【整番】FE-18-TM-001	【標題】脈動波形をフーリエ展開する方法	
分類：流れ(脈動流)／種別：推奨指針	作成年月：H18.7／改訂：Ver0.0 (H18.8)	作成者：N.Miyamoto

全８枚

1. 脈動の周波数応答解析では、加振源における１周期分の脈動波形を各次数毎に調和波(sin 波/cos 波)の形で入力する。然るに、脈動波形は通常、流量の時間変化の形で与えられるので、これを各次の調和波成分にフーリエ展開(フーリエ級数化)する必要がある。典型的な波形については、その解がテキスト類に与えられているが、変則で複雑な波形についてはその都度、波形を展開する必要がある。そこで以下に任意の脈動波形を数値的にフーリエ展開する方法およびその事例を紹介する。

2. 数学のテキスト[(1)]によれば、任意の波形 X(t)は次式で表される[(1)]。

$$X(t) \fallingdotseq a_o/2+\Sigma(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$$
$$=a_o/2+\Sigma[(a_n^2+b_n^2)^{0.5}\sin(n\omega t+\phi_n)] \quad \text{-------------------------------------}(1)$$
$$=a_o/2+\Sigma[(a_n^2+b_n^2)^{0.5}\cos(n\omega t+\phi_n')]$$
$$a_o=(2/T)\textstyle\int_T X(t)\,dt、$$
$$a_n=(2/T)\textstyle\int_T X(t)\cos n\omega t\,dt、$$
$$b_n=(2/T)\textstyle\int_T X(t)\sin n\omega t\,dt$$

ここで、X(t)＝波形、通常ある時刻の流量(例えば m^3/s)、場合によってある時刻の圧力(例えば kPa)

n＝次数(1、2、3、4.... k)、ω＝基本角振動数（rad./sec)＝2π/T

ϕ_n＝sin 表示のときの位相（rad.)＝$\tan^{-1}(a_n/b_n)$、

ϕ_n'＝cos 表示のときの位相（rad.)＝(φ－π/2)、

t＝時間(－T／2～T/2 の間)、T＝周期（sec）、k＝打切り次数（正の整数)、

$\int_T$ → －T/2～T/2 (sec.) 間で積分、Σ→ 1～k 次までの総和

サフィックス"n" → n 次の意味

打ち切り次数 k は通常 10～20 次以下(?)。実際は打ち切り次数 k を仮定しておいて展開した結果から(1)式の X(t)を計算してオリジナル波形と重ね合わせ、そのズレの程度をみて k 値を決定するのがよい。

3. 打切り次数の設定も含めた脈動波形のフーリエ展開は、次のステップによる。

ステップ 1) まず打切り次数 k を仮定する。

ステップ 2) 次に次数 n を仮定する。

ステップ 3) 周期(－T/2～T/2)を J 分割し各分割の中間における各時間 t での X(t)値を読み取り 1～J までの ΣX(t)、Σ{X(t) cos nωt}、Σ{X(t) sin nωt}を求める。

