cos(\sigma_{RL}) \cosh(\sigma_{IL}) + \mathbf{i} \sin(\sigma_{RL}) \sinh(\sigma_{IL})$$

逆マトリックスの場合は、次のようになる (T_{12} と T_{21} の符号が変わるだけ)。

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \cos(\sigma_{RL}) \cosh(\sigma_{IL}) + \mathbf{i} \sin(\sigma_{RL}) \sinh(\sigma_{IL}) \\
T_{12} &= \{(C \delta_{R/A}) \cos(\sigma_{RL}) \sinh(\sigma_{IL}) + (C \delta_{I/A}) \sin(\sigma_{RL}) \cosh(\sigma_{IL})\} \\
&\quad + \mathbf{i} \{(C \delta_{R/A}) \sin(\sigma_{RL}) \cosh(\sigma_{IL}) - (C \delta_{I/A}) \cos(\sigma_{RL}) \sinh(\sigma_{IL})\} \\
T_{21} &= [A/\{C(\delta_{R^2} + \delta_{I^2})\}]\{\delta_{RC} \cos(\sigma_{RL}) \sinh(\sigma_{IL}) - \delta_{IC} \sin(\sigma_{RL}) \cosh(\sigma_{IL})\} \\
&\quad + \mathbf{i} [A/\{C(\delta_{R^2} + \delta_{I^2})\}]\{\delta_{RS} \sin(\sigma_{RL}) \cosh(\sigma_{IL}) + \delta_{IS} \cos(\sigma_{RL}) \sinh(\sigma_{IL})\} \\
T_{22} &= \cos(\sigma_{RL}) \cosh(\sigma_{IL}) + \mathbf{i} \sin(\sigma_{RL}) \sinh(\sigma_{IL})
\end{aligned}$$

- 容積要素の場合：マトリックス成分は、

$$T_{11} = 1, \quad T_{12} = 0, \quad T_{21} = -\mathbf{i} \omega (V/C^2), \quad T_{22} = 1$$

であるから、ブレークダウンは次のようになる。

$$T_{11} = T_{22} = (1) + \mathbf{i}(0), \quad T_{12} = (0) + \mathbf{i}(0), \quad T_{21} = (0) - \mathbf{i} \omega (V/a^2)$$

逆マトリックスの場合は、

$$T_{11} = T_{22} = (1) + \mathbf{i}(0), \quad T_{12} = (0) + \mathbf{i}(0), \quad T_{21} = (0) + \mathbf{i} \omega (V/a^2)$$

- 先止分岐管要素の場合：マトリックス成分は、

$$T_{11} = 1, \quad T_{12} = 0, \quad T_{21} = -\{A_b/(a \delta)\} \tanh(\mathbf{i} \sigma L_b), \quad T_{22} = 1$$

従って T_{11}, T_{12} については、次のようにブレークされる。

$$T_{11} = T_{22} = (1) + \mathbf{i}(0), \quad T_{12} = (0) + \mathbf{i}(0)$$

T_{21} については、各パラメータをブレークすると、

$$\begin{aligned}
\{A_b/(a \delta)\} &= [A_b/\{a(\delta_{R^2} + \delta_{I^2})\}](\delta_R + \mathbf{i} \delta_I) \\
\tanh(\mathbf{i} \sigma L_b) &= \mathbf{i} \tanh(\sigma L_b) = \mathbf{i} T \tanh(\sigma_{RL_b} - \mathbf{i} \sigma_{IL_b}) \\
&= \mathbf{i} \{\sin(2 \sigma_{RL_b}) - \mathbf{i} \sinh(2 \sigma_{IL_b})\} / \{\cos(2 \sigma_{RL_b}) + \cosh(2 \sigma_{IL_b})\}
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
T_{21} &= -[A_b/\{a(\delta_{R^2} + \delta_{I^2})\}](\delta_R + \mathbf{i} \delta_I) \cdot \mathbf{i} \{\sin(2 \sigma_{RL_b}) - \mathbf{i} \sinh(2 \sigma_{IL_b})\} / \{\cos(2 \sigma_{RL_b}) + \cosh(2 \sigma_{IL_b})\} \\
&= -[A_b/\{a(\delta_{R^2} + \delta_{I^2})\}][1/\{\cos(2 \sigma_{RL_b}) + \cosh(2 \sigma_{IL_b})\}]\{\delta_{RS} \sinh(2 \sigma_{IL_b}) - \delta_{IS} \sin(2 \sigma_{RL_b})\} \\
&\quad - \mathbf{i} [A_b/\{a(\delta_{R^2} + \delta_{I^2})\}][1/\{\cos(2 \sigma_{RL_b}) + \cosh(2 \sigma_{IL_b})\}]\{\delta_{RS} \sin(2 \sigma_{RL_b}) + \delta_{IS} \sinh(2 \sigma_{IL_b})\}
\end{aligned}$$

