

【整番】 FE-18-RP-001	【標題】 単純管路の流体柱の固有振動数の計算方法
分類：流れ(脈動流)／種別：推奨指針	作成年月：H18.11／改訂：Ver0.0 (H18.11) 作成者：N.Miyamoto

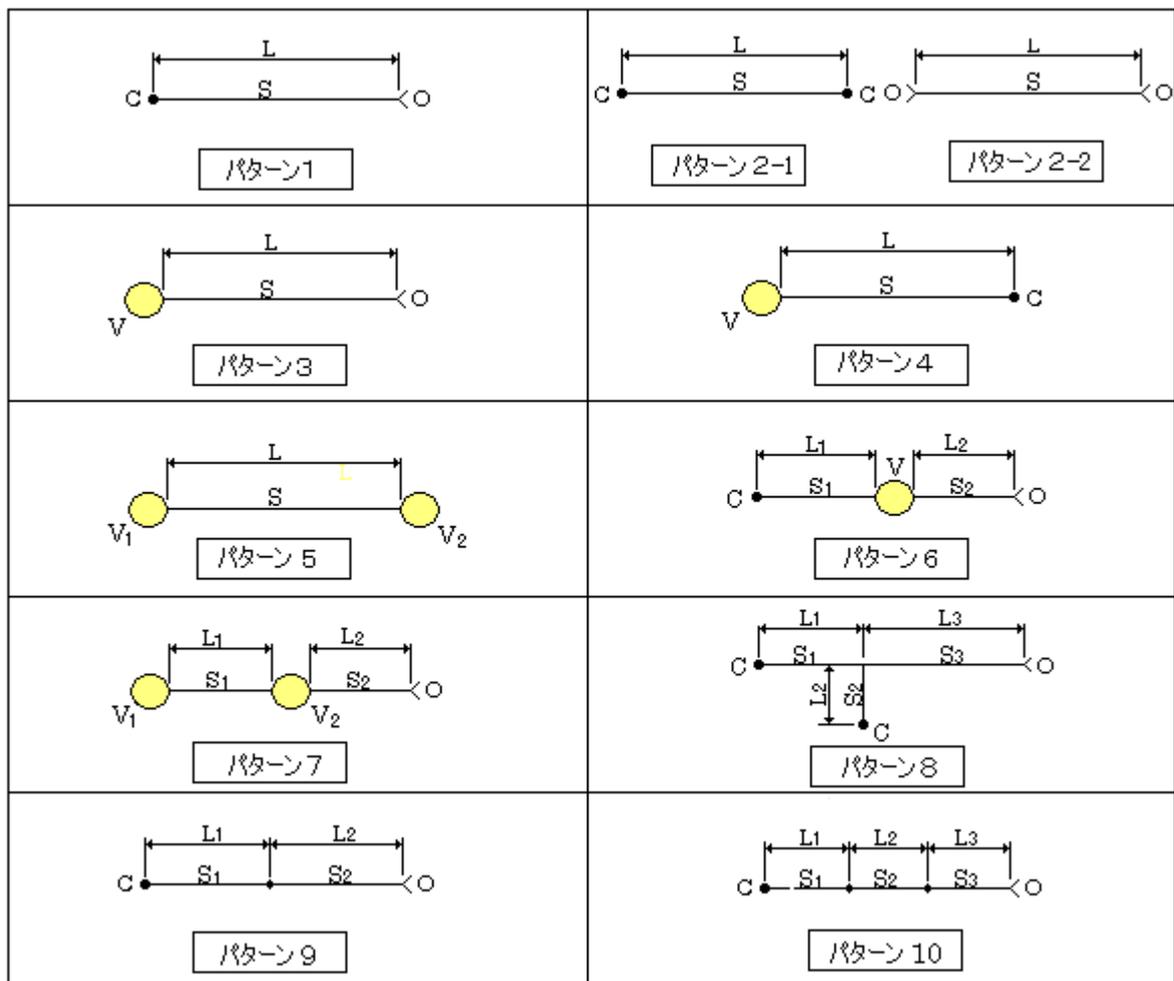
全7枚

1. はじめに

脈動や流体振動が懸念される配管系では流体柱(fluid column)の固有振動数を求めて振動源の周波数と共鳴しないようにする必要がある。流体柱の固有振動数は脈動解析プログラム(例えば puls)を用いれば比較的容易に得られるがそれなり手間を食う。そこで、自分のパソコンで軽くチェックできるようにごく単純な管路パターンを対象にした SWRI(*1)の算定式を紹介する。