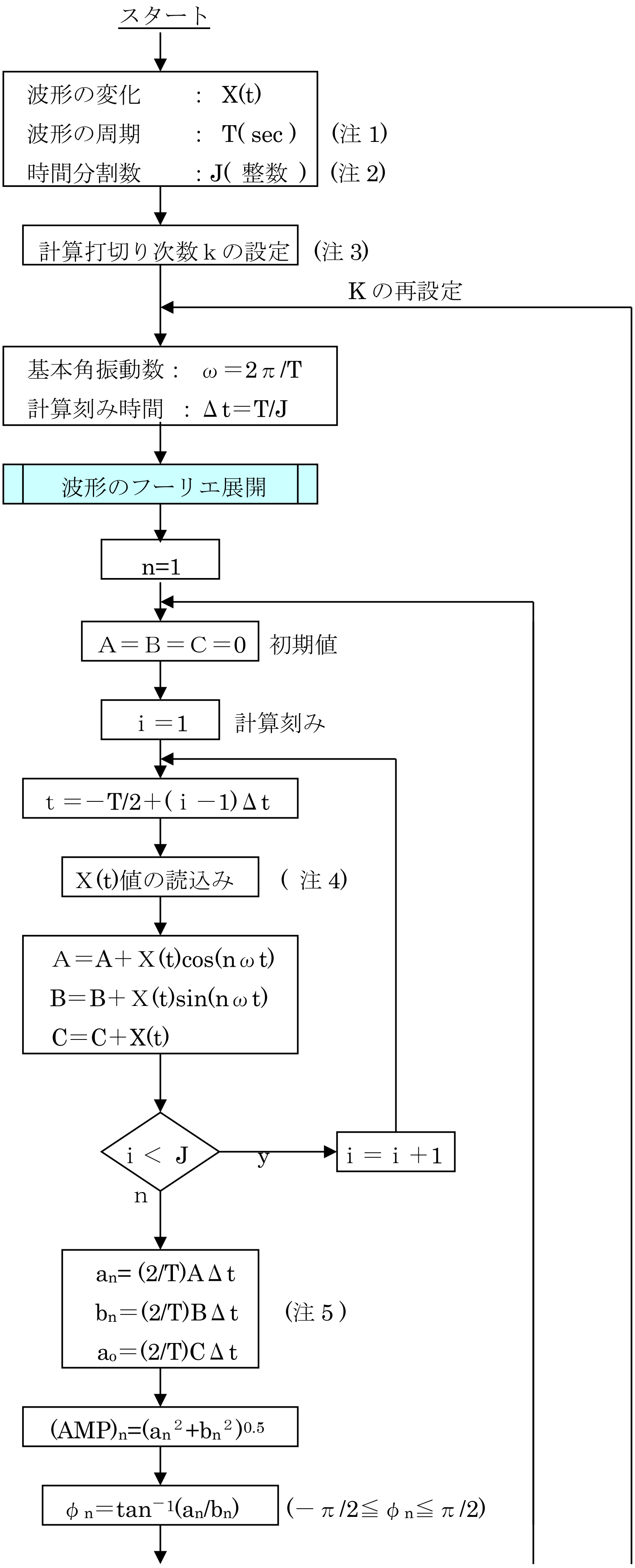
ステップ 4) これらにΔt(＝T/J)を乗じて係数(a_n、b_n、a_o)、振幅$(a_n+b_n)^{0.5}$及びϕ_nを計算し各次数におけるフーリエ級数$[(a_n^2+b_n^2)^{0.5}\sin(n\omega t+\phi_n)]$を求める。