逆マトリックスの場合は、

$$T_{21} = [A_b / \{a(\delta_R^2 + \delta_I^2)\}] [1 / \{\cos(2\sigma_R L_b) + \cosh(2\sigma_I L_b)\}] \{ \delta_R \sinh(2\sigma_I L_b) - \delta_I \sin(2\sigma_R L_b) \} \\ + i [A_b / \{a(\delta_R^2 + \delta_I^2)\}] [1 / \{\cos(2\sigma_R L_b) + \cosh(2\sigma_I L_b)\}] \{ \delta_R \sin(2\sigma_R L_b) + \delta_I \sinh(2\sigma_I L_b) \}$$

3. 脈動計算は、波動が逐次、要素列を通過していくときの変化を計算するものである。その場合要素の両側にある節点間の伝達関係を、単なるマトリックス式からブレイクダウンしておく必要がある。そこで、要素の伝達式を、次のように表現する(サフィックス i は入口、e は出口の意)。

$$\begin{Bmatrix} p_e \\ m_e \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} p_i \\ m_i \end{Bmatrix} \quad \text{但し、} \\ p_i = (ax + by + c) + i(a'x + b'y + c') = P_{iR} + iP_{iI} \\ m_i = (dx + ey + f) + i(d'x + e'y + f') = M_{iR} + iM_{iI}$$

このときの $[p_e, m_e]$ は、次のようになる。

$$p_e = (T_{11R} + iT_{11I})(P_{iR} + iP_{iI}) + (T_{12R} + iT_{12I})(M_{iR} + iM_{iI}) \\ = \{(T_{11R}P_{iR} - T_{11I}P_{iI}) + (T_{12R}M_{iR} - T_{12I}M_{iI})\} + i\{(T_{11R}P_{iI} + T_{11I}P_{iR}) + (T_{12R}M_{iI} + T_{12I}M_{iR})\}$$

$$p_e \text{ の実数部: } (T_{11R}P_{iR} - T_{11I}P_{iI}) + (T_{12R}M_{iR} - T_{12I}M_{iI}) \\ = T_{11R}(ax + by + c) - T_{11I}(a'x + b'y + c') + T_{12R}(dx + ey + f) - T_{12I}(d'x + e'y + f') \\ = (aT_{11R} - a'T_{11I} + dT_{12R} - d'T_{12I})x + (bT_{11R} - b'T_{11I} + eT_{12R} - e'T_{12I})y \\ + (cT_{11R} - c'T_{11I} + fT_{12R} - f'T_{12I})$$

$$p_e \text{ の虚数部: } (T_{11R}P_{iI} + T_{11I}P_{iR}) + (T_{12R}M_{iI} + T_{12I}M_{iR}) \\ = T_{11R}(a'x + b'y + c') + T_{11I}(ax + by + c) + T_{12R}(d'x + e'y + f') + T_{12I}(dx + ey + f) \\ = (a'T_{11R} + aT_{11I} + d'T_{12R} + dT_{12I})x + (b'T_{11R} + bT_{11I} + e'T_{12R} + eT_{12I})y \\ + (c'T_{11R} + cT_{11I} + f'T_{12R} + fT_{12I})$$

$$m_e = (T_{21R} + iT_{21I})(P_{iR} + iP_{iI}) + (T_{22R} + iT_{22I})(M_{iR} + iM_{iI}) \\ = \{(T_{21R}P_{iR} - T_{21I}P_{iI}) + (T_{22R}M_{iR} - T_{22I}M_{iI})\} + i\{(T_{21R}P_{iI} + T_{21I}P_{iR}) + (T_{22R}M_{iI} + T_{22I}M_{iR})\}$$

