

【整番】 FE-02-TM-010	【標題】 断面積一定の等温流れ計算に関する情報
分類：流れ(圧縮性流れ)/種別：技術メモ	作成年月：H19.7/改訂：Ver0.0 (H19.7) 作成者：N.Miyamoto

全 12 枚

一次元圧縮性流れの代表的パターンには次のようなものがある。

	外部との熱の授受	内部発熱/外部仕事	摩擦・渦損失	流れ中の抵抗
等エントロピ流れ (Isentropic flow)	×	×	×	×
全エンタルピー一定流れ(Fanno flow 等)	×	×	○	○
レイリー流れ (Rayleigh flow)	○	×	×	×
等温流れ (Isothermal flow)	○	×	○	○

ガスパイプラインのような断熱されない長い管路は、管表面から外気との熱の授受があつて殆ど管内の温度が外気温度と変わらないので、温度一定の流れ即ち等温流れ(Isothermal flow)と見なされる。

ここでは、流路断面積が変わらない等温流れを取りあげその主要な計算情報を整理した。以下。

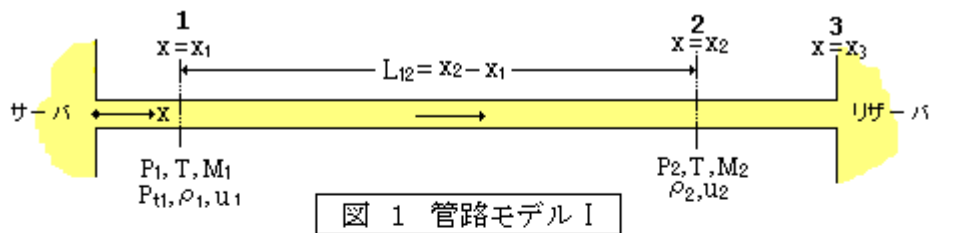


図 1 管路モデル I

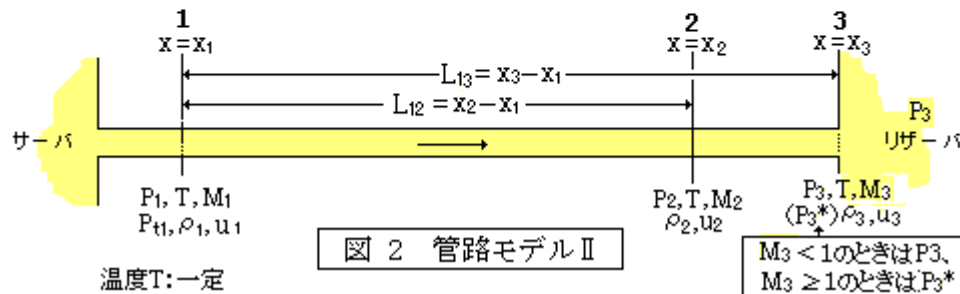


図 2 管路モデル II

$M_3 < 1$ のときは P_3 、 $M_3 \geq 1$ のときは P_3^*

温度T:一定

1. 位置 1 ~ 2 の間の諸関係式 (図 1 に対し)

(1) 全マッハ域については下記のようなのである。

$$\text{質量流量-静圧関係: } m = [A^2 \rho_1 / \{k_{12} + 2 \log(P_1/P_2)\}]^{0.5} [(P_1^2 - P_2^2)/P_1]^{0.5} \quad \text{-----(1a)}$$

$$m = [A^2 \rho_2 / \{k_{12} + 2 \log(P_1/P_2)\}]^{0.5} [(P_1^2 - P_2^2)/P_2]^{0.5} \quad \text{-----(1b)}$$

$$m = [A/(RT)^{0.5}] [(P_1^2 - P_2^2) / \{k_{12} + 2 \log(P_1/P_2)\}]^{0.5} \quad \text{-----(1c)}$$

$$\text{圧損係数-マッハ数関係: } k_{12} = (M_2^2 - M_1^2) / (\gamma M_1^2 M_2^2) + 2 \log(M_1/M_2) \quad \text{-----(2)}$$

