

【整番】 FE-02-TM-011	【標題】 ファノ流れ計算に関する情報
分類：流れ(圧縮性流れ)/種別：技術メモ	作成年月：H19.7/改訂：Ver0.1 (H20.1) 作成者：N.Miyamoto

## H20.1.13 改訂-チャート1のロジック見直し

全 15 枚

一次元圧縮性流れの代表的パターンには次のようなものがある。

	外部との熱の授受	内部発熱/外部仕事	摩擦・渦損失	流れ中の抵抗
等エントロピ流れ (Isentropic flow)	×	×	×	×
全エンタルピ一定流れ(Fanno flow 等)	×	×	○	○
レイリー流れ (Rayleigh flow)	○	×	×	×
等温流れ (Isothermal flow)	○	×	○	○

断熱された機器や管路内の流れ、あるいは断熱されていない短い管路やコンポーネント内の流れは外部との熱の授受が殆どない断熱流れとみなされるが、その流れの過程で粘性抵抗によるマイナロスが大きくなると全エンタルピ一定の流れとして扱われる。その場合、単一な管路であって流路断面積の変化がない流れを特にファノ流れ(Fanno flow)と呼ぶ。本 TS ではこの最も basic な全エンタルピ一定流れを取り上げ、その計算方法に関して情報を整理してみた。以下。

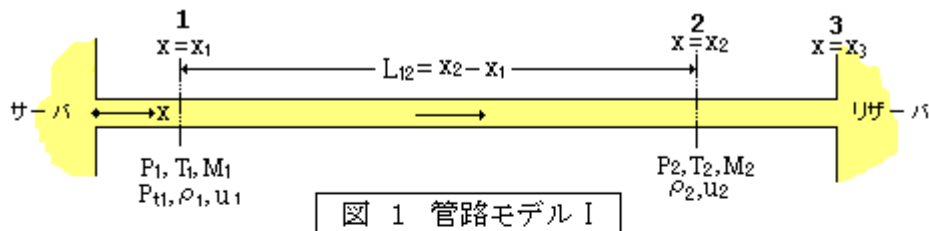


図 1 管路モデル I

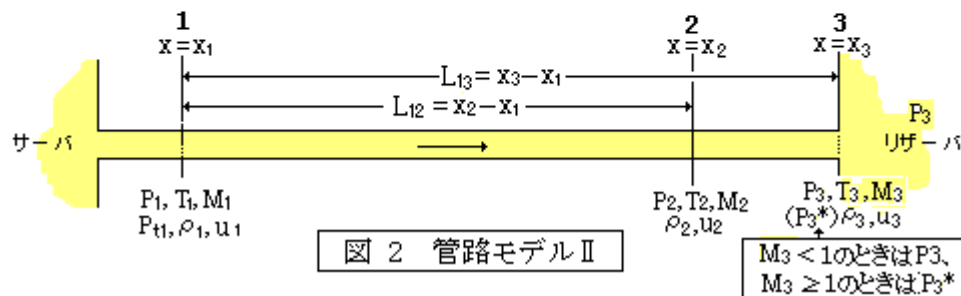


図 2 管路モデル II

$M_3 < 1$  のときは  $P_3$ 、 $M_3 \geq 1$  のときは  $P_3^*$

## 1. 位置 1 ~ 2 の間の諸関係式 (図 1 に対し) (1)(2)

$$\text{圧損係数-マッハ数: } k_{12} = X_1 - X_2 \quad \text{-----(1)}$$

$$X_1 = (1 - M_1^2) / (\gamma M_1^2) + \{(\gamma + 1) / (2\gamma)\} \log [(\gamma + 1) M_1^2 / \{2 + (\gamma - 1) M_1^2\}]$$

$$X_2 = (1 - M_2^2) / (\gamma M_2^2) + \{(\gamma + 1) / (2\gamma)\} \log [(\gamma + 1) M_2^2 / \{2 + (\gamma - 1) M_2^2\}]$$

$$\text{静圧-マッハ数: } P_2 / P_1 = (M_1 / M_2) \{2 + (\gamma - 1) M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1) M_2^2\}^{0.5} \quad \text{-----(2)}$$

$$\text{流速-マッハ数: } u_2 / u_1 = (M_2 / M_1) \{2 + (\gamma - 1) M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1) M_2^2\}^{0.5} \quad \text{-----(3)}$$

$$\text{音速-マッハ数: } (a_2 / a_1)^2 = \{2 + (\gamma - 1) M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1) M_2^2\} \quad \text{-----(4)}$$

$$\text{密度-マッハ数: } \rho_2 / \rho_1 = (M_1 / M_2) \{2 + (\gamma - 1) M_2^2\} / \{2 + (\gamma - 1) M_1^2\}^{0.5} \quad \text{-----(5)}$$

$$\text{温度-マッハ数: } T_2 / T_1 = \{2 + (\gamma - 1) M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1) M_2^2\} \quad \text{-----(6)}$$

$$\text{全圧-マッハ数: } P_{t2} / P_{t1} = (M_1 / M_2) \{2 + (\gamma - 1) M_2^2\} / \{2 + (\gamma - 1) M_1^2\}^{(\gamma + 1) / (2(\gamma - 1))} \quad \text{-----(7)}$$

$$\text{エントロピー-マッハ数: } (s_2 - s_1) / R = \log \left[ (M_2 / M_1) \{2 + (\gamma - 1) M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1) M_2^2\}^{(\gamma + 1) / (2(\gamma - 1))} \right] \quad \text{---(8)}$$

$$\text{質量流量(静圧ベース): } m = \{AP_1 / (RT_1)^{0.5}\} M_1 \gamma^{0.5} \{1 + (\gamma - 1) M_1^2 / 2\}^{0.5} \quad \text{-----(9a)}$$

$$= \{AP_2 / (RT_2)^{0.5}\} M_2 \gamma^{0.5} \{1 + (\gamma - 1) M_2^2 / 2\}^{0.5}$$

$$\text{(全圧ベース): } m = \{AP_{t1} / (RT_1)^{0.5}\} [M_1 \gamma^{0.5} / \{1 + (\gamma - 1) M_1^2 / 2\}^{(\gamma + 1) / (2(\gamma - 1))}] \quad \text{-----(9b)}$$

$$= \{AP_{t2}/(RT_t)^{0.5}\} [M_2 \gamma^{0.5} / \{1 + (\gamma - 1) M_2^2/2\}^{(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)}]$$

質量流量(近似式) :  $m = [A^2 \rho_1 / \{k_{12} - (\gamma + 1)/(2\gamma) \log(P_2/P_1)\}]^{0.5} [(P_1^2 - P_2^2)/P_1]^{0.5}$  ----- (10)

ここで  $X_1=(x=x_1)$ から $(x=x_3)$ までの区間の累積圧損係数、但し  $x=x_1$ で  $M=M$  ( $x=x_3$ で  $M=1$  仮定)

$X_2=(x=x_2)$ から $(x=x_3)$ までの区間の累積圧損係数、但し  $x=x_2$ で  $M=M$  (同上)

$m$ =質量流量(kg/s)、 $M$ =マッハ数= $u/a$ 、 $a$ =流体音速 (m/s)= $(\gamma RT)^{0.5} = (\gamma P/\rho)^{0.5}$ 、

$P$ =静圧(N/m<sup>2</sup>)、 $P_t$ =全圧(N/m<sup>2</sup>)、 $T$ =静温度(K)=一定、 $T_t$ =全温度(K)、 $u$ =平均流速(m/s)

$\rho$ =密度(kg/m<sup>3</sup>)、 $\gamma$ =比熱比(-)、 $R$ =気体定数(J/kg K)、 $A$ =流路断面積(m<sup>2</sup>)= $\pi D^2/4$

$k_{12}$ =位置  $x_1 \sim x_2$ 間の圧損係数 [ $=\lambda(L_{12}/D) + \Sigma k_c$ ]