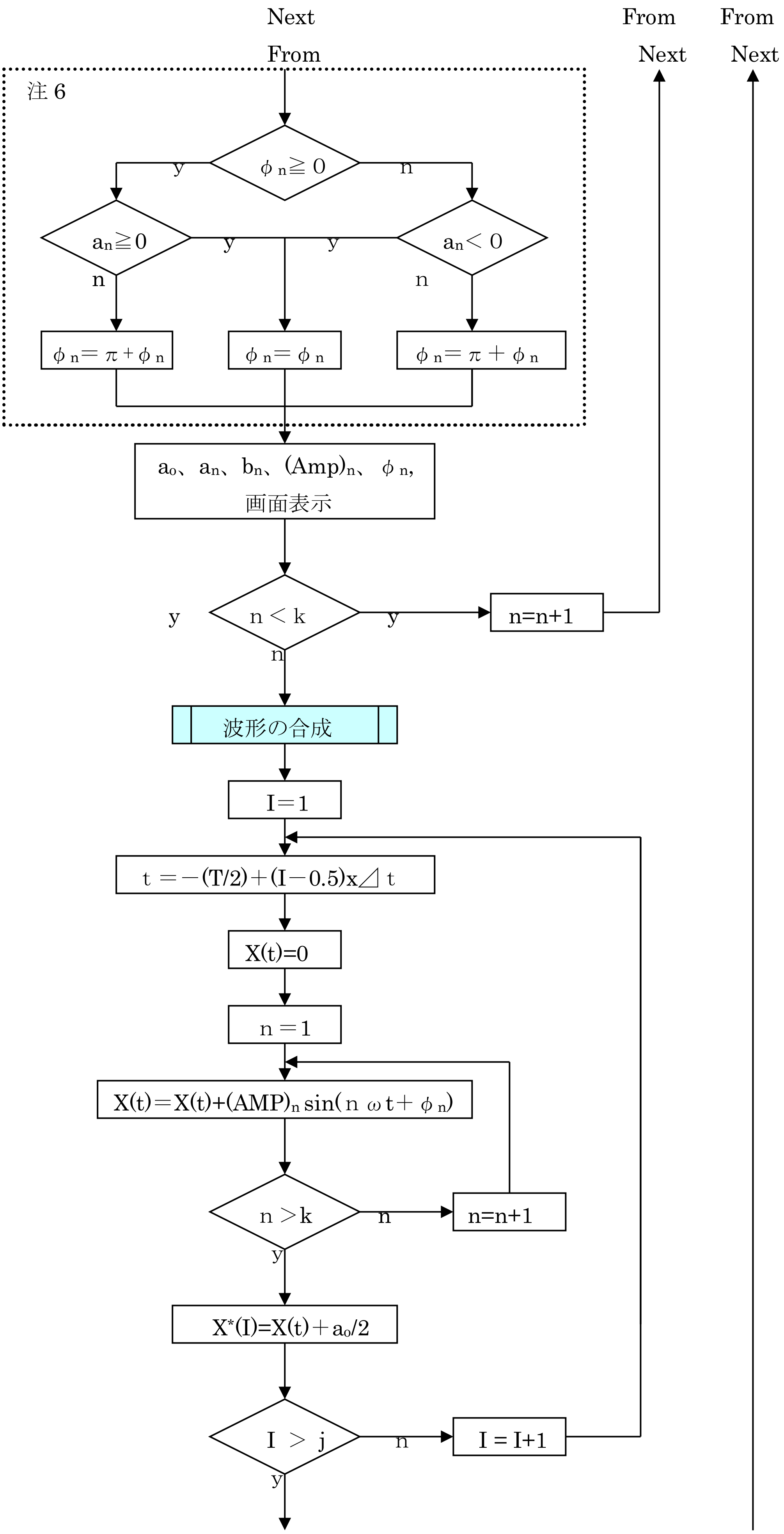
ステップ 5) n=1 から k までステップ 2～ステップ 4 を繰り返す。

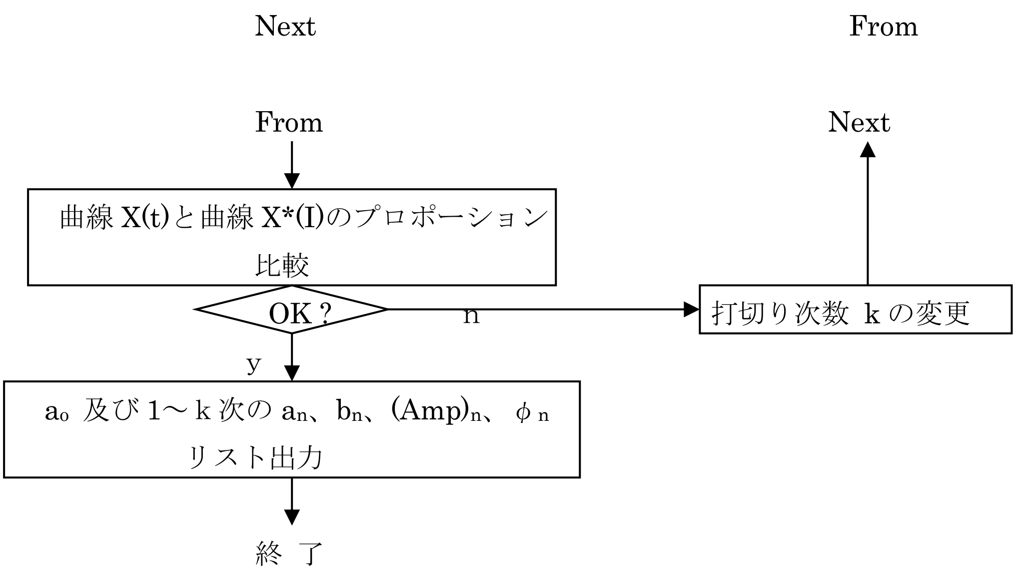
ステップ 6) ステップ３と同じ"各分割の中間における各時間 t"における n=1 から k までのフーリエ級数の和を求め、平均値($a_o/2$)を加えて各時間 t における X(t)値を求める。

