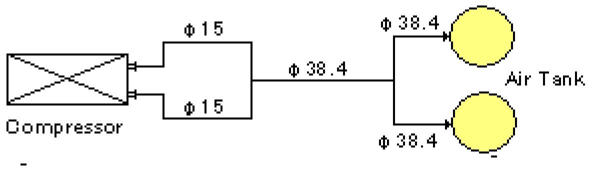
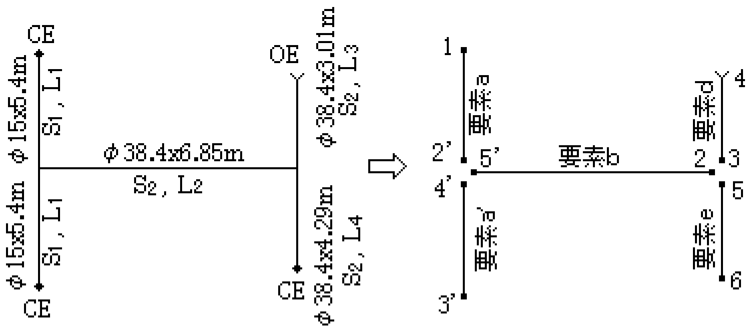
【整番】FE-18-DC-001	【標題】　気柱の固有振動数計算(事例)	
分類：流れ(脈動流)／種別：設計事例	作成年月：H2.8／改訂：Ver0.1 (H19.1)	作成者：N.Miyamoto

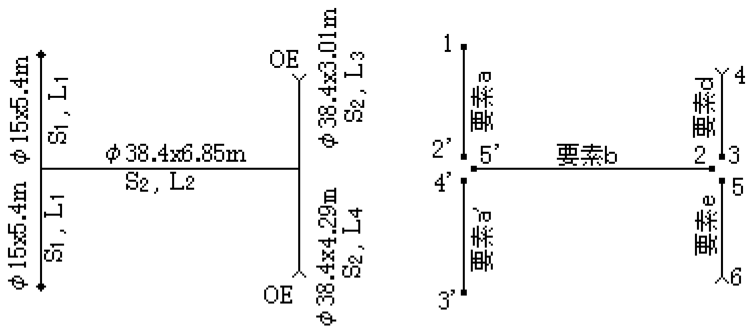
全３枚

1．気柱の固有振動数はプログラム計算(例えば puls)で得られる。しかし、簡単な管路であれば、特にプログラムがなくても、計算式を作って計算できる。本 TS はその計算式の作り方を事例で紹介するものである。ここでは次のようなモデルを考える。モデル１と２はエアタンクへの連絡があるかないかの違いによる。モデル１は一方のタンクのみにつながり、他方のタンクへはタンク入口の弁で遮断されている。モデル２は両側のタンクにつながっている。





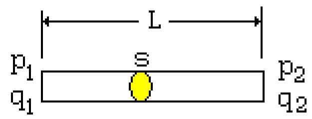
モデル1　CE:閉端　OE:開端



モデル2　CE:閉端　OE:開端

2.　単管路の伝達マトリックスは次式で与えられる。

$$
\begin{Bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega L/a), & -(a/s)j\sin(\omega L/a) \\ -(s/a)j\sin(\omega L/a), & \cos(\omega L/a) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{Bmatrix}
$$



where　p_1, p_2 =入口、出口圧力変動　　a＝流体音速　　ω=角振動数(rad/sec)

q_1, q_2 =入口、出口質量流量変動　　S=管断面積(m^2)　　L＝管路長さ(m)

3. まず、モデル 1 から。要素 a 、a’ 、b において

$$\begin{Bmatrix} p'_2 \\ q'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} p'_4 \\ q'_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p'_3 \\ q'_3 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p'_5 \\ q'_5 \end{Bmatrix}$$

$p_1=p_3'$、$q_1=q_3'$ また $p_2'=p_4'=p_5'$、$q_2'+q_4'+q_5'=0$ であるから、

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}-2a_{21}b_{12}, & a_{12}b_{11}-2a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21}-2a_{21}b_{22}, & a_{12}b_{21}-2a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{Bmatrix} \longrightarrow \text{要素C}$$

要素 c と要素 d、e を考える。端 1 は閉端であるから $q_1=0$ である。また端 4 は開端であるから $p_4=0$、端 6 は閉端であるから $q_6=0$ である。よって、

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_3 \\ q_3 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} p_6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_5 \\ q_5 \end{Bmatrix}$$

従って、$p_2=c_{11}p_1$、$q_2=c_{21}p_1$ であるから　$q_2=(c_{21}/c_{11})p_2$

また、$0=d_{11}p_3+d_{12}q_3$ であるから　$q_3=-(d_{11}/d_{12})p_3$、

また、$0=e_{21}p_5+e_{22}q_5$ であるから　$q_5=-(e_{21}/e_{22})p_5$

$q_2+q_3+q_5=0$、$p_2=p_3=p_5$ であるから、

$$(c_{21}/c_{11})-(d_{11}/d_{12})-(e_{21}/e_{22})=0、$$

ここで、$c_{21}=a_{11}b_{21}-2a_{21}b_{22}=-(S_2/a)j\cos(\omega L_1/a)\sin(\omega L_2/a)+2(S_1/a)j\sin(\omega L_1/a)\cos(\omega L_2/a)$

$c_{11}=a_{11}b_{11}-2a_{21}b_{12}=\cos(\omega L_1/a)\cos(\omega L_2/a)+2(S_1/S_2)\sin(\omega L_1/a)\sin(\omega L_2/a)$