$$m_e \text{ の実数部: } (T_{21R}P_{iR} - T_{21I}P_{iI}) + (T_{22R}M_{iR} - T_{22I}M_{iI}) \\ = (aT_{21R} - a'T_{21I} + dT_{22R} - d'T_{22I})x + (bT_{21R} - b'T_{21I} + eT_{22R} - e'T_{22I})y \\ + (cT_{21R} - c'T_{21I} + fT_{22R} - f'T_{22I})$$

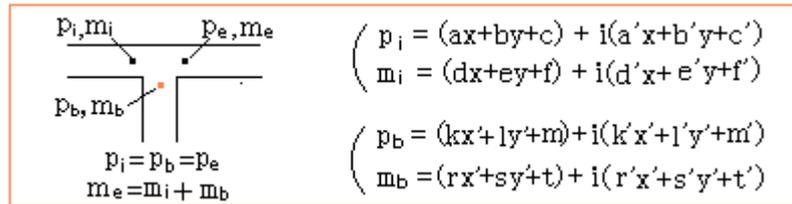
$$m_e \text{ の虚数部: } (T_{21R}P_{iI} + T_{21I}P_{iR}) + (T_{22R}M_{iI} + T_{22I}M_{iR}) \\ = (a'T_{21R} + aT_{21I} + d'T_{22R} + dT_{22I})x + (b'T_{21R} + bT_{21I} + e'T_{22R} + eT_{22I})y \\ + (c'T_{21R} + cT_{21I} + f'T_{22R} + fT_{22I})$$

以上より、伝達前の諸係数(a,b,c,…)は、伝達後に次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \text{ここで } a &= (aT_{11R} - a'T_{11I} + dT_{12R} - d'T_{12I}), & a' &= (a'T_{11R} + aT_{11I} + d'T_{12R} + dT_{12I}) \\ b &= (bT_{11R} - b'T_{11I} + eT_{12R} - e'T_{12I}), & b' &= (b'T_{11R} + bT_{11I} + e'T_{12R} + eT_{12I}) \\ c &= (cT_{11R} - c'T_{11I} + fT_{12R} - f'T_{12I}), & c' &= (c'T_{11R} + cT_{11I} + f'T_{12R} + fT_{12I}) \\ d &= (aT_{21R} - a'T_{21I} + dT_{22R} - d'T_{22I}), & d' &= (a'T_{21R} + aT_{21I} + d'T_{22R} + dT_{22I}) \\ e &= (bT_{21R} - b'T_{21I} + eT_{22R} - e'T_{22I}), & e' &= (b'T_{21R} + bT_{21I} + e'T_{22R} + eT_{22I}) \\ f &= (cT_{21R} - c'T_{21I} + fT_{22R} - f'T_{22I}), & f' &= (c'T_{21R} + cT_{21I} + f'T_{22R} + fT_{22I}) \end{aligned}$$

脈動計算では、データ入力節点を起点として逐次、各節点の諸係数(a,b,c,……)を計算して保存し、未知数[x, y]が得られた後、各節点の $p=(ax+by+c)+i(a'x+b'y+c')$ 、 $m=(dx+ey+f)+i(d'x+e'y+f')$ を計算して、全節点の圧力/流量変動量をクリアにする。

以上は節点がシーケンシャルに連なる場合である。流れに分岐/集合があると、そこで外乱がはいって上記のような単調な伝達関係はくずれる。以下、**分岐/集合部分の伝達関係をブレイクダウン**する。



圧力変動は等しく $p_i = p_b$ であるから

$$ax+by+c = kx'+ly'+m', \quad a'x+b'y+c' = k'x'+l'y'+m'$$

この連立式をとくと、

$$x' = \{(l'a - la')/(l'k - lk')\}x + \{(l'b - lb')/(l'k - lk')\}y + \{(l'c - lc') - (l'm - lm')\}/(l'k - lk')$$

$$y' = \{(k'a - ka')/(lk' - l'k)\}x + \{(k'b - kb')/(lk' - l'k)\}y + \{(k'c - kc') - (k'm - km')\}/(lk' - l'k)$$