2. SWRI の式と計算手順

図 1 形状パターン



O: 開端(open end), C:閉端(closed end)

SWRI の形状パターンは上記 10 パターン。管路と容積からなり(*1)、管端は開端(open end)か閉端(closed end)のいずれかとする(*2)。

各パターンにおける固有値の計算式はつぎの通り。

$$\text{パターン1: } L = (a/\omega)(m-1/2)\pi \rightarrow \omega = (2m-1)\pi(a/2L) \rightarrow f = \omega/(2\pi) = (2m-1)\{a/(4L)\}$$

$$\text{パターン2: } L = (a/\omega)m\pi \rightarrow \omega = m\pi(a/L) \rightarrow f = \omega/(2\pi) = m\{a/(2L)\}$$

パターン 3 : $\tan(\omega L/a) = aS/(\omega V) \rightarrow \mathbf{[\sin(\omega L/a) - \{aS/(\omega V)\}\cos(\omega L/a) = 0]}$

パターン 4 : $\tan(\omega L/a) = -\omega V/(aS) \rightarrow \mathbf{[\sin(\omega L/a) + \{\omega V/(aS)\}\cos(\omega L/a) = 0]}$

パターン 5 : $\tan(\omega L/a) = \omega(V_1+V_2)/\{\omega^2V_1V_2/(aS) - aS\}$
 $\rightarrow \mathbf{[\sin(\omega L/a) - \{\omega(V_1+V_2)/\{\omega^2V_1V_2/(aS) - aS\}\}\cos(\omega L/a) = 0]}$

パターン 6 : $(S_1/S_2)\tan(\omega L_1/a)\tan(\omega L_2/a) + \{\omega V/(aS_2)\}\tan(\omega L_2/a) = 1$
 $\rightarrow \mathbf{[(S_1/S_2)\sin(\omega L_1/a)\sin(\omega L_2/a) + \{\omega V/(aS_2)\}\sin(\omega L_2/a)\cos(\omega L_1/a) - \cos(\omega L_1/a)\cos(\omega L_2/a) = 0]}$

パターン 7 : $[(S_1/S_2) - \{\omega V_1/(aS_1)\}\{\omega V_2/(aS_2)\}]\tan(\omega L_1/a)\tan(\omega L_2/a)$
 $+ [\{\omega V_1/(aS_2)\} + \{\omega V_2/(aS_2)\}]\tan(\omega L_2/a) + \{\omega V_1/(aS_1)\}\tan(\omega L_1/a) = 1$
 $\rightarrow \mathbf{[(S_1/S_2) - \{\omega V_1/(aS_1)\}\{\omega V_2/(aS_2)\}]\sin(\omega L_1/a)\sin(\omega L_2/a)}$
 $+ [\{\omega V_1/(aS_2)\} + \{\omega V_2/(aS_2)\}]\sin(\omega L_2/a)\cos(\omega L_1/a)$
 $+ \{\omega V_1/(aS_1)\}\sin(\omega L_1/a)\cos(\omega L_2/a) - \cos(\omega L_1/a)\cos(\omega L_2/a) = 0}$

パターン 8 : $(S_1/S_3)\tan(\omega L_1/a)\tan(\omega L_3/a) + (S_2/S_3)\tan(\omega L_2/a)\tan(\omega L_3/a) = 1$
 $\rightarrow \mathbf{[(S_1/S_3)\sin(\omega L_1/a)\sin(\omega L_3/a)\cos(\omega L_2/a) + (S_2/S_3)\sin(\omega L_2/a)\sin(\omega L_3/a)\cos(\omega L_1/a) - \cos(\omega L_1/a)\cos(\omega L_2/a)\cos(\omega L_3/a) = 0]}$

パターン 9 : $(S_1/S_2)\tan(\omega L_1/a)\tan(\omega L_2/a) = 1$
 $\rightarrow \mathbf{[(S_1/S_2)\sin(\omega L_1/a)\sin(\omega L_2/a) - \cos(\omega L_1/a)\cos(\omega L_2/a) = 0]}$