$\lambda$ =管摩擦係数( $\mu$ -ダイ線図)、 $k_c$ =構成要素の圧損係数(<0.25)、 $L_{12}$ =区間長さ(m)、

$D$ =管内径(m)、サフィックス 1、2  $\rightarrow$  位置 1( $x=x_1$ )、2( $x=x_2$ )の意、 $\log \rightarrow$ 自然対数

なお、下流の  $x_2$ 位置のマッハ数  $M_2$ は 1 以下とする。通常の管路では  $M_2 > 1$ (超音速)にはならない。

## 2. 計算手順 (例)

図 1 のモデルでは、位置 2 のマッハ数  $M_2$ が 1 以下(亜音速)であっても位置 2~位置 3(リザーバ入口)の間でチョークする恐れがあるので、更にこの区間でもチョークの有無をチェックする必要がある。そこで **図 2**のように位置 2 を管路端(リザーバ入口)位置 3 まで延ばして、区間 1~3 で関係式(1)~(10)を運用するようにする。この場合、関係式のサフィックス 2 は 3 に変わる。

**図 2**のモデルにおいて、次の 3 つの設計ケースが考えられる。

ケース A : 出入口の圧力が既知で、流量を求める場合

ケース B : 流量などが既知で、入口/出口圧力のいずれかを求める場合

ケース C : 流量及び入口圧力が既知で、管路中途の位置の圧力を求める場合

ケース A の場合は、**チャート 1**を参照のこと。

まず(10)式より流量(近似値)を求める。マッハ数が低く誤差も少ないと判断され場合は、これで終了。そうでなければ、まず近似流量を用いて(9)式から  $M_1, M_3$  を求め、それを(1)式に適用し略々成立するなら、近似流量 OK として終了する。もし(1)式  $k_{13}$  の誤差が大きいのなら、近似流量を微小補正して(1)式が略々成立するまで繰り返す。なおこの過程で  $M_3 > 1$  になるなら出口端即リザーバ入口でチョークしていることになるので  $M_3 = 1$  とおき、再度(1)式を用いて入口マッハ数  $M_1$  を求め、(9)式からより正確な流量を求める。また(2)式から出口端圧力  $P_3^*$  (>リザーバ圧力)を確認する。

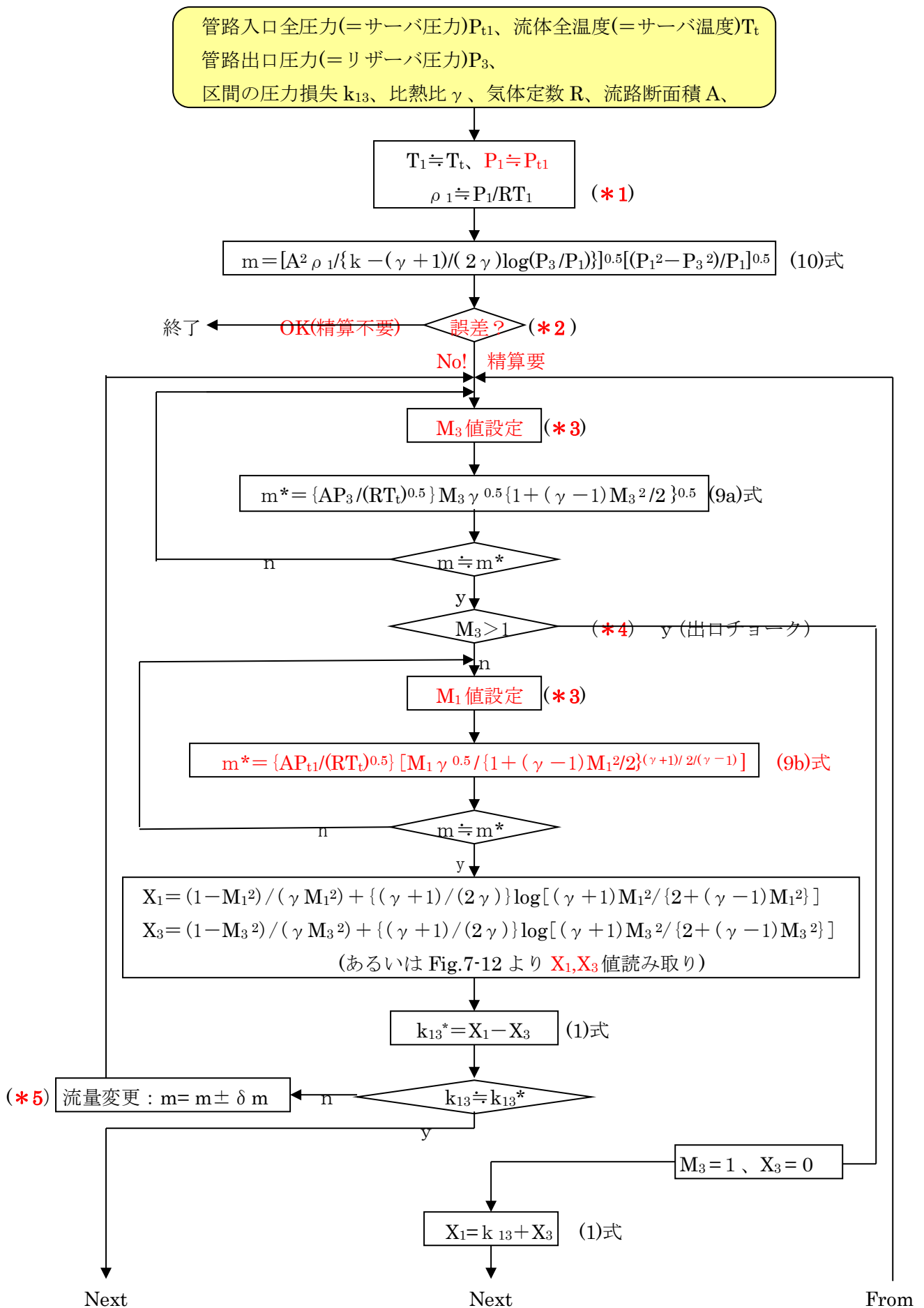
ケース B の場合は、**チャート 2**を参照のこと。

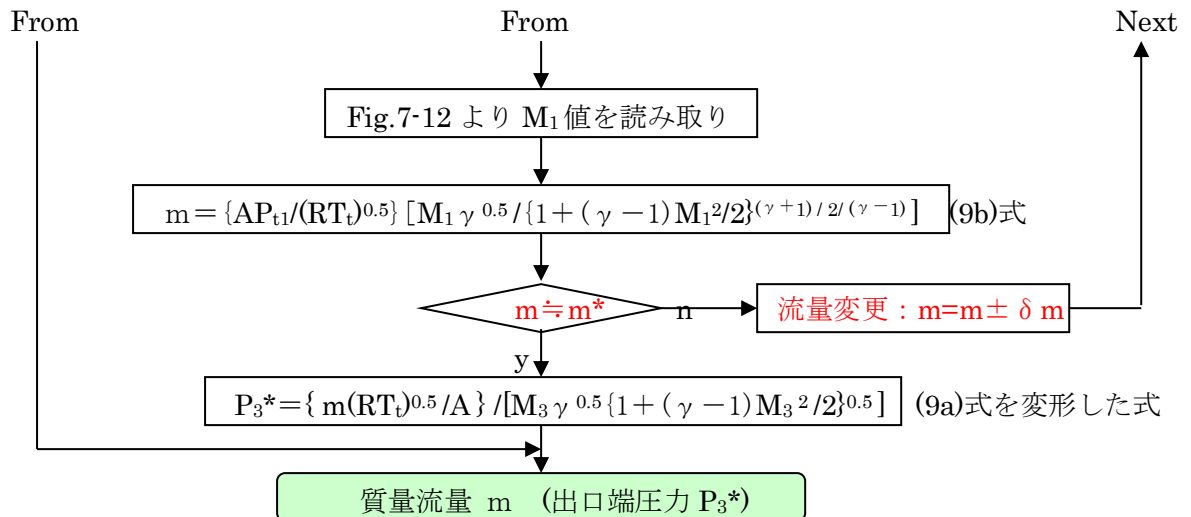
まず流量と入口/出口圧力から(9)式や(1)式を用いて出入口マッハ数を求め、(2)式から未知の各圧力を計算する。なお、この過程で  $M_3 > 1$  になるなら出口端でチョークしているので  $M_3 = 1$  とおき、再度(1)式から入口マッハ数を求め、(9)式や(2)式を用いて未知の各圧力などを求める。