$$\text{静圧/密度-マッハ数関係: } (P_2/P_1) = (\rho_2/\rho_1) = (u_1/u_2) = (M_1/M_2) \quad \text{-----(3)}$$

$$\text{全圧-マッハ数関係: } (P_{02}/P_{01}) = (M_1/M_2) \{ \gamma (\gamma - 1) M_2^2 + 2 \gamma \} / \{ \gamma (\gamma - 1) M_1^2 + 2 \gamma \}^{\gamma/(\gamma - 1)} \quad \text{-----(4)}$$

$$\text{全温-マッハ数関係: } (T_{02}/T_{01}) = \{ \gamma (\gamma - 1) M_2^2 + 2 \gamma \} / \{ \gamma (\gamma - 1) M_1^2 + 2 \gamma \} \quad \text{-----(5)}$$

$$\text{一般関係(静圧ベース): } m(RT_t)^{0.5} / (AP_1) = M_1 \gamma^{0.5} \{ 1 + (\gamma - 1) M_1^2/2 \}^{0.5} \quad \text{-----(6a)}$$

$$m(RT_t)^{0.5} / (AP_2) = M_2 \gamma^{0.5} \{ 1 + (\gamma - 1) M_2^2/2 \}^{0.5} \quad \text{-----(6b)}$$

$$\text{一般関係(全圧ベース): } m = \{ AP_{t1} / (RT_t)^{0.5} \} [M_1 \gamma^{0.5} / \{ 1 + (\gamma - 1) M_1^2/2 \}^{(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)}] \quad \text{-----(6c)}$$

$$m = \{ AP_{t2} / (RT_t)^{0.5} \} [M_2 \gamma^{0.5} / \{ 1 + (\gamma - 1) M_2^2/2 \}^{(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)}] \quad \text{-----(6d)}$$

ここで m = 質量流量 (kg/s)、 R = 気体定数 (J/kg K)、 M = マッハ数 = u/a 、
 a = 音速 (m/s) = $(\gamma RT)^{0.5} = (\gamma P/\rho)^{0.5}$ 、
 P = 静圧 (N/m²)、 P_t = 全圧 (N/m²)、 T = 静温度 (K) = 一定、 T_t = 全温度 (K)、 u = 平均流速 (m/s)
 k_{12} = 位置 $x_1 \sim x_2$ 間の圧損係数 [= $\lambda (L_{12}/D) + \Sigma k_c$]
 λ = 管摩擦係数 (λ -ダイ線図)、 k_c = 構成要素の圧損係数 (< 0.25)、 L_{12} = 区間長さ (m)、
 γ = 比熱比 (-)、 ρ = 密度 (kg/m³)、 A = 流路断面積 (m²) = $\pi D^2/4$ 、 D = 管内径 (m)
 サフィックス 1、2 → 夫々 x_1 、 x_2 の意、 \log → 自然対数

なお、下流の x_2 位置のマッハ数 M_2 は $[1/\gamma^{0.5}]$ 以下 即ち $M_2 \leq 1/\gamma^{0.5}$ とする。通常の管路ではチョークして $M_2 > 1/\gamma^{0.5}$ にはならない。

(2) 低マッハ域 (下流マッハ数 $M_2 \leq 0.2$) については、次の式も適用できる。

$$\text{質量流量-静圧関係: } (P_1/P_2)^2 = k_{12} \{m (RT_t)^{0.5} / (AP_2)\}^2 + 1 \quad \text{----- (7a)}$$

$$(P_1/P_2)^2 = 1 / [1 - k_{12} \{m (RT_t)^{0.5} / (AP_1)\}^2] \quad \text{----- (7b)}$$

$$m = \{A / (RT_t)^{0.5}\} \{(P_1^2 - P_2^2) / k_{12}\}^{0.5} \quad \text{----- (8)}$$

ここで、記号は上記(1)に同じ。ただ T_t は全温度であるが、 $T_t \doteq T$ なので静温度 T を用いてもよい。

2. 計算手順 (例)