ステップ 7) この X(t)とオリジナルの X(t)を比較し、もしズレが目立つならステップ 1 からやり直す。

具体的な計算手順を次のフローチャートに示す。


スタート
波形の変化 : X(t)
波形の周期 : T(sec)
時間分割数 : J(整数)
(注 1)
(注 2)
計算打切り次数 k の設定
(注 3)
K の再設定
基本角振動数： ω＝2π/T
計算刻み時間 ：Δt＝T/J
波形のフーリエ展開
n=1
A＝B＝C＝0
初期値
i ＝1
計算刻み
t ＝－T/2＋(i －1)Δt
X(t)値の読込み
(注 4)
A＝A＋X(t)cos(nωt)
B＝B＋X(t)sin(nωt)
C＝C＋X(t)
i ＜ J
y
n
i ＝ i ＋1
a_n= (2/T)AΔt
b_n＝(2/T)BΔt
a_o＝(2/T)CΔt
(注 5)
$(AMP)_n=(a_n{}^2+b_n{}^2)^{0.5}$
$\phi_n=\tan^{-1}(a_n/b_n)$
$(-\pi/2 \leqq \phi_n \leqq \pi/2)$


Next
From
From
Next
From
Next
注 6
φ n≧ 0
y
n
an≧0
y
y
an< 0
n
n
φ n= π+φ n
φ n= φ n
φ n= π + φ n
a0、an、bn、(Amp)n、 φ n,
画面表示
y
n < k
y
n=n+1
n
波形の合成
I=1
t =−(T/2)+(I−0.5)x⊿ t
X(t)=0
n =1
X(t)=X(t)+(AMP)n sin(n ω t+ φ n)
n >k
n
n=n+1
y
X*(I)=X(t)+a0/2
I > j
n
I = I+1
y



(注 1) 脈動波形の繰返しを読んで周期 T を設定する。基本周波数がわかっているときは、その逆数が周期 T になる。

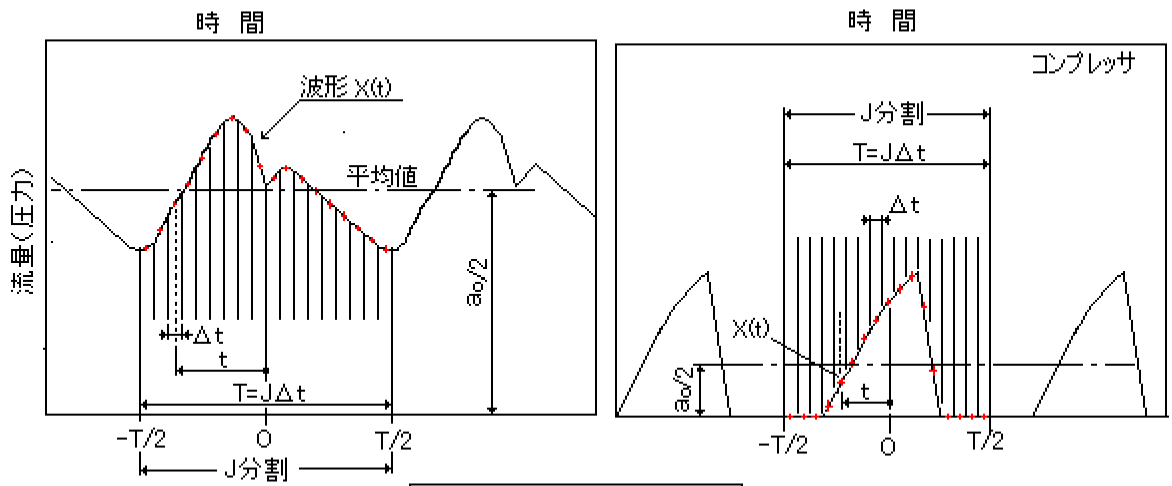


図１ 波形の分割例

(注 2) 時間分割数 J は波の形状によるが 10〜100。波の形状がフラットになるほど J は少なくてよいが、凹凸が多いときや勾配がきついときは数を増やす。

(注 3) 打ち切り次数 k は、多くとるほど精度があがる訳ではなく、むしろ誤差(ズレ)が増えることもある。また k が多いと出力データの読み取り整理が大変になる。一般に流体振動で増幅など問題になるのは 10〜20 次程度なのでこれが目安になるかも知れない。とにかく比較計算してみるのがよい。