ケース C の場合は、ケース B 実行の後で **区間 1~2** についてケース B と同様の手順をとって計算する。**チャート 3**を参照のこと。これは入口圧力を静圧で扱った場合で、全圧については割愛している。

なおチャート 1~3 では、入口圧力は静圧/全圧どちらを用いてもよい。例えばサーバ出口が入口位置になるなら、全圧(=タンク元圧)を用いて計算する。

チャート1 出入口の圧力が既知で、流量を求める場合

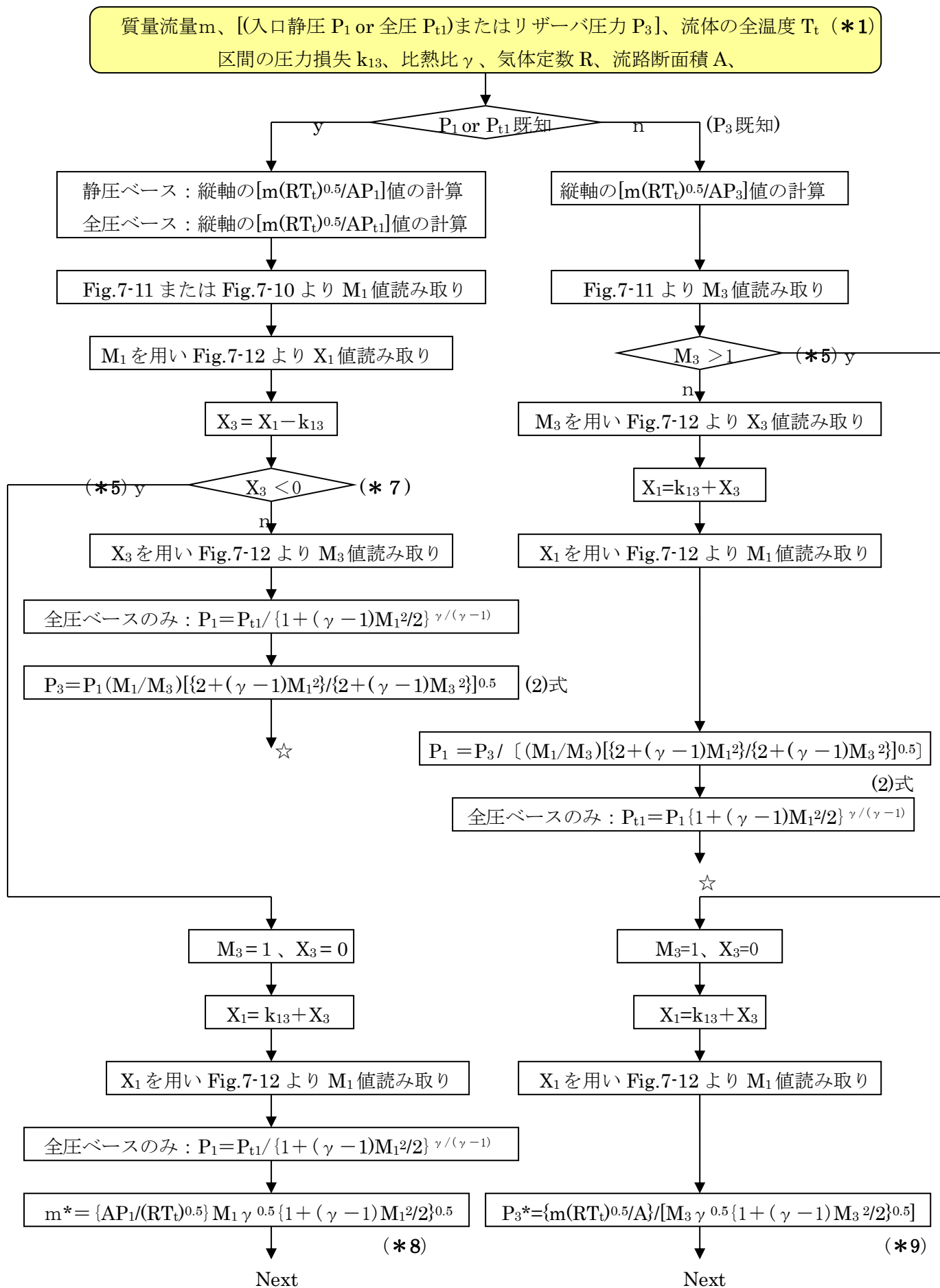


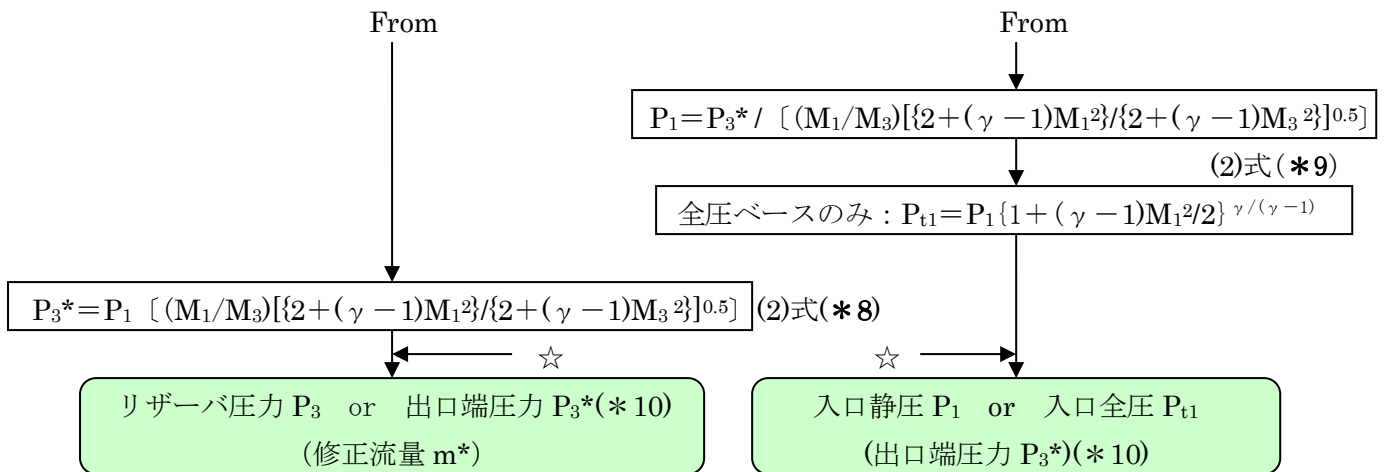


### 脚注

- (※1) 近似流量式(10)式は  $\rho_1 (=P_1/RT_1)$ 、 $P_1$  を含んでおり  $T_1, P_1$  がわからないと計算できない。  
 然るに全温度  $T_t$  と流体の静温度  $T$  の関係は  $T_t = T\{1 + (\gamma - 1)M^2/2\}$ 、全圧力  $P_t$  と静圧  $P$  の関係は  $P_t = P\{1 + (\gamma - 1)M^2/2\}^{\gamma/(\gamma-1)}$  であるから、マッハ数がわからないと静温度  $T_1, P_1$  は得られない。  
 初期段階ではまだマッハ数はわからないのでやむなく  $T_1 \doteq T_t$ 、 $P_1 \doteq P_{t1}$  にしている。この場合  $T_1$  の誤差は小さく  $P_1$  の誤差は大きくなるが、 $M=0.3$  程度までは  $P_1$  の誤差も極端ではないので  $\rho_1$ 、 $P_1$  の近似値としては十分ではないかと思う。
- (※2) 近似式(10)は、出口マッハ数がかかなり高くなっても大きな誤差はでないと思えるが、まだ十分確認していない。出口マッハ数がそれほど高くない見込みあるいはそれほど精度を要しない計算であれば、更に精算することなくここで打ち切れればよい。
- (※3) (9)式の{ }内の  $(\gamma - 1)M^2/2$  を無視して得られる式  $M = m(RT_t)^{0.5}/(\gamma^{0.5}AP)$  を用いて初期設定値を設定すれば、収束が速い。ただ、末端チョークでは誤差が大きいので？