図1のモデルでは、位置2のマッハ数 M_2 が $1/\gamma^{0.5}$ 以下であっても位置2～位置3(リザーバ入口)の間でチョークする恐れがあるので、更にこの区間でもチョークの有無をチェックする必要がある。しかし設計上、これは面倒なので、図2のように位置2をリザーバ入口位置3まで延ばして、区間1～3の間で、前記の関係式(1)～(8)を運用する(なお、関係式のサフィックス2は3に変わる。念為)。

図2のモデルにおいて、次の3つの設計ケースが考えられる。

ケースA: 出入口の圧力が既知で、流量を求める場合

ケースB: 流量などが既知で、入口/出口圧力のいずれかを求める場合

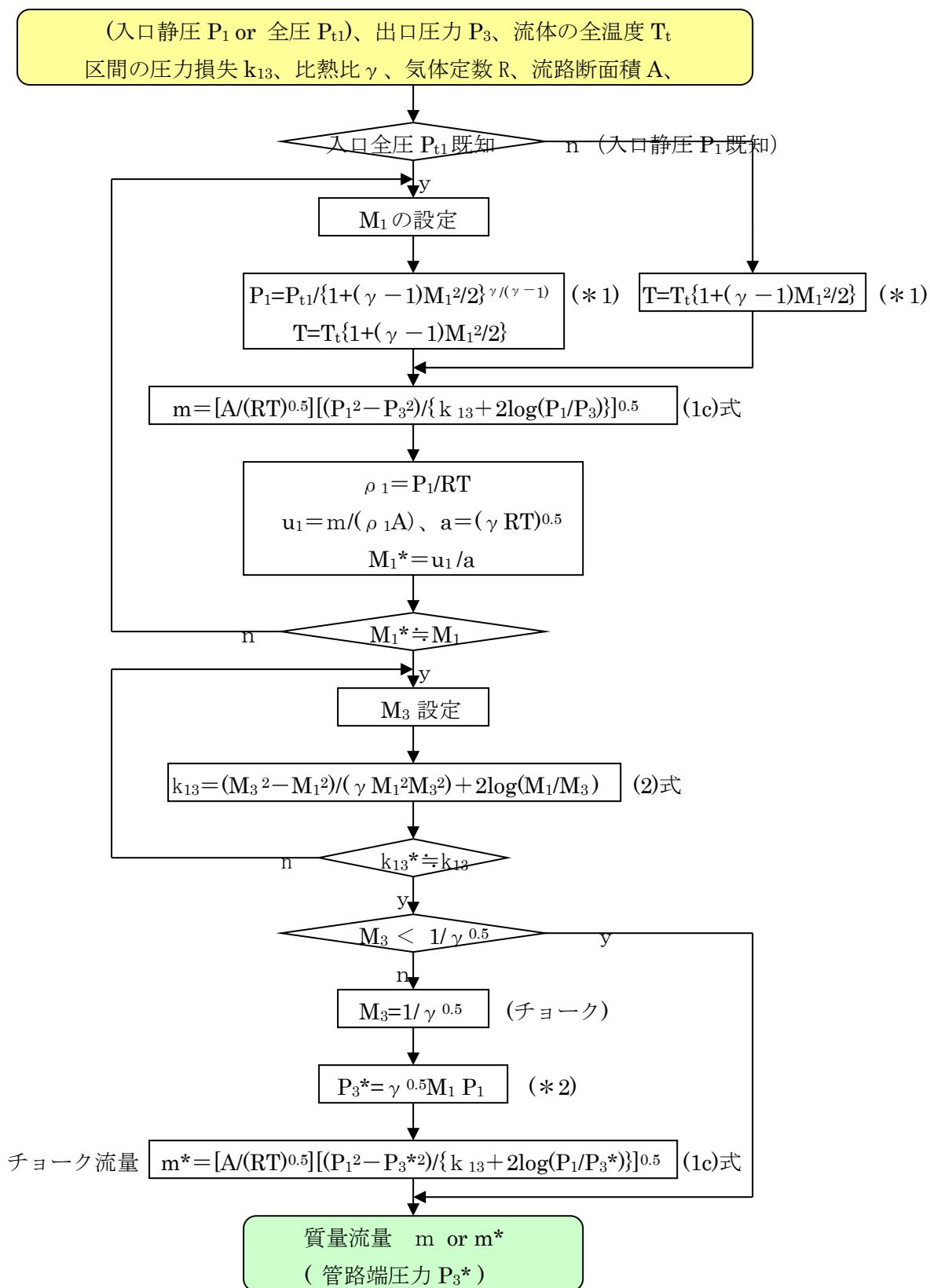
ケースC: 流量及び入口圧力が既知で、管路中途の位置の圧力を求める場合

ケースAの場合はチャート1による。この場合、流量 m とマッハ数 M_3 を、(1c)式および(2)式あるいは圧縮性流れの一般式を用いて反復して求める。更に出口マッハ数 M_3 が限界($1/\gamma^{0.5}$)を越えるときはチョーク流量を求め m を修正する。

ケースBの場合はチャート2による。この場合、まず低マッハ域を想定して(7a),(7b)式から未知の出口/入口の圧力 P_3, P_1 を求める。もし出口マッハ数 M_3 が 0.2 を越えるなら、(2)式を反復使用して未知のマッハ数を求め、これを用いて(3)式から未知の圧力を得る。更に出口マッハ数 M_3 が限界($1/\gamma^{0.5}$)を越えるときは流量や圧力の修正を行う。