従って、 m_b の実数部 m_{bR} 、虚数部 m_{bI} は、

$$\begin{aligned} m_{bR} = & \{r(l'a - la')/(l'k - lk') + s(k'a - ka')/(lk' - l'k)\}x \\ & + \{r(l'b - lb')/(l'k - lk') + s(k'b - kb')/(lk' - l'k)\}y \\ & + [t + r\{(l'c - lc') - (l'm - lm')\}/(l'k - lk') + s\{(k'c - kc') - (k'm - km')\}/(lk' - l'k)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{bI} = & \{r'(l'a - la')/(l'k - lk') + s'(k'a - ka')/(lk' - l'k)\}x \\ & + \{r'(l'b - lb')/(l'k - lk') + s'(k'b - kb')/(lk' - l'k)\}y \\ & + [t' + r'\{(l'c - lc') - (l'm - lm')\}/(l'k - lk') + s'\{(k'c - kc') - (k'm - km')\}/(lk' - l'k)] \end{aligned}$$

$m_e = m_i + m_b$ であるから、

$$\begin{aligned} m_{eR} = & \{d + r(l'a - la')/(l'k - lk') + s(k'a - ka')/(lk' - l'k)\}x \\ & + \{e + r(l'b - lb')/(l'k - lk') + s(k'b - kb')/(lk' - l'k)\}y \\ & + [f + t + r\{(l'c - lc') - (l'm - lm')\}/(l'k - lk') + s\{(k'c - kc') - (k'm - km')\}/(lk' - l'k)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{eI} = & \{d' + r'(l'a - la')/(l'k - lk') + s'(k'a - ka')/(lk' - l'k)\}x \\ & + \{e' + r'(l'b - lb')/(l'k - lk') + s'(k'b - kb')/(lk' - l'k)\}y \\ & + [f' + t' + r'\{(l'c - lc') - (l'm - lm')\}/(l'k - lk') + s'\{(k'c - kc') - (k'm - km')\}/(lk' - l'k)] \end{aligned}$$

以上より、伝達前の諸係数(a,b,c,……)は、伝達後に次のようになる。

$$a = a, \quad b = b, \quad c = c, \quad a' = a', \quad b' = b', \quad c' = c' \quad (\text{変わらず})$$

$$d = d + r(l'a - la')/(l'k - lk') + s(k'a - ka')/(lk' - l'k)$$

$$e = e + r(l'b - lb')/(l'k - lk') + s(k'b - kb')/(lk' - l'k)$$

$$f = f + t + r\{(l'c - lc') - (l'm - lm')\}/(l'k - lk') + s\{(k'c - kc') - (k'm - km')\}/(lk' - l'k)$$

$$d' = d' + r'(l'a - la')/(l'k - lk') + s'(k'a - ka')/(lk' - l'k)$$

$$e' = e' + r'(l'b - lb')/(l'k - lk') + s'(k'b - kb')/(lk' - l'k)$$

$$f' = f' + t' + r'\{(l'c - lc') - (l'm - lm')\}/(l'k - lk') + s'\{(k'c - kc') - (k'm - km')\}/(lk' - l'k)$$

4. 始端部分の処理について。伝達計算では、常に振動源(加振点)をモデルの始端において圧力/流量のいずれかの変動量を与え、それ以外を未知の変動量として指定する。例えば振動源がレシプロコンプレッサであれば、その吐出し流量(ないし吸込み流量)を始端の節点の変動流量として入力し、圧力変動を未知の変動量($x+iy$)として指定する。

ある周波数における圧力変動量(p_R, p_I)が与えられる場合。

$$\begin{aligned} p &= p_R + ip_I = (ax + by + c) + i(a'x + b'y + c') \rightarrow a = b = 0, c = p_R, a' = b' = 0, c' = p_I \\ m &= x + iy = (dx + ey + f) + i(d'x + e'y + f') \rightarrow d = 1, e = f = 0, e' = 1, d' = f' = 0 \end{aligned}$$