- (※4) 管路端のマッハ数が1を越えるのは、リザーバ圧力  $P_3$  が低すぎるためと思われる。マッハ数が1以上の超音速を実現するには特殊なノズルが必要である。通常の管路では  $M_3=1$  で頭打ちになるので、 $M_3=1$  に **Fix** させて再度  $M_1$  を計算して  $M_1$ 、 $M_3$  から管路端圧力  $P_3^*$  を求める。因みに  $M_3 < 1$  の亜音速域では  $P_3^* = P_3$  である(ここではその積もりで当初、 $P_3$  を用いて計算している)。 しかしチョークして  $M_3=1$  になれば  $P_3^* > P_3$  になる。チョークするとこの部分で不連続になるからである。この辺を念頭に入れて計算すべきある。
- (※5) 当初は(10)式で計算した近似流量をもちいて(1)式が成立するかチェックするが、もし誤差が大きく我慢できないなら、微小量(±2%程度)を加減して計算を繰り返す。

チャート 2. 流量などが既知で、入口/出口圧力のいずれかを求める場合





脚注：

(\*1)(\*5) チャート1に同じ

(\*7)  $X_3$ の値が負になるのは圧損過剰で、管路途中で  $M_3 > 1$  即ちチョークしているため。

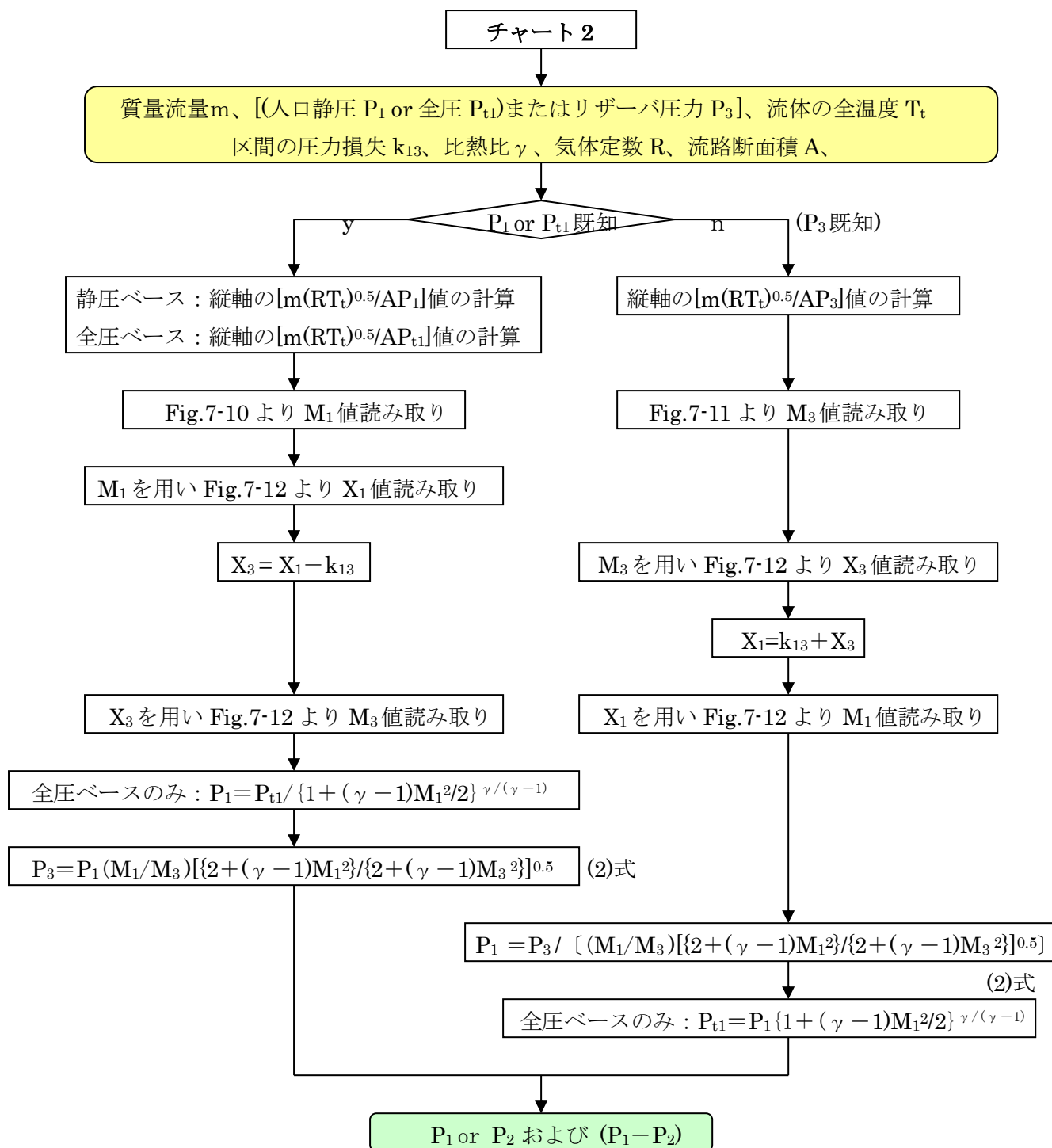
(\*8) 入口圧力が Fix された状態で、末端チョークであれば所定流量  $m$  はキープできないので、ここで (9)式を用いて修正流量  $m^*$  を計算する。なお  $P_3^*$  は  $M_1, M_3$  がわかっているので (2)式から計算する。

(\*9) 出口チョーク状態では出口端圧力  $P_3^*$  はリザーバ圧力  $P_3$  より高くなるが、入口圧力を上げること

で 所定流量  $m$  はキープできることが多いので、 $m$  を修正せずそのまま使用して (9)式から  $P_3^*$  を求め、更に (2)式から  $P_1$  を計算する。

(\*10) なおリザーバ圧力  $P_3$  は出口端圧力  $P_3^*$  より小さくする必要がある。要注意！

チャート 3. 流量及び入口圧力が既知で、管路中途の位置の圧力を求める場合



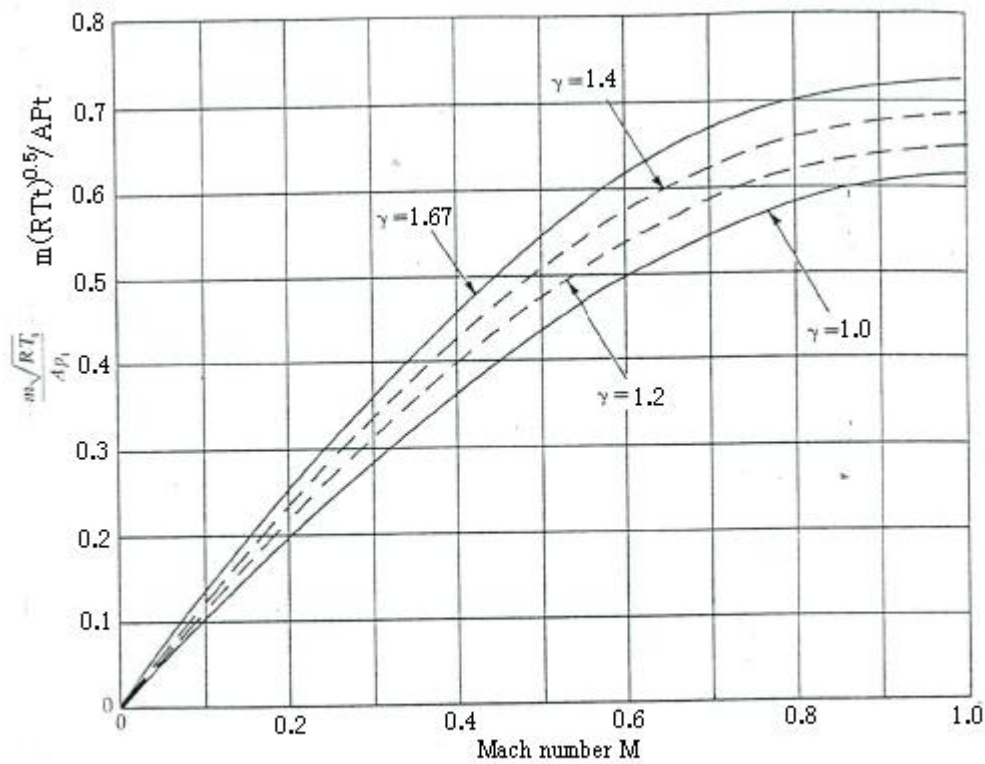


Fig.7-10 Mass flow function  $m(RTt)^{0.5}/APt$   
 D.S.Miller「Internal Flow Systems (2nd Edition)」より抜粋