ケースCの場合はチャート3による。ケースB実行の後で、区間1～2についてケースBに似た手順をとって計算する。

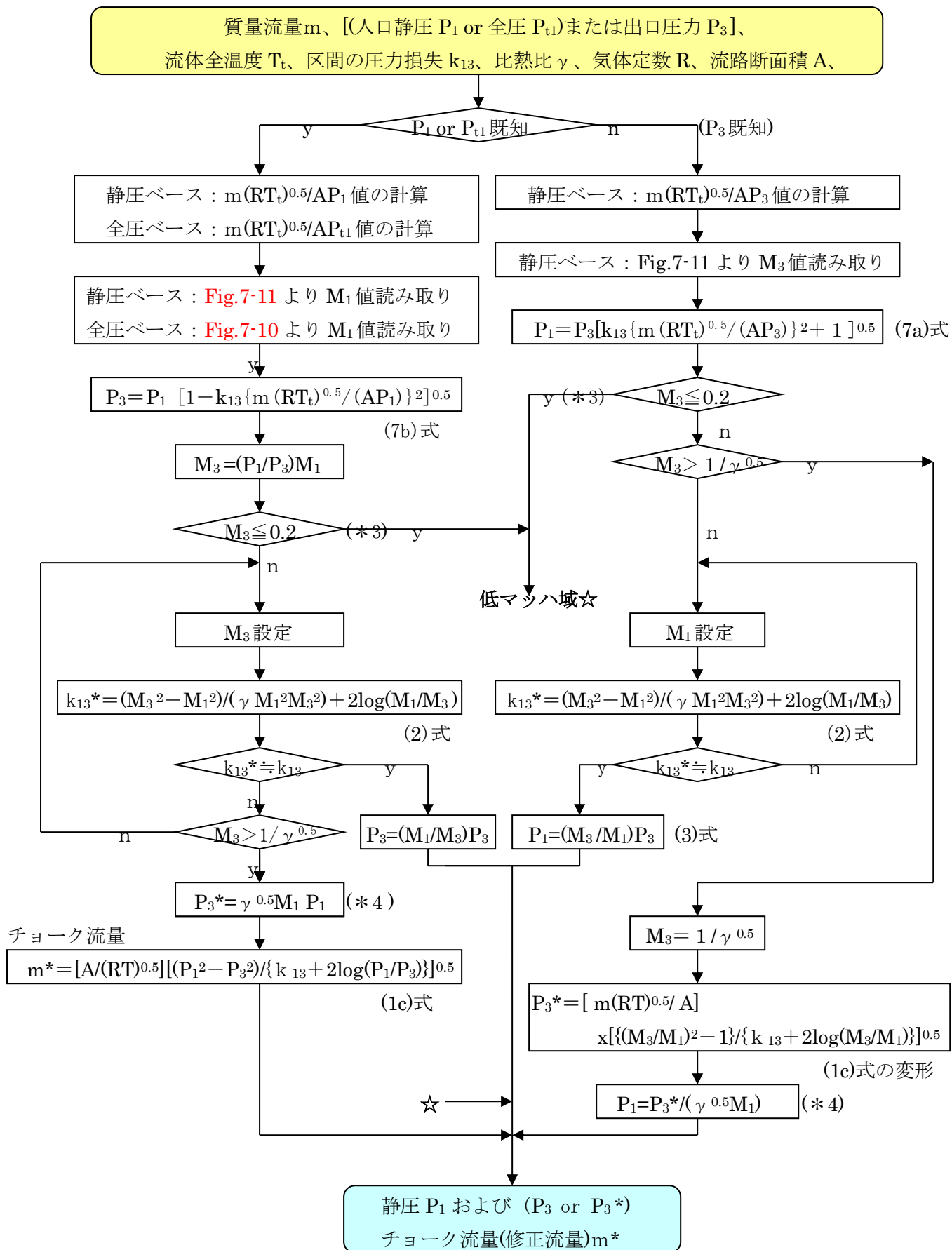
チャート 1. 出入口の圧力が既知で、流量を求める場合