(注 4) 時間分割数毎に X(t)値をストアしておいて時刻 t の X(t)値を内挿で求める。

(注 5) もっとも簡単な数値積分。($a_o/2$)は常に一定で、波形の平均値になる。

(注 6) n 次の調和波の位相(遅れ)は $\phi_n = \tan^{-1}(a_n/b_n)$ であらわされるが、関数の性質は図２a より

$\phi_n > 0$ のとき $(a_n/b_n) > 0$ 、 $\phi_n < 0$ のとき $(a_n/b_n) < 0$

これは図２ｂの第１象限と第４象限に入り、a_nは＋値 or－値、b_nは＋値である。実際、ϕ_nは更に＋2πの範囲まで存在するので、ϕ_nの正負をみて

If　$\phi_n \geqq 0$　Then　[下記のいずれか]

もし　$a_n \geqq 0$　なら、b_nは＋で(a_n/b_n)は第１象限　よってϕ_nはそのまま

もし　$a_n < 0$　なら、b_nは－で(a_n/b_n)は第３象限　よって$(\phi_n + \pi)$に

If　$\phi_n < 0$　Then　[下記のいずれか]

もし　$a_n \geqq 0$　なら、b_nは－で(a_n/b_n)は第２象限　よって$\phi_n = (\phi_n + \pi)$に

もし　$a_n < 0$　なら、b_nは＋で(a_n/b_n)は第４象限　よってϕ_nはそのまま

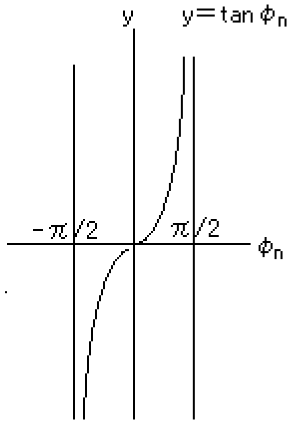


図 2a

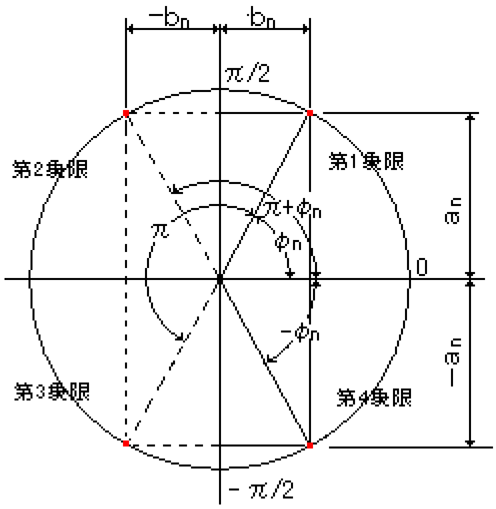


図2b 円座標表示

４．検討 事例 (2)

ガスエンジンの排気ダクトにかなりの脈動があり事故になった。そこで、ガスエンジン出口から20m程度離れた位置にあるダクト付きノズルに圧力センサを取付けて圧力脈動を計測した。その結果は図 3a のようであった。エンジンシリンダの基本振動数(１次)は 18Hz であり周期は 1/18＝0.05556 sec.である。これを 46 分割して、フーリエ展開すると次のようになる。

次数 n	周波数(Hz)	圧力振幅：$(a_n^2+b_n^2)^{0.5}$	位相：ϕ
1	18 Hz	67.0 mmAq	2.9065 rad.
2	36	21.3	1.6312
3	54	140.0	1.3844
4	72	154.7	1.8862
5	90	244.0	1.6537
6	108	23.0	1.5337
7	126	37.8	2.1290
8	144	119.0	2.6603
9	162	65.0	0.9055
10	180	38.6	1.9884
11	198	18.7	2.5085
12	216	33.4	2.8578
13	234	15.3	3.0168
14	252	8.5	4.2232
15	270	14.6	2.0618

なお、 $a_o/2$＝814mmAq（Av.）

この結果を用いて、15 次まで波形を合成すると、図 3b の結果を得た。大きな誤差はない。他の打切り次数もチェックしたが、12 次～15 次ではだいたいこの感じになる。ただ、15 次以上になるとやや形が崩れてきて合わないので、12 次～15 次を打切り次数 k とした。

さて、ガスエンジンはシリンダ出口(～脈動源)の流量波形が不明なので、これに連なる排ガスダクト系の脈動の周波数応答解析ができない。そこで、シリンダ出口の流量波形を次のステップで推定した。

ステップ１：まず流量振幅を求める。1～ k の各次数について、それぞれの流量変動量

$$q=(a_n^2+b_n^2)^{0.5}\cos(n\omega t+\phi_n')=[AMP]_n\cos(n\omega t+\phi_n')$$

に対し、$\phi'=0$ にすると共に $[AMP]_n$ に適当な値をいれて周波数応答解析をランさせ、解析から得られた計測点での圧力応答値 ΔP^* と上表のフーリエ展開値 $\Delta P\,[=(a_n^2+b_n^2)^{0.5}]$ から、