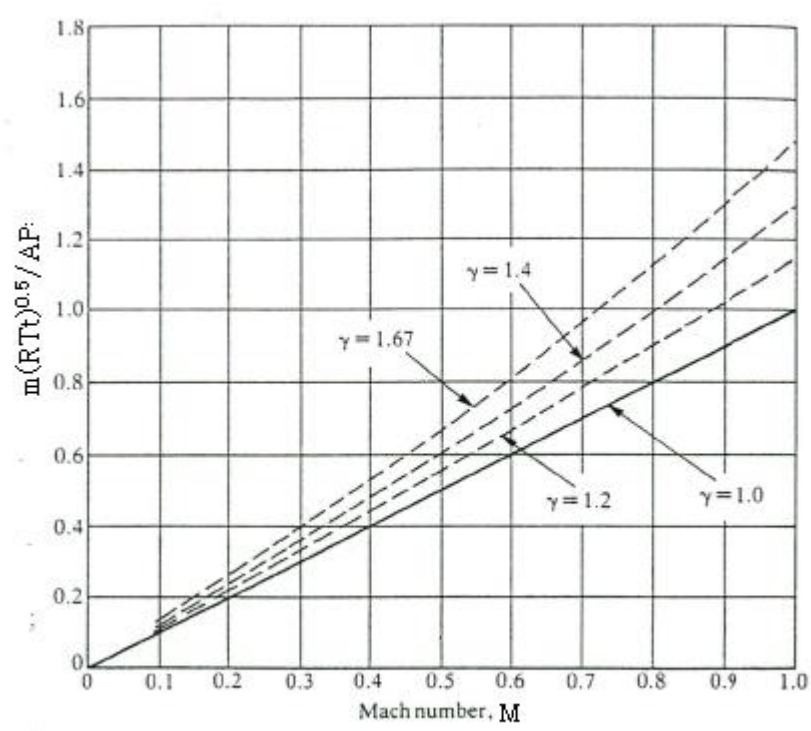


Fig.7.11 Mass flow function  $m(RTt)^{0.5}/AP=F_3(m)$   
 (D.S.Miller "Internal flow systems (second edition)" (BHRA)より抜粋)



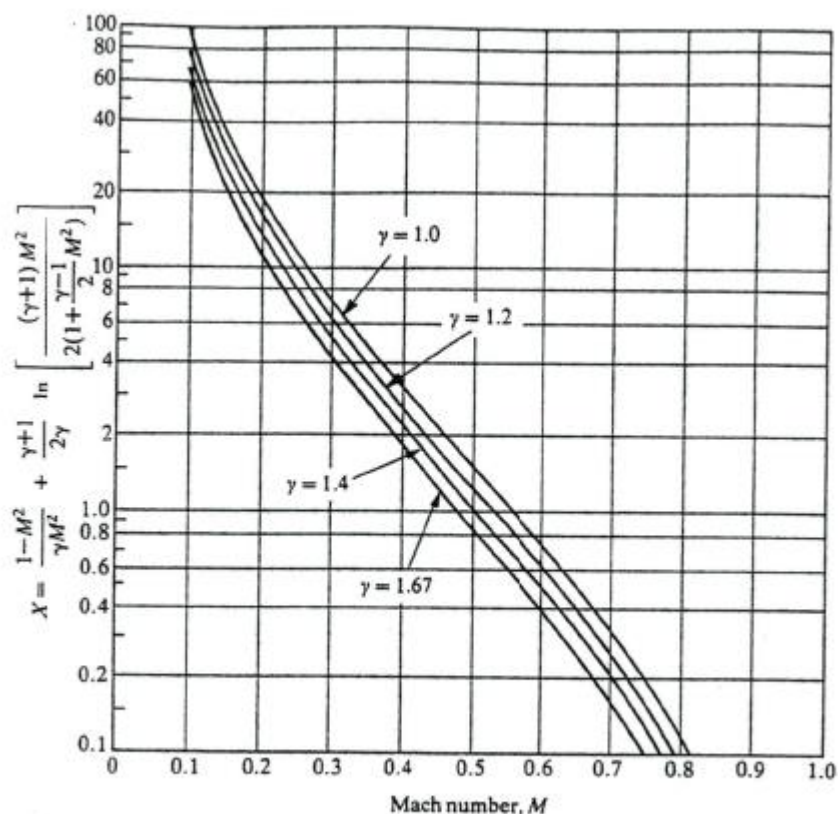


Fig. 7.12 Loss coefficient parameter X

(D.S.Miller "Internal flow systems (second edition)"(BHRA)より抜粋)

### 3. 例題

1. 内径 80mm の断熱ガスラインがある。流量 1.478 kg/s、入口静圧 1Mpa(10<sup>6</sup>N/m<sup>2</sup>)のとき、出口の静圧 P<sub>3</sub>およびマッハ数 M<sub>3</sub>を求めよ。なおラインの相当長さは 684mと 800mの 2 ケースとする。流体/圧損の条件は次の通り。

比熱比  $\gamma = 1.31$ 、気体定数  $R = 518\text{J/kgK}$ 、静止流体温度  $T_t = \sim 293\text{K}(120^\circ\text{C})$ 、

入口密度  $\rho_1 = 6.59\text{ kg/m}^3$ 、管摩擦損失係数  $\lambda = 0.008$ 、断面積  $A = 0.7853 \times 0.08^2 = 0.00503\text{m}^2$

圧力損失係数  $k_{13} = \lambda(L/D) + \sum k_c = 0.008 \times (684/0.08) + 0 = 68.4$  または  $0.008 \times (800/0.08) + 0 = 80$

(なお、この場合の L は曲管などの圧損を考慮した長さ[相当長さ]であるので  $k_c$  は考えない。)

\*\*\*\*\*

チャート 2 の手順を用いる。まず、684m 長さの場合。

Fig.7-11 を用いる。  $m(RT_t)^{0.5}/AP_1 = 1.478 \times (518 \times 293)^{0.5} / (0.00503 \times 10^6) = 0.1145$  であるから  $M_1 = 0.1$ 。

Fig.7-12 を用いると、 $M_1 = 0.1$  のとき  $X_1 = 70$  であるから、 $X_3 = X_1 - k_{13} = 70 - 68.4 = 1.6$ 、この場合

Fig.7-12 より  $M_3 = 0.457$ 、従って

$$\begin{aligned} P_3 &= P_1 (M_1/M_3) \{ [2 + (\gamma - 1)M_1^2] / [2 + (\gamma - 1)M_3^2] \}^{0.5} \\ &= 10^6 \times (0.1/0.457) \times \{ [2 + (1.31 - 1) \times 0.1^2] / [2 + (1.31 - 1) \times 0.457^2] \}^{0.5} \\ &= 0.2188 \times 10^6 \times (2.0031/2.06474)^{0.5} = 0.2155 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \quad (0.2155 \text{ MPa}) \end{aligned}$$