(*1) これらの式は圧縮性流れ全般に適用される全圧－静圧、全温－静温関係式である。

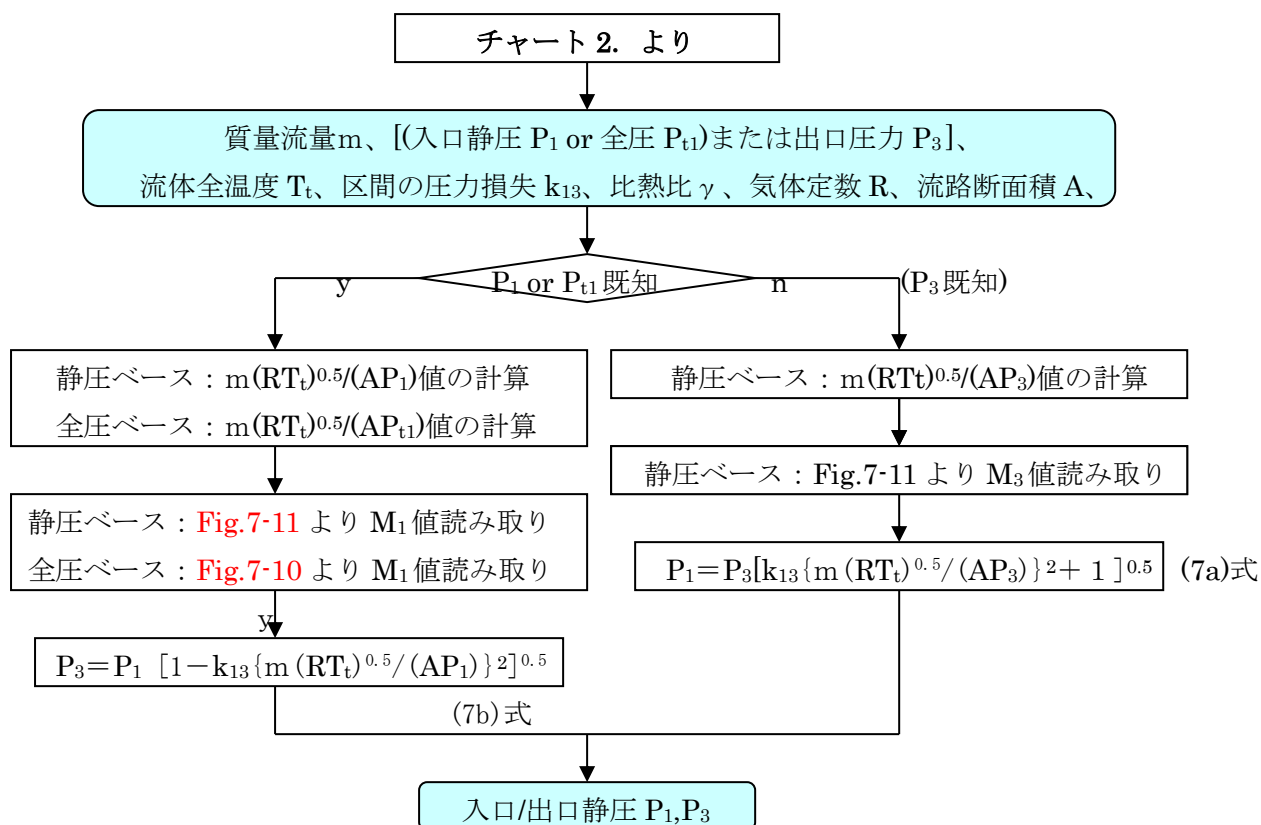
(*2) (3)式 $[(P_3/P_1) = (M_1/M_3)]$ において、 $M_3 = 1/\gamma^{0.5}$ とにおいて変形したもの。