<u>シリンダ出口流量振幅$[AMP]_n^*=(\Delta P^*/\Delta P)\mathrm{x}[AMP]_n$</u>

ステップ２：次に上記の解析結果から各次数についてシリンダ出口 v～計測点の位相差を調べ、

<u>シリンダ出口位相＝計測点位相－位相差</u>

ステップ３：以上の流量振幅/位相をシリンダ出口に設定して解析し、計測点との一致を確認。

結果は省略するが、だいたい順調に脈動源(シリンダ出口)の波形の入力データを設定できた。以降、この脈動源の流量変動を用いて種々のモデル解析を行い、脈動緩和対策(ダクト形状変更)を検討する

ことができた。計測によって脈動トラブルを検討する場合、これが最も標準的なやり方であろう。

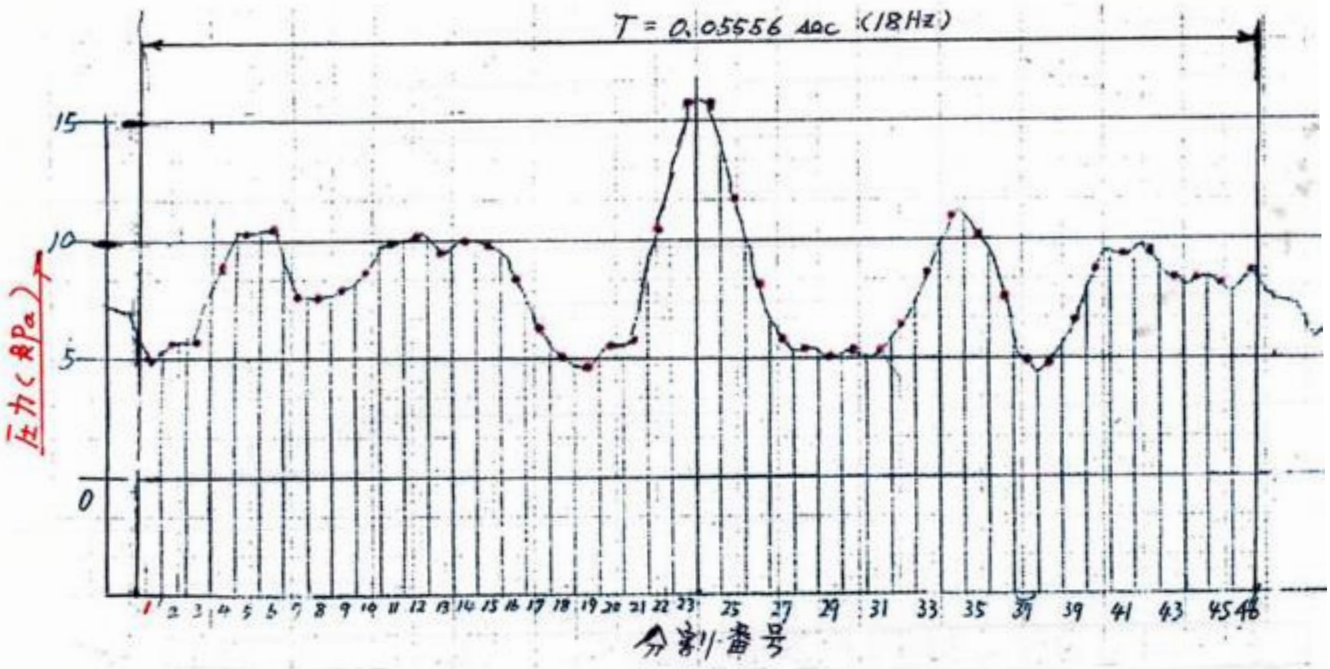


図 3a 排気ダクトの圧力脈動
(計測データ)