パターン 10 : $(S_1/S_3)\tan(\omega L_1/a)\tan(\omega L_3/a) + (S_1/S_2)\tan(\omega L_1/a)\tan(\omega L_2/a)$
 $+ (S_2/S_3)\tan(\omega L_2/a)\tan(\omega L_3/a) = 1$
 $\rightarrow \mathbf{[(S_1/S_3)\sin(\omega L_1/a)\sin(\omega L_3/a)\cos(\omega L_2/a) + (S_1/S_2)\sin(\omega L_1/a)\sin(\omega L_2/a)\cos(\omega L_3/a) + (S_2/S_3)\sin(\omega L_2/a)\sin(\omega L_3/a)\cos(\omega L_1/a) - \cos(\omega L_1/a)\cos(\omega L_2/a)\cos(\omega L_3/a) = 0]}$

ここで： ω = 角固有振動数(rad./sec.)、 f = 固有振動数(Hz)、 m = 次数 1,2,3,4,.....

a = 流体音速(m/s)、 L = 管路長さ(m)、 S = 管内断面積(m²)、 V = 容積(m³)

サフィックス “1、2、3” = 要素番号

流体音速 a については、[FE-18-TM-006 圧力伝播速度(音速)データ]を参照のこと。

パターン 1、2 は、便覧などで周知の通り。脈動の基本的な式である。

パターン 3~10 において【】外の式は SWRI のオリジナル。【】内の式はこれを変形したもの。

【】の式から根 ω は代数的に得られないので、逐次計算によってこの式を満たす根 ω を求める。

ω には無数の値があるが、大きい順に1次、2次、3次、……となる。振動数の計算手順をチャートに示すと次のようになる。

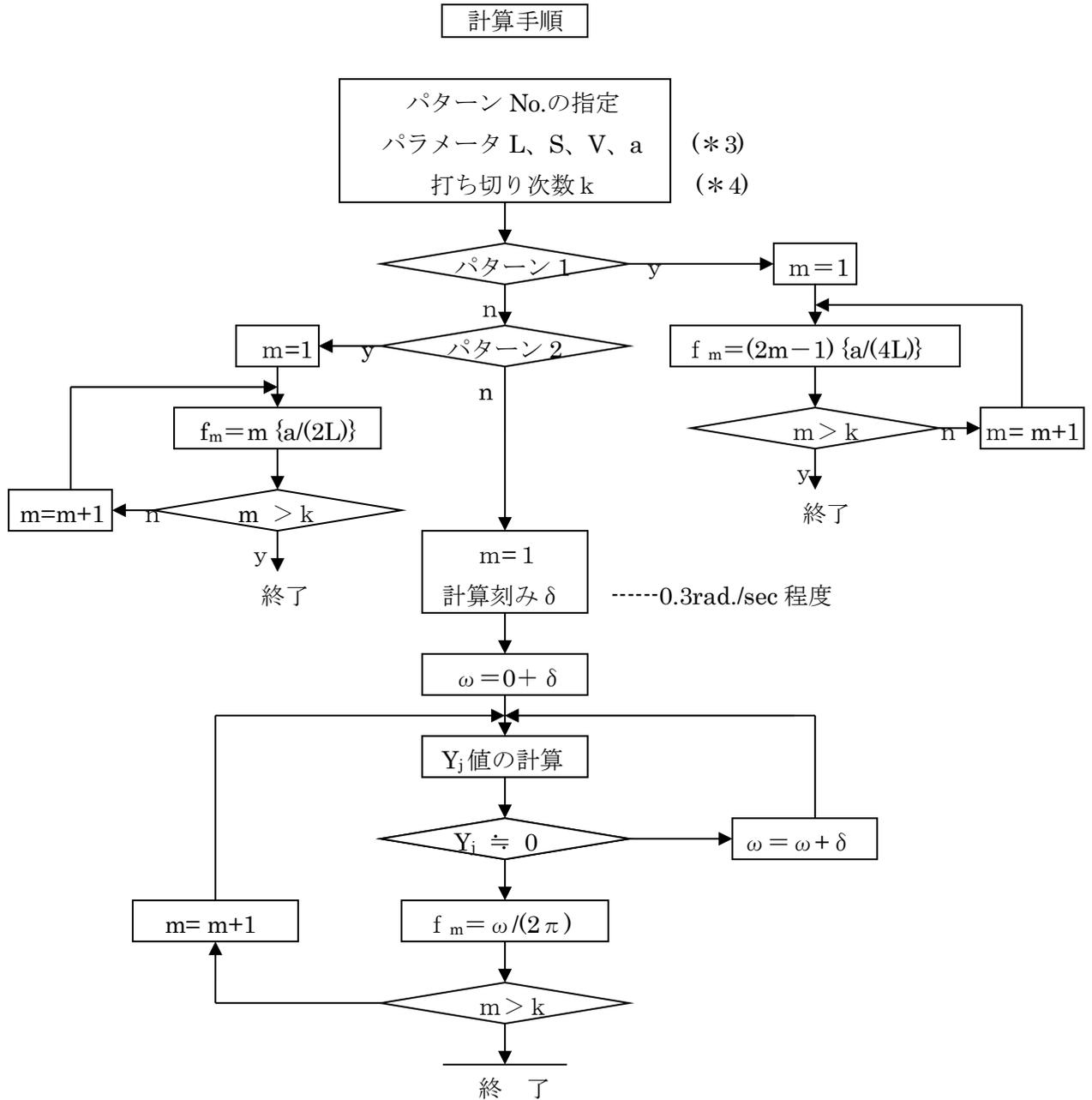
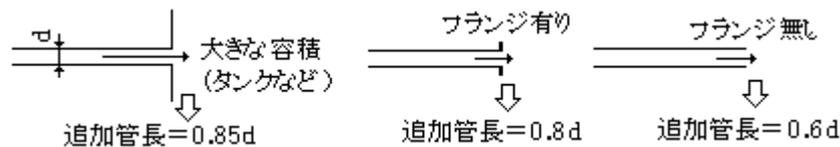