ある周波数における流量変動量(m_R, m_I)が与えられる場合。

$$\begin{aligned} p &= x + iy = (ax + by + c) + i(a'x + b'y + c') \rightarrow a = 1, b = c = 0, b' = 1, a' = c' = 0 \\ m &= m_R + im_I = (dx + ey + f) + i(d'x + e'y + f') \rightarrow d = e = 0, f = m_R, d' = e' = 0, f' = m_I \end{aligned}$$

ある周波数におけるインピーダンス($z = p/m = z_R + iz_I$)が与えられる場合。

$$\begin{aligned} p &= (z_R + iz_I)(x + iy) = (z_RX - z_Iy) + i(z_Ix + z_Ry) = (ax + by + c) + i(a'x + b'y + c') \\ &\rightarrow a = z_R, b = -z_I, c = 0, a' = z_I, b' = z_R, c' = 0 \\ m &= x + iy = (dx + ey + f) + i(d'x + e'y + f') \rightarrow d = 1, e = f = 0, e' = 1, d' = f' = 0 \end{aligned}$$

以上はメインフローの場合である。サブフローの場合でも始端部(常に分岐ラインの管端)に振動源をおく時は上記と全く同じである。しかし端末点で開端/閉端になるときは以下ようになる。

開端部であるときは、周波数によらず、

$$\begin{aligned} p &= (0) + i(0) \rightarrow a = b = c = a' = b' = c' = 0 \\ m &= x + iy = (dx + ey + f) + i(d'x + e'y + f') \rightarrow d = 1, e = f = 0, e' = 1, d' = f' = 0 \end{aligned}$$

閉端部であるときも、周波数に拠らず、

$$\begin{aligned} p &= x + iy = (ax + by + c) + i(a'x + b'y + c') \rightarrow a = 1, b = c = 0, b' = 1, a' = c' = 0 \\ m &= (0) + i(0) \rightarrow a = b = c = a' = b' = c' = 0 \end{aligned}$$

5. 終端部分の処理について。始端節点から計算方向に沿って逐次、前3.で示した伝達計算を繰り返して各節点の状態量を求めてゆく。そしてその結果として得られた終端の状態、即ち圧力変動量ないし流量変動量を境界条件と比べて(等しくおいて)、始端において設定された未知数 $[x, y]$ を求める。

- 終端節点の圧力変動量がわかっている場合:

$$p = p_R + ip_I = (ax + by + c) + i(a'x + b'y + c') \rightarrow p_R = (ax + by + c), p_I = (a'x + b'y + c')$$

この連立式をとり、

$$\begin{aligned} x &= \{b'(p_R - c) - b(p_I - c')\} / (ab' - a'b) \\ y &= \{a'(p_R - c) - a(p_I - c')\} / (a'b - ab') \end{aligned}$$

- 終端節点の流量変動量がわかっている場合:

$$m = m_R + im_I = (dx + ey + f) + i(d'x + e'y + f') \rightarrow m_R = (dx + ey + f), p_I = (d'x + e'y + f')$$

この連立式をとり、

$$x = \{e'(m_R - f) - e(m_I - f')\} / (d'e' - d'e)$$

$$y = \{d'(m_R - f) - d(m_I - f')\} / (d'e - d'e')$$

- 終端節点のインピーダンス(=p/m)がわかっている場合:

$$z = \{(ax + by + c) + i(a'x + b'y + c')\} / \{(dx + ey + f) + i(d'x + e'y + f')\} = z_R + iz_I$$

この連立式を操作して、

$$(a - z_R d + z_I d')x + (b - z_R e + z_I e')y = -(c - z_R f + z_I f')$$

$$(a' - z_R d' + z_I d)x + (b' - z_R e' + z_I e)y = -(c' - z_R f' + z_I f)$$

これらの式をとり、

$$x = \{(b - z_R e + z_I e')(c' - z_R f' + z_I f) - (b' - z_R e' + z_I e)(c - z_R f + z_I f')\} / \{(b' - z_R e' + z_I e)(a - z_R d + z_I d') - (b - z_R e + z_I e')(a' - z_R d' + z_I d)\}$$

$$y = \{(a - z_R d + z_I d')(c' - z_R f' + z_I f) - (a' - z_R d' + z_I d)(c - z_R f + z_I f')\} / \{(a' - z_R d' + z_I d)(b - z_R e + z_I e') - (a - z_R d + z_I d')(b' - z_R e' + z_I e)\}$$