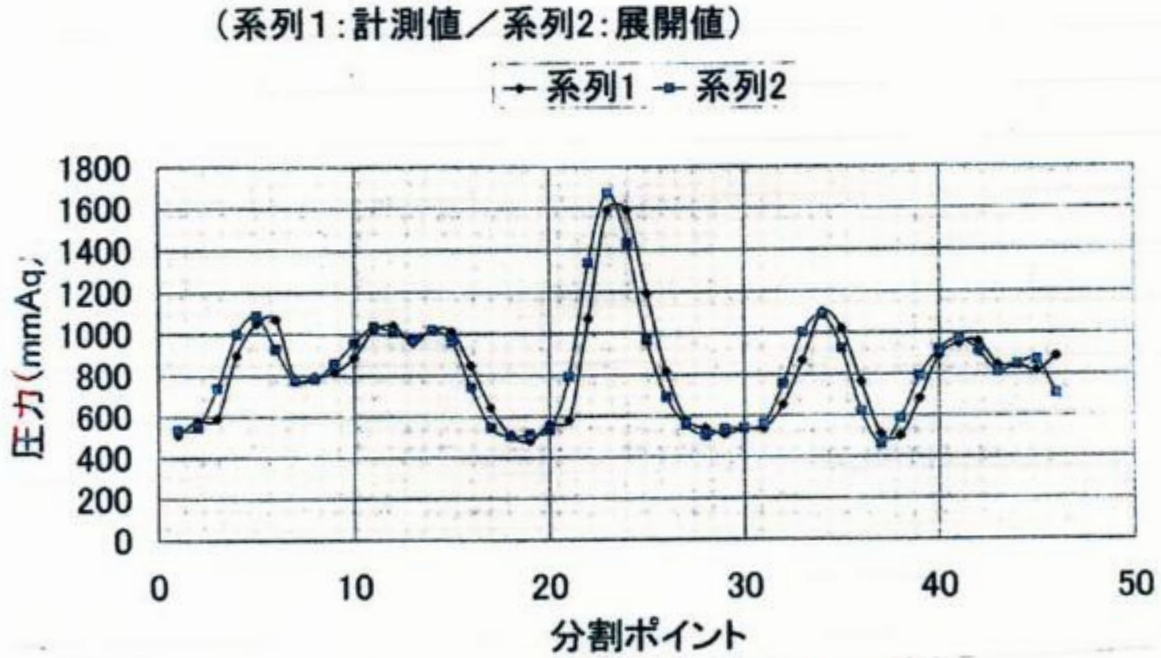


図3b 展開値と計測値の比較

【 解　　説 】

1. 脈動流については伝達マトリックス法による周波数応答解析で解かれることが多い。これは脈動源に次数毎に調和波形を与えて要素間の音響の伝達を解くものであり、1 次元ということもあって意外にシンプルである。脈動源の入力データも【次数毎の流量振幅、位相】だけでいい。しかし多くの場合、これらはテキスト類からすぐに抜き出せるものではない。場合によって機器側から波形すら提示されない(できない)こともある。そのためこの入力データ作成には手間がかかる。本 TS はその便を図る目的で作成されている。

2. 展開式(1)は通常の周波数応答解析で定義されるもの。弊社プログラム PULS－F では

$$X(t)=a_o/2+\Sigma[(a_n^2+b_n^2)^{0.5}\cos(n\omega t+\phi_n')]$$

の形が想定されているので、位相はϕ_n'で入力する。$a_o/2$ は波形の平均値で時間に対し一定であるので入力の必要はない(何故なら、応答解析は変動量解析に他ならず、それがどれ位の平均位置(定常レベル)にあるかは問わないからである)。

打切り次数 k は解の精度に一番響くが、余り拘らず程々にする。だいたいの量/傾向をつかめばいいと思われる。ただ安全マージンは十分に考慮する。

3. 検討事例は実際に起きたトラブルから引用したもの。どうしてもエンジンメーカーから排気流量波形データが得られず、ここに示すよう手法で解析用の入力データを設定したもの。実際の運転ではこのデータに拠る解析結果にごく近い圧力変動値が検出されており、ここで示した手法は決して悪くないようである。

4. 往復動機械(コンプレッサ/ポンプ類)の波形およびそのフーリエ展開が、数式で与えられるものについては今後、逐次、紹介してゆきたい。なお、コンプレッサについては下記 TS 参照。

FE-18-RP-005　往復動圧縮機の脈動波形の簡易計算法

引用文献：

(1)　坂田「エンジニアリングサイエンス講座 11 振動と波動の工学」　共立出版

(2)　“YCH 排気系の脈動検討(その 2)－計測点(上)の圧力波形分析結果”　H17.3.7 プケハ宮本