表 1

パターン#	< 判定式 >
3	$Y_j = \sin(\omega L/a) - \{aS/(\omega V)\}\cos(\omega L/a)$
4	$Y_j = \sin(\omega L/a) + \{\omega V/(aS)\}\cos(\omega L/a)$
5	$Y_j = \sin(\omega L/a) - [\omega(V_1+V_2)/\{\omega^2V_1V_2/(aS) - aS\}]\cos(\omega L/a)$
6	$Y_j = (S_1/S_2)\sin(\omega L_1/a)\sin(\omega L_2/a) + \{\omega V/(aS)\}\sin(\omega L_2/a)\cos(\omega L_1/a) - \cos(\omega L_1/a)\cos(\omega L_2/a)$

7	$Y_j = [(S_1/S_2) - \{\omega V_1 / (aS_1)\} \{\omega V_2 / (aS_2)\}] \sin(\omega L_1/a) \sin(\omega L_2/a)$ $+ [\{\omega V_1 / (aS_2)\} + \{\omega V_2 / (aS_1)\}] \sin(\omega L_2/a) \cos(\omega L_1/a)$ $+ \{\omega V_1 / (aS_1)\} \sin(\omega L_1/a) \cos(\omega L_2/a) - \cos(\omega L_1/a) \cos(\omega L_2/a)$
8	$Y_j = (S_1/S_3) \sin(\omega L_1/a) \sin(\omega L_3/a) \cos(\omega L_2/a)$ $+ (S_2/S_3) \sin(\omega L_2/a) \sin(\omega L_3/a) \cos(\omega L_1/a)$ $- \cos(\omega L_1/a) \cos(\omega L_2/a) \cos(\omega L_3/a)$
9	$Y_j = (S_1/S_2) \sin(\omega L_1/a) \sin(\omega L_2/a) - \cos(\omega L_1/a) \cos(\omega L_2/a)$
10	$Y_j = (S_1/S_3) \sin(\omega L_1/a) \sin(\omega L_3/a) \cos(\omega L_2/a)$ $+ (S_1/S_2) \sin(\omega L_1/a) \sin(\omega L_2/a) \cos(\omega L_3/a)$ $+ (S_2/S_3) \sin(\omega L_2/a) \sin(\omega L_3/a) \cos(\omega L_1/a)$ $- \cos(\omega L_1/a) \cos(\omega L_2/a) \cos(\omega L_3/a)$