次に、800m の場合。  $X_3 = X_1 - k_{13} = 70 - 80 = -10 (< 0)$  であるから  $M_3 > 1$  と考え  $M_3 = 1$  とすると

$X_1 = k_{13} + X_3 = 80 + 0 = 80$ 。 Fig.7-12 より  $M_1 = 0.095$

$$\begin{aligned} m^* &= \{AP_1/(RT_1)^{0.5}\} M_1 \gamma^{0.5} \{1 + (\gamma - 1)M_1^2/2\}^{0.5} \\ &= \{0.00503 \times 10^6 / (518 \times 293)^{0.5}\} \times 0.095 \times 1.31^{0.5} \times \{1 + (1.31 - 1)0.095^2/2\}^{0.5} \\ &= 12.9 \times 0.1088 = \mathbf{1.403 \text{ kg/s}} \quad (< 1.478 \text{ kg/s}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3^* &= P_1 \left[ \frac{(M_1/M_3) \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}}{2 + (\gamma - 1)M_3^2} \right]^{0.5} \\ &= 10^6 \times \left[ \frac{(0.095/1) \{2 + (1.31 - 1) \times 0.095^2\}}{2 + (1.31 - 1) \times 1^2} \right]^{0.5} \\ &= 0.095 \times 10^6 \times (2.003/2.31)^{0.5} = 0.0885 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \quad (0.0885 \text{ MPa}) \end{aligned}$$

(かなり低圧になる。リザーバ圧力はこれより低くする必要あり。設備的に果たして成立するか？  
入口圧  $P_1$  のアップが必要では？)

2. 下図のように、1MPa/290Kのタンクから大気(101kPa)にエアを放出する内径100mmのラインがある。放出時の流量を求めよ。なお

比熱比  $\gamma = 1.4$ 、気体定数  $R = 287.1 \text{ J/kgK}$ 、断面積  $A = 0.7853 \times 0.1^2 = 0.00785 \text{ m}^2$

管摩擦損失係数  $\lambda = 0.016$ 、入口損失係数 0.05、曲管損失係数 0.16

全圧損失係数  $k_{13} = 0.016 \times 100 + 0.05 + 0.16 \times 2 = 1.97$

文献(1)引用

\*\*\*\*\*

チャート1による。 $P_{t1} = 10^6 \text{ N/m}^2$  (1MPa)の全圧ベースになる。 $P_1 \doteq P_{t1}$ 、 $T_1 \doteq T_{t1}$ とすれば

$$\rho_1 = P_1 / RT_1 = 10^6 / (287.1 \times 290) = 12 \text{ kg/m}^3$$

近似流量  $m$  は、

$$\begin{aligned} m &= [A^2 \rho_1 \{k - (\gamma + 1)/(2\gamma) \log(P_3/P_1)\}]^{0.5} [(P_1^2 - P_3^2)/P_1]^{0.5} \\ &= [0.00785^2 \times 12 \{1.97 - (1.4 + 1)/(2 \times 1.4) \log(0.101/1)\}]^{0.5} [(10^{12} - 0.0102 \times 10^{12})/10^6]^{0.5} \\ &= (0.000739/3.935)^{0.5} \times 994.9 = 13.6 \text{ kg/s} \end{aligned}$$

$M_3 = 1.8$  のとき  $m^*$  は 13.6 程度になるが、 $M_3 > 1$  なのでチョークする。そこで  $M_3 = 1$  とおく。

$X_1 = k_{13} + X_3 = 1.97 + 0 = 1.97$  Fig.7-12 より  $M_1 = 0.42$

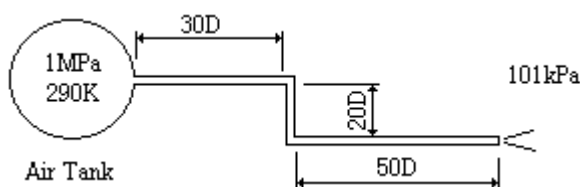
$$P_1 = P_{t1} \{1 + (\gamma - 1)M_1^2/2\}^{\gamma/(\gamma - 1)} = 10^6 \{1 + (1.4 - 1) \times 0.42^2\}^{3.5} = 0.886 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

チョーク流量  $m$  は、

$$\begin{aligned} m &= \{AP_1/(RT_1)^{0.5}\} [M_1 \gamma^{0.5} \{1 + (\gamma - 1)M_1^2/2\} \\ &= \{0.00785 \times 0.886 \times 10^6 / (287.1 \times 290)^{0.5}\} \times 0.42 \times 1.4^{0.5} \{1 + (1.4 - 1) \times 0.42^2/2\}^{0.5} \\ &= 24.1 \times 0.5056 = \mathbf{12.2 \text{ kg/s}} \quad (< \text{近似 } 13.6 \text{ --- } 12\% \text{ 誤差}) \end{aligned}$$

管路端の静圧  $P_3^*$  は、

$$\begin{aligned} P_3^* &= P_1 \left[ \frac{(M_1/M_3) \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}}{2 + (\gamma - 1)M_3^2} \right]^{0.5} \\ &= 0.886 \times 10^6 \times \left[ \frac{(0.42/1) \{2 + (1.4 - 1) \times 0.42^2\}}{2 + (1.4 - 1) \times 1^2} \right]^{0.5} \\ &= 0.346 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \quad (0.346 \text{ MPa}) \quad (> 101 \text{ kPa OK}) \end{aligned}$$



## 【 解 説 】

0. 断熱流れは外部との熱の授受のない流れである。高温のガス設備は大抵保温されているので、論外なく断熱流れに該当するが、流体の流れに比べ熱移動は大変緩慢であるから、断熱材でラギングされていなくても機器内部の流れやそれほど長距離でない管路では、むしろ断熱流れで扱った方がよい。さて断熱流れは、摩擦などによる粘性損失の扱いによって

粘性損失を無視する場合：等エントロピ流れ

粘性損失を考慮する場合：全エンタルピ一定の流れ(全温度一定の流れ)

の2つに分かれる。ノズル/ディフューザ/ベンチュリ/オリフィス/短い管路などは粘性損失のウェイトが比較的低いので等エントロピ的に扱い、効率といった形で若干、粘性効果を反映させることが多い。

一方、粘性損失の累積が大きな長い管路などは、**等エンタルピ的**に(即ち**全温度一定**)扱うことが多い。

全エンタルピ一定の流れのなかで **Fanno 流れ**は断面積が一定の流れである。これはもっとも単純なシチュエーションであり、設計的にも容易に扱える。

1. まず **Fanno 流れ**の理論背景について松尾先生のテキスト記述<sup>(1)</sup>をかみくたくような形で説明を試みる。

断熱流れに関する対数微分形<sup>(\*)1)</sup>の基礎式は次の通り。

$$\text{連続式：} \quad d\rho/\rho + du/u = 0 \quad \text{----- (A1)}$$

$$\text{運動式：} \quad du/u + \{1/(\gamma M^2)\}dP/P + (1/2)(\lambda/D)dx = 0 \quad (*2) \quad \text{----- (A2)}$$

$$\text{エネルギー式：} \quad dT/T + (\gamma - 1)M^2 du/u = 0 \quad (*3) \quad \text{----- (A3)}$$

$$\text{状態式：} \quad dP/P = d\rho/\rho + dT/T \quad \text{----- (A4)}$$

$$\text{マッハ式：} \quad dM/M = du/u - (1/2)dT/T \quad \text{----- (A5)}$$

$$\text{熱力第一則：} \quad dq = de + Pdv \quad (e = \text{内部エネルギー}, v = \text{比容積} = 1/\rho) \quad \text{----- (A6)}$$