$(d_{11}/d_{12})=-\cos(\omega L_3/a)/\{(a/S_2)j\sin(\omega L_3/a)\}=\{(S_2/a)j\{\cos(\omega L_3/a)/\sin(\omega L_3/a)\}$

$(e_{21}/e_{22})=-(S_2/a)j\sin(\omega L_4/a)/\cos(\omega L_4/a)$

この式を整理して

$$\sin\phi_3\cos\phi_4[-\cos\phi_1\sin\phi_2+2\kappa\sin\phi_1\cos\phi_2]$$
$$-(\cos\phi_3\cos\phi_4-\sin\phi_3\sin\phi_4)(\cos\phi_1\cos\phi_2+2\kappa\sin\phi_1\sin\phi_2)=0 \quad \text{------(1)}$$

ここで　$\kappa=(S_1/S_2)$、$\phi_1=(\omega L_1/a)$、$\phi_2=(\omega L_2/a)$、$\phi_3=(\omega L_3/a)$、$\phi_4=(\omega L_4/a)$

4. 次にモデル 2 について。この場合は、

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_3 \\ q_3 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_5 \\ q_5 \end{Bmatrix}$$

$p_2=c_{11}p_1$、$q_2=c_{21}p_1$ であるから　$q_2=(c_{21}/c_{11})p_2$

また、$0=d_{11}p_3+d_{12}q_3$ であるから　$q_3=-(d_{11}/d_{12})p_3$、

また、$0=e_{11}p_5+e_{12}q_5$ であるから　$q_5=-(e_{11}/e_{12})p_5$

$q_2+q_3+q_5=0$、$p_2=p_3=p_5$ であるから、

$$(c_{21}/c_{11})-(d_{11}/d_{12})-(e_{11}/e_{12})=0、$$

(c_{21}/c_{11})と(d_{11}/d_{12})は前に同じ、

$(e_{11}/e_{12})=-\cos(\omega L_4/a)/\{(a/S_2)j\sin(\omega L_4/a)\}=\{(S_2/a)j\{\cos(\omega L_4/a)/\sin(\omega L_4/a)\}$

従って

$$\sin\phi_3 \sin\phi_4 [-\cos\phi_1 \sin\phi_2 + 2\kappa \sin\phi_1 \cos\phi_2] - (\cos\phi_3 \sin\phi_4 + \sin\phi_3 \cos\phi_4)(\cos\phi_1 \cos\phi_2 + 2\kappa \sin\phi_1 \sin\phi_2) = 0 \quad \text{------(2)}$$

5．モデル１において、

管断面積：S_1=0.7856x0.015^2＝0.000177m^2、S_2＝0.7856x0.0384^2＝0.00116m^2

各管路長さ：L_1=5.4m、L_2=6.85m、L_3=3.01m、L_4=4.29m

流体音速：340m/s

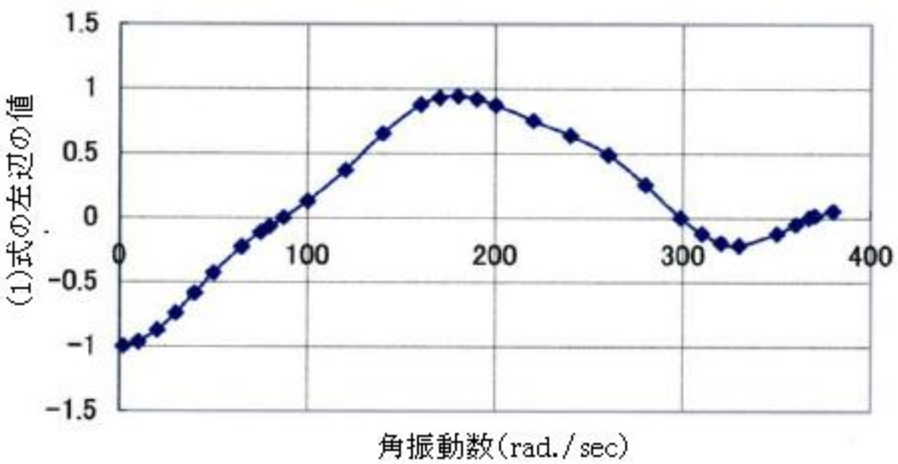
κ＝0.000177/0.00116＝0.152586、

ϕ_1＝5.4ω/340＝0.01588ω、ϕ_2＝6.85ω/340＝0.02015ω、ϕ_3＝3.01ω/340＝0.008853ω

ϕ_4＝4.29ω/340＝0.01262ω

κ、ϕ_1～ϕ_4を(1)式に代入し、ω値を与えて左辺を計算すると下図のようになり、左辺がゼロになる、即ち(1)式を満たす固有角振動数ωは、次のようになる。

ω＝87 rad/sec(13.8Hz)、298.7rad/sec(47.5 Hz)、367rad/sec(58.4 Hz)、. . .



また、モデル２を同じパラメータで計算すると、

ω＝157.2rad/sec(25Hz)、245 rad/sec(39Hz)、309.7rad/sec(49.3Hz). . . . . .

モデル２の方は両端開放であるため波長がやや短くなるので、１次が高めになる。

この事例では、実際の加振周波数(コンプレッサ振動数)は 16.7Hz であるので、モデル１の１次 13.8Hz がこれにやや近づいて共鳴傾向になる。実際、運転状態でうなり音が発生していた。

(注記)　開端の場合、圧力の変化は０即ち p＝0。一方閉端の場合、流量の変化は零即ち q＝0。
この境界条件のもとで、p、q を含まない式を導きそれから固有振動数ωを求めている。