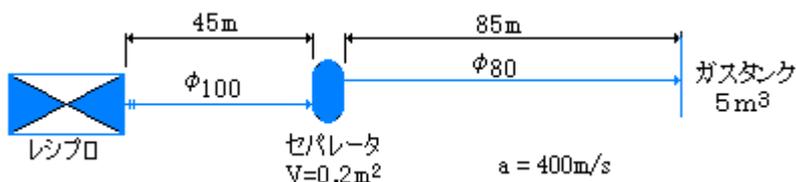
- (*1) “管路”は配管/ダクトに限らず 1 次元流れの通路を指す。流れが停頓していても音響が伝播する限り管要素として扱う。“容積”は大気/塔槽類/タンクなど 3 次元の空間を指す。
- (*2) 開端/閉端は音響的な境界。管路が大気や容積要素(槽/タンクなど)に接続される場合、開端で扱う。管路が行き止まりであったり弁などで遮断されている場合は閉端で扱う。
- (*3) 管路長さLはフィッティング類も含めた同一口径の管路の延べ長さである。但し、絞りのきついオリフィスは挿入されていないものとする。なお開端をもった管路では場合は下記の管端補正値を管路長さに加算するものとする⁽²⁾。



また、流体音速 a は、気体の場合、流体そのものの音速をとってよいが、液体の場合は管路の剛性を考慮すること。別途、[FE-18-TM-006 圧力伝播速度(音速)データ]参照のこと。

- (*4) 音響の次数は無限にあるが、どこまで対象にするかはケースバイケース。構造物ではせいぜい 4 次程度までであるが、流体の場合は高次でも共鳴が問題になるので、少なくとも 10 次程度まではみておくべきか(?)

3. 例題



上記の系について、3 次までの固有振動数をもとめよ。管路長 45m/85m は管端補正分を含む。

ガスタンクの容量が極めて大きいのでこの部分は圧力変動のない開端(open end)とみなせる。またレシプロ側は吸排気弁のいずれかが閉じられるので閉端(closed end)とみなせるので、形状的にはパターン 6 になる。表 1 の判定式を用いた、 $\omega=0$ からの逐次計算では、

$$\omega_1=3.6\text{rad./sec}(0.57\text{Hz})、\omega_2=14.55\text{rad./sec}(2.3\text{Hz})、\omega_3=20.6\text{rad./sec}(3.3\text{Hz})$$

これを確認してみる。

$$S_1=0.7856 \times 0.1^2=0.007856\text{m}^2、S_2=0.7856 \times 0.08^2=0.00503\text{m}^2$$

$$\begin{aligned} Y_j &= (S_1/S_2)\sin(\omega L_1/a)\sin(\omega L_2/a) + \{\omega V / (aS_2)\} \sin(\omega L_2/a)\cos(\omega L_1/a) - \cos(\omega L_1/a)\cos(\omega L_2/a) \\ &= (0.007856/0.00503)\sin(3.6 \times 45/400)\sin(3.6 \times 85/400) + (3.6 \times 0.2/400/0.00503) \sin(3.6 \times 85/400) \\ &\quad \times \cos(3.6 \times 85/400) - \cos(3.6 \times 45/400) \cos(3.6 \times 85/400) \\ &= -0.00885 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_j &= (0.007856/0.00503)\sin(14.55 \times 45/400)\sin(14.55 \times 85/400) + (14.55 \times 0.2/400/0.00503) \\ &\quad \sin(14.55 \times 85/400) \times \cos(14.55 \times 85/400) - \cos(14.55 \times 45/400) \cos(14.55 \times 85/400) \\ &= 0.006793 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_j &= (0.007856/0.00503)\sin(20.6 \times 45/400)\sin(20.6 \times 85/400) + (20.6 \times 0.2/400/0.00503) \\ &\quad \sin(20.6 \times 85/400) \times \cos(20.6 \times 85/400) - \cos(20.6 \times 45/400) \cos(20.6 \times 85/400) \\ &= 0.007204 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