Fanno 流れは、運動式(A2)に粘性損失項 $[(1/2)(\lambda/D)dx]$ が介在する所に特徴がある。

エネルギー式より  $dT/T = -(\gamma - 1)M^2 du/u$  これをマッハ式に代入して  $dT/T$  を消去すると

$$du/u = [2/\{2 + (\gamma - 1)M^2\}] dM/M \quad \text{----- (B1)}$$

また、連続式を用いて、

$$d\rho/\rho = -[2/\{2 + (\gamma - 1)M^2\}] dM/M \quad \text{----- (B2)}$$

エネルギー式に  $du/u$  を代入して

$$dT/T = -[2(\gamma - 1)M^2/\{2 + (\gamma - 1)M^2\}] dM/M \quad \text{----- (B3)}$$

状態式に  $d\rho/\rho$ 、 $dT/T$  を代入して

$$dP/P = -[\{2(\gamma - 1)M^2 + 2\}/\{2 + (\gamma - 1)M^2\}] dM/M \quad \text{----- (B4)}$$

次に  $dP_0/P_0$  を求める。等エントロピ関係式  $P_0/P = \{1 + (\gamma - 1)M^2/2\}^{\gamma/(\gamma - 1)}$  の対数微分をとると

$$dP_0/P_0 = dP/P + [2\gamma M/\{2 + (\gamma - 1)M^2/2\}] dM$$

(B4)式を代入して

$$dP_0/P_0 = [2(M^2 + 1)/\{2 + (\gamma - 1)M^2/2\}] dM/M \quad \text{----- (B5)}$$

熱力学第一則より  $ds = dq/T = (de + Pdv)/T$ 、ここで  $de = CvdT$ 、また状態式から  $P/T = R/v$  を用いて

$$ds = C_v(dT/T) + R dv/v$$

$v = 1/\rho \rightarrow dv/v = -d\rho/\rho$ 、また定容比熱  $C_v = R/(\gamma - 1)$  であるから

$$ds = C_v(dT/T) - R(d\rho/\rho) = R[-2M^2/\{2 + (\gamma - 1)M^2\} + 2/\{2 + (\gamma - 1)M^2\}]dM/M$$

$$\text{従って} \quad ds/R = [2(1 - M^2)/\{2 + (\gamma - 1)M^2\}]dM/M \quad \text{----- (B6)}$$

運動式を変形して

$$(1/2)(\lambda/D)dx = -du/u - 1/(\gamma M^2)dP/P$$

$$= -[2/\{2 + (\gamma - 1)M^2\}]dM/M + 1/(\gamma M^2)[\{2(\gamma - 1)M^2 + 2\}/\{2 + (\gamma - 1)M^2\}]dM/M$$

$$\text{よって} \quad (\lambda/D)dx = \{2/(\gamma M^2)\}[2(1 - M^2)/\{2 + (\gamma - 1)M^2\}]dM/M \quad \text{----- (B7)}$$

2. さて、(B7)式を変形すると次のようになる。

$$dM/dx = (\lambda/D)[\gamma M^3 \{2 + (\gamma - 1)M^2\}/\{4(1 - M^2)\}]$$

従って  $M \leq 1$  の時:  $dM/dx \geq 0$ 、 $M > 1$  の時:  $dM/dx < 0$

$M=1$  が変曲点になり  $M=1$  までは下流に行くにつれマッハ数は増加するが、 $M=1$  に到達すると、減少に転じる。もし管路中途に変曲点がくれば、管路断面の拡大がない限り流量はダウンして、変曲点は管路端に移動してそこでチョーク状態になると思われる。

当初  $x$  の位置 ( $M=M$ ) にあり  $x^+$  の位置で  $M=1$  に到達したとして、

$$\int (\lambda/D)dx = \int \{2/(\gamma M^2)\}[2(1 - M^2)/\{2 + (\gamma - 1)M^2\}]dM/M$$

積分の結果は次の通り。なお、 $L_{\max} = x^+ - x$

$$(\lambda/D)L_{\max} = (1 - M^2)/(\gamma M^2) + \{(\gamma + 1)/(2\gamma)\} \log[(\gamma + 1)M^2/\{2 + (\gamma - 1)M^2\}] \quad \text{----- (C1)}$$

$L_{\max}$  は任意位置からチョーク点までの最大可能な管路長さである。(C1)式から得られる  $M$  は、全長が  $L_{\max}$  の管路の末端でチョーク ( $M=1$ ) しているときの入口マッハ数である。管路断面積が一定の場合は常に末端でチョークし中途でチョークすることはないだろう。

(g)式についても任意位置の状態( $u$ )から末端のチョーク状態( $u^+$ )まで積分する。

$$\int du/u = \int [2/\{2 + (\gamma - 1)M^2\}]dM/M$$

$$\log(u^+/u) = (1/2)[\log\{1/(\gamma + 1)\} - \log[M^2/\{2 + (\gamma - 1)M^2\}]]$$

$$\text{従って} \quad u/u^+ = M[(\gamma + 1)/\{2 + (\gamma - 1)M^2\}]^{0.5} \quad \text{----- (C2)}$$

以下同様に (h) ~ (l) 式を積分して

$$\rho^+/\rho = M[(\gamma + 1)/\{2 + (\gamma - 1)M^2\}]^{0.5} \quad \text{----- (C3)}$$

$$T/T^+ = (\gamma + 1)/\{2 + (\gamma - 1)M^2\} \quad \text{----- (C4)}$$

$$(a/a^+)^2 = (\gamma + 1)/\{2 + (\gamma - 1)M^2\} \quad (a = \text{音速}) \quad \text{----- (C5)}$$

$$P/P^+ = (1/M)[(\gamma + 1)/\{2 + (\gamma - 1)M^2\}]^{0.5} \quad \text{----- (C6)}$$

$$P_0/P_0^+ = (1/M)[\{2 + (\gamma - 1)M^2\}/(\gamma + 1)]^{(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)} \quad \text{----- (C7)}$$

$$(s^+ - s)/R = \log [(1/M)[\{2 + (\gamma - 1)M^2\}/(\gamma + 1)]^{(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)}] \quad \text{----- (C8)}$$

3. (o) ~ (v) の結果を利用して管路の任意位置  $x_1$  から  $x_2$  までの変化は以下のようになる。

まず摩擦損失-マッハ数関係については

$$X_1 = (\lambda/D)(x^+ - x_1) = (1 - M_1^2)/(\gamma M_1^2) + \{(\gamma + 1)/(2\gamma)\} \log[(\gamma + 1)M_1^2/\{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}]$$

$$X_2 = (\lambda/D)(x^+ - x_2) = (1 - M_2^2)/(\gamma M_2^2) + \{(\gamma + 1)/(2\gamma)\} \log[(\gamma + 1)M_2^2/\{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}]$$

辺々差し引いて、

$$X_1 - X_2 = (\lambda/D)(x^+ - x_1) - (\lambda/D)(x^+ - x_2) = (\lambda/D)(x_2 - x_1) \quad \text{----- (D1-1)}$$

あるいは、

$$(\lambda/D)(x_2 - x_1) = (1/\gamma M_1^2)(1 - M_1^2/M_2^2) + \{(\gamma + 1)/(2\gamma)\} \log[(M_1/M_2)^2 \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}]$$

----- (D1-2)

次に流速関係については、

$$u_1/u^+ = M_1 [(\gamma + 1)/\{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}]^{0.5}, \quad u_2/u^+ = M_2 [(\gamma + 1)/\{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}]^{0.5}$$

辺々除して

$$u_2/u_1 = (M_2/M_1) [\{2 + (\gamma - 1)M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}]^{0.5} \quad \text{----- (D2)}$$

以下同様に(q)~(v)式を処置して、

$$\rho_2/\rho_1 = (M_1/M_2) [\{2 + (\gamma - 1)M_2^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}]^{0.5} \quad \text{----- (D3)}$$

$$T_2/T_1 = \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\} \quad \text{----- (D4)}$$

$$(a_2/a_1)^2 = \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\} \quad \text{----- (D5)}$$

$$P_2/P_1 = (M_1/M_2) [\{2 + (\gamma - 1)M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}]^{0.5} \quad \text{----- (D6)}$$

$$P_{o2}/P_{o1} = (M_1/M_2) [\{2 + (\gamma - 1)M_2^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}]^{(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)} \quad \text{----- (D7)}$$

$$(s_2 - s_1)/R = \log [(M_2/M_1) \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}]^{(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)} \quad \text{----- (D8)}$$