未知数(x, y)が得られると、これを用いて全節点の変動量(p, m)を計算する。

以上はメインフローの場合である。サブフローの時は、終端節点は分岐要素の分岐側節点に重なる。この場合は前述のように、圧力変動量pがメインフローの分岐要素入口節点の圧力変動量が等しくなるので、

$$x' = \{(l'a - la') / (l'k - lk')\}x + \{(l'b - lb') / (l'k - lk')\}y + \{(l'c - lc') - (l'm - lm')\} / (l'k - lk')$$

$$y' = \{(k'a - ka') / (lk' - l'k)\}x + \{(k'b - kb') / (lk' - l'k)\}y + \{(k'c - kc') - (k'm - km')\} / (lk' - l'k)$$

未知数(x', y')が得られると、これを用いてサブフローの全節点の変動量(p, m)を計算する。

6. 終わりに脈動計算結果の処理について、述べておく。全節点の任意時刻の応答量は次のように表わせる。

$$p_n(t) = (p_R + ip_I) \exp(in \omega t)$$

$$= (p_R^2 + p_I^2)^{0.5} \{p_R / (p_R^2 + p_I^2)^{0.5} + ip_I / (p_R^2 + p_I^2)^{0.5}\} \{\cos(n \omega t) + i \sin(n \omega t)\}$$

$$= (p_R^2 + p_I^2)^{0.5} (\cos \phi_p + i \sin \phi_p) \{\cos(n \omega t) + i \sin(n \omega t)\}$$

$$= (p_R^2 + p_I^2)^{0.5} \{\cos(n \omega t + \phi_p) + i \sin(n \omega t + \phi_p)\} = (p_R^2 + p_I^2)^{0.5} \exp\{i(n \omega t + \phi_p)\}$$

同様に、

$$m_n(t) = (m_R^2 + m_I^2)^{0.5} \{\cos(n \omega t + \phi_m) + i \sin(n \omega t + \phi_m)\} = (m_R^2 + m_I^2)^{0.5} \exp\{i(n \omega t + \phi_m)\}$$

ここで n=加振周波数次数 (n=1,2,3,4,...)、 ω =基本周波数(rad/s)

$$\phi_p, \phi_m = \text{位相角} = \tan^{-1}(p_I/p_R), \tan^{-1}(m_I/m_R)$$

n=1~N について上式の実数項を合計すれば、任意時刻 t における合成応答量が得られる。

$$RP(t) = \sum \{[(p_R^2 + p_I^2)^{0.5}]_n \cos(n \omega t + \phi_p)\} \quad (n=1 \sim N)$$

$$RM(t) = \sum \{[(m_R^2 + m_I^2)^{0.5}]_n \cos(n \omega t + \phi_m)\} \quad (n=1 \sim N)$$

ここで、例えば $\{[(p_R^2 + p_I^2)^{0.5}]_n$ は n 次の $\{p_R^2 + p_I^2\}^{0.5}$ を表現している。これは平均値廻りの変動量であって実際に現れる圧力/流量は、上記の P(t)、M(t) に平均値 P_0 を足したものになる。

引用文献・テキスト:

- (1) JSME 編 「事例に学ぶ流体関連振動」(第2版) 5.1 圧縮機に起因する配管内圧力脈動
- (2) 「配管系に発生する脈動現象の解析手法と脈動防止方法」松田
(JSME 関西支部第 168 回講習会教材(1989. 9))
- (3) 「圧縮機配管系の脈動圧の計算法」阿部,藤川,伊藤 JSME 論文集 35 巻第 277 号(S44-9)
- (4) 「管内流れによる配管系の振動とその防止法」藤田 (JSME 関西支部第 168 回講習会教材(1989. 9))
- (5) 「管路内圧力脈動の共振振幅(第 2 報共振振幅に及ぼす定常流成分の影響)」葉山,竹田,毛利
(JSME 論文集45巻 392 号(S54. 4))
- (6) V.L.Streeter, and E.B Wylie “Hydraulic Transients “(1967)
→訳本「流体過渡現象」竹中(日本工業新聞)