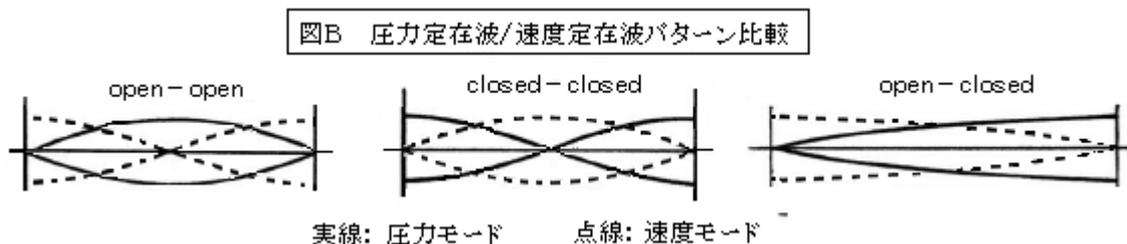
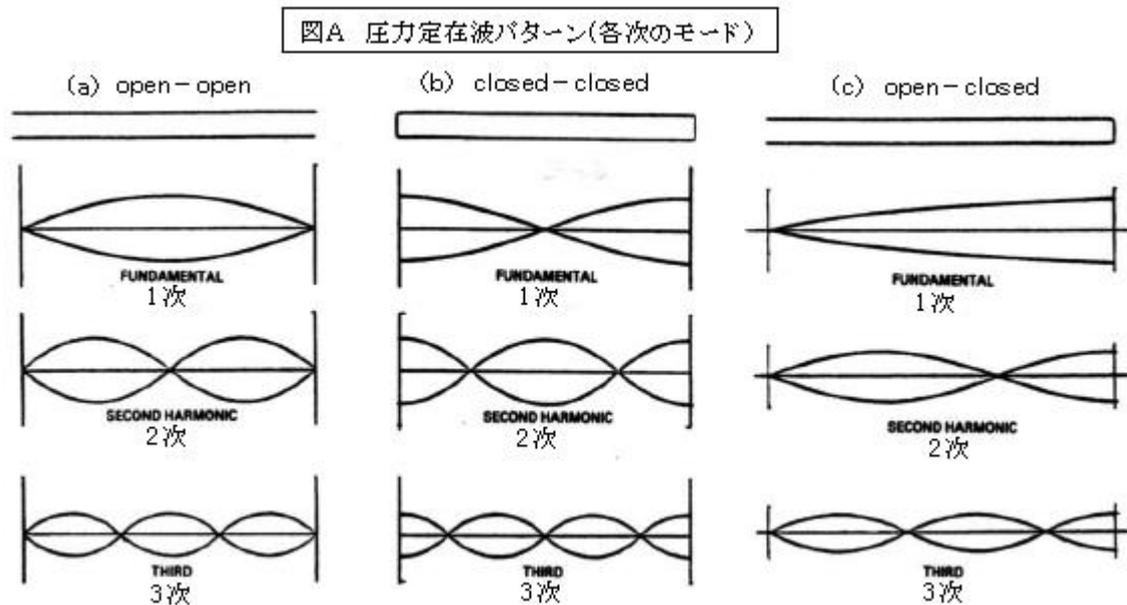
従って、1次 $3.6/6.285=0.57\text{Hz}$ 、2次 $14.55/6.285=2.3\text{Hz}$ 、3次 $20.6/6.285=3.3\text{Hz}$ OK

【 解 説 】

1. 流体柱の固有振動数は FIV を検討する場合、必ず必要になるパラメータである。構造物の場合と同様に、流体振動数と同調すると共鳴(Resonance)して圧力波動は増幅される。固有振動数の計算は面倒で、コンピュータ解析によっているが、単純管路については、ここで紹介する SWRI(South-West Research Institute USA)の簡易式で十分な用が足りる。これら簡易式は相当な年代のもので、今では出典を不明になっているが、便覧/テキスト^①ではよく引用されている。

式は図 1 の 10 パターンについて与えられているが、パターン 1、2 を除けば超越式になっているので数値的に解く必要がある。

2. 固有振動の波形は定在波(standing wave)といわれているが、これには圧力モードと速度モードの 2 つのパターンがある。単に定常波という時は圧力モードを指している。図 1 のパターン 1、2 は単管路の場合であり脈動問題では最も基本的なパターンであるが、その定在波は図 A のようである^②。なおその場合、図 B のように圧力モードと速度モードの節と腹は逆転している。



3. パターン 3~7 には容積要素が含まれるが、容積 V が大きく $\{\omega V/(Sa)\} \gg \cos\{\omega(L_1+L_2)/a\}$ とみなせるような場合は容積部分への出入口を開端とみなして、もっと単純なパターンで扱っていい。また逆に、容積 V が小さく、略 $\{\omega V/(Sa)\} < 0.6$ ならば (V/S) を等価管長として単純に扱っていい^①。

4. なお、コンピュータ解析によらず固有振動数を計算した例を[TS-18-TC-001 気柱の固有振動数計算(事例)]に示すので、併せて参照のこと。

引用文献：

- (1) プロセス機器構造設計シリーズ 3 「配管」 5.4 項 (化学工学協会編)
- (2) 「Controlling The Effects of Pulsations and Fluid Transients in Piping Systems」 SWRI