4. (D1-2)式あるいは(D1-2)式は区間  $x_1 \sim x_2$  の摩擦損失に伴うマッハ数の変化を示している。これらの式において左辺の  $(\lambda/D)(x_2 - x_1)$  は直管の摩擦による  $x_1 \sim x_2$  の圧力損失係数  $k_f$  を示しているが、本来は区間の粘性損失を表わす項であり、曲管や弁などの圧損失係数  $k_c$  (\*4) も含めることができるのでここで  $(\lambda/D)(x_2 - x_1) \rightarrow [k = k_f + \Sigma k_c]$  に置き換える。よって

$$X_1 - X_2 = k = (1/\gamma M_1^2)(1 - M_1^2/M_2^2) + \{(\gamma + 1)/(2\gamma)\} \log[(M_1/M_2)^2 \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}]$$

----- (D1-3)

さて、Fanno 流れの未知の流量を求める場合、例えば出入口圧力が既知なら(D1)式と(D6)式を連立して解けば、入口マッハ数  $M_1$  から  $m = \rho_1 a_1 M_1 A$  を用い質量流量  $m$  を得ることができる。しかしこれは反復計算を伴い面倒である。通常、左辺対数項に含まれる  $[(\gamma - 1)M_1^2]$ 、 $[(\gamma - 1)M_2^2]$  はマッハ数が 0.5 程度まではかなり小さく計算結果に大きな影響を及ぼさないので無視できる。この場合、容易に質量流量式を得ることができる。即ち

$$(D1-3) \text{ 式で } k = (1/\gamma M_1^2)(1 - M_1^2/M_2^2) + \{(\gamma + 1)/\gamma\} \log(M_1/M_2)$$

$$(D5) \text{ 式で } P_2/P_1 = (M_1/M_2)$$

$$\begin{aligned} \text{従って} \quad & \downarrow k = (1/\gamma M_1^2)(1 - P_2^2/P_1^2) + \{(\gamma + 1)/\gamma\} \log(P_2/P_1) \\ & \downarrow \gamma M_1^2 = \{1 - (P_2/P_1)^2\} / [k - (\gamma + 1)/(2\gamma) \log(P_2/P_1)] \end{aligned}$$

ここで  $\gamma M_1^2 = \gamma (u_1/a_1)^2 = \gamma u_1^2/(\gamma P_1/\rho_1) = \rho_1 u_1^2/P_1$  であるから

$$\downarrow \rho_1 u_1^2 = P_1 \{1 - (P_2/P_1)^2\} / [k - (\gamma + 1)/(2\gamma) \log(P_2/P_1)]$$

$$\downarrow u_1 = (P_1/\rho_1)^{0.5} \{1 - (P_2/P_1)^2\} / [k - (\gamma + 1)/(2\gamma) \log(P_2/P_1)]^{0.5}$$

$m = \rho_1 u_1 A$  であるから、

$$m = [A^2 \rho_1 / \{k - (\gamma + 1) / (2\gamma) \log(P_2/P_1)\}]^{0.5} [(P_1^2 - P_2^2) / P_1]^{0.5} \text{-----(E1)}$$

この式は、誤差がすくなくかなりのマッハ域まで使用できると思われる。

5. Fanno 流れの一般的な傾向については末尾の添付を参照のこと。

脚注：

(\*1) 対数微分法は、予め対数形にしてから微分する方法。例えば

$$\begin{array}{l} \text{連続の式： } \rho u A = \text{定数 } C \\ \log \rho + \log u + \log A = \log C \\ (d \log \rho / d \rho) (d \rho / dx) + (d \log u / du) (du / dx) + (d \log A / d A) (d A / dx) = 0 \\ d \rho / \rho + du / u + d A / A = 0 \\ \downarrow \\ \text{本ケース } d A = 0 \text{ なので } d \rho / \rho + du / u = 0 \end{array}$$

(\*2) 運動方程式：  $m(Du/Dt) = \Sigma F$

これに  $Du/Dt = \partial u / \partial t + u \partial u / \partial x$ 、 $\Sigma F = -A(\partial P / \partial x) \delta x - (1/2) \rho u^2 \pi D f \delta x$ 、 $m = \rho A \delta x$  を代入し

$$\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x + (1/\rho)(\partial P / \partial x) + (1/2) u^2 (4f/D) = 0$$

非定常項  $\partial u / \partial t$  を除外し

$$\partial u / u + \{1/(\rho u^2)\} \partial P + (1/2)(4f/D) \partial x = 0$$

ここで、 $\rho u^2 = \rho a^2 (u^2/a^2) = \rho a^2 M^2 = \rho (\gamma P/\rho) M^2 = \gamma P M^2$  であるから

$$du/u + \{1/(\gamma M^2)\} dP/P + (1/2)(\lambda/D) \partial x = 0$$

(\*3) 定常断熱流れのエネルギー式は  $h + (1/2)u^2 = \text{const}$  で、その微分形は  $dh + udu = 0$  になる。

然るに  $h = C_p T$  なので これを対数微分して  $dh/h = dT/T \rightarrow dh = h(dT/T)$ 。これを上記に代入して

$$h(dT/T) + udu = 0 \rightarrow dT/T + (u/h) du = 0 \rightarrow dT/T + (u^2/C_p T)(du/u) = 0$$

定圧比熱  $C_p = \gamma R / (\gamma - 1)$  であるから  $(u^2/C_p T) = (\gamma - 1)u^2/\gamma RT$ 。更に、音速  $a = (\gamma RT)^{0.5}$  で

あるから  $(\gamma - 1)(u^2/a^2) = (\gamma - 1)M^2$  になる。結果として上記の微分式は、

$$dT/T + (\gamma - 1)M^2(du/u) = 0 \quad r$$

(\*4) 要素の圧損係数  $k_c$  は非圧縮性流れの圧損係数(通常圧損係数)である。Miller のテキスト(2)によれば各  $k_c$  は夫々 0.25 以下。圧損係数が 0.25 を越える要素では、強固な剥離があつて流れの収縮(バナコントラクタ)部分ができてそこでチョークする可能性があり、別途これをチェックする必要があるからである。例えば、オリフィス、フローノズル、絞られた弁類が然り。全開近く開かれた弁は問題ないと思う。

添付－文献(1)より抜粋

表 6・1 ファノー流れの諸量の変化。

流れの状態		亜音速流れ $M < 1$	超音速流れ $M > 1$
流れの諸量			
速 度	$u$	増 加	減 少
マ ッ ハ 数	$M$	増 加	減 少
圧 力	$p$	減 少	増 加
密 度	$\rho$	減 少	増 加
温 度	$T$	減 少	増 加
全 圧	$p_0$	減 少	減 少
全 温	$T_0$	一 定	一 定

摩擦によるチョーク

式(6・37)  $(4f/D)dx = 2/(\gamma M^2) [2(1-M^2)/(1-M^2+2)] dM/M$  より、 $M < 1$ のとき、 $dM/dx > 0$ 、すなわち亜音速流れではマッハ数は摩擦によって流れ方向に増加する。これは管摩擦によって壁面境界層が流れ方向に厚くなり、流れの有効面積が減少することから理解できよう。また、 $M > 1$ の超音速流れでは、 $dM/dx < 0$ で、マッハ数は流れ方向に減少して1に近づく。速度の変化  $du$  は、式(6・31)より  $dM$  と同符号で、式(6・31)～式(6・33)より  $dp$ 、 $dT$ 、 $dp$  は  $dM$  と符号が異なる。以上の流れの諸量の変化をまとめると、表 6・1 のようになる。

引用文献：

- (1) 松尾「圧縮性流体力学－内部流れの理論と解析」(理工学社) 6. 摩擦を伴う一次元定常断熱流れ
- (2) D.S.Miller「Internal flow systems(second edition)」7.Compressible Flow