チャート2. 流量などが既知で、入口/出口圧力のいずれを求める場合



- (*3) 出口マッハ数 M_2 が 0.2 以下を低マッハ域とする。低マッハ域では(7a,b)式により圧力を求める。
 (*4) (3)式の $[(P_3/P_1)=(M_1/M_3)]$ において、 $M_3=1/\gamma^{0.5}$ とにおいて変形したもの。

チャート 3. 流量及び入口圧力が既知で、管路中途の位置の圧力を求める場合



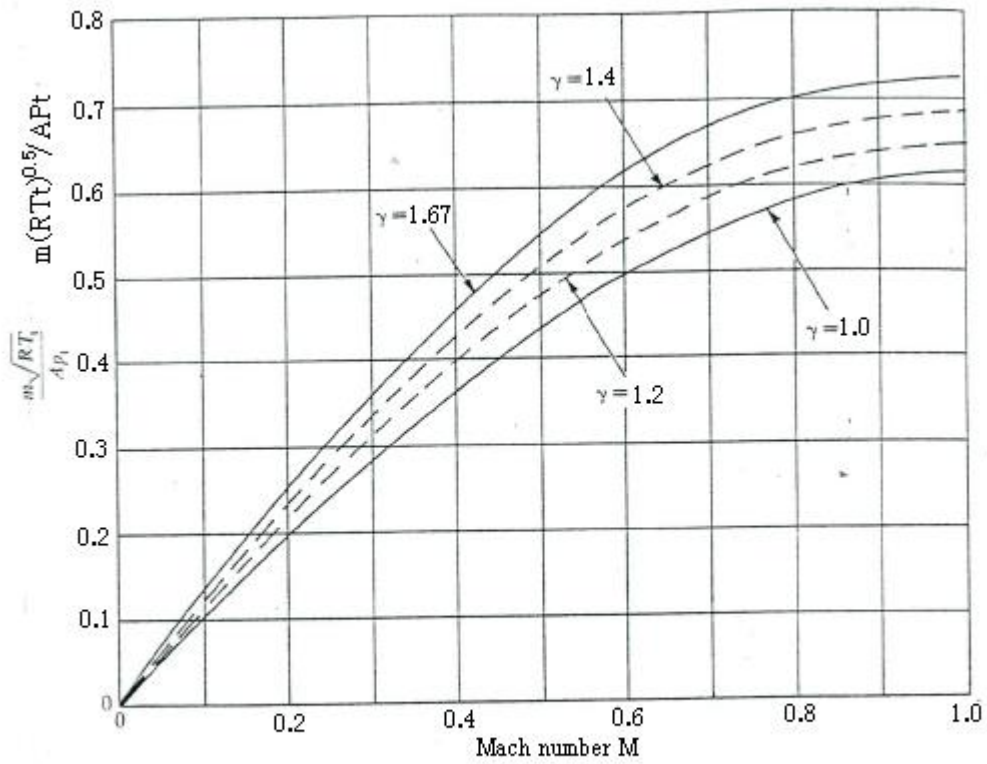


Fig.7-10 Mass flow function $m(RTt)^{0.5}/APt$
D.S.Miller「Internal Flow Systems (2nd Edition)」より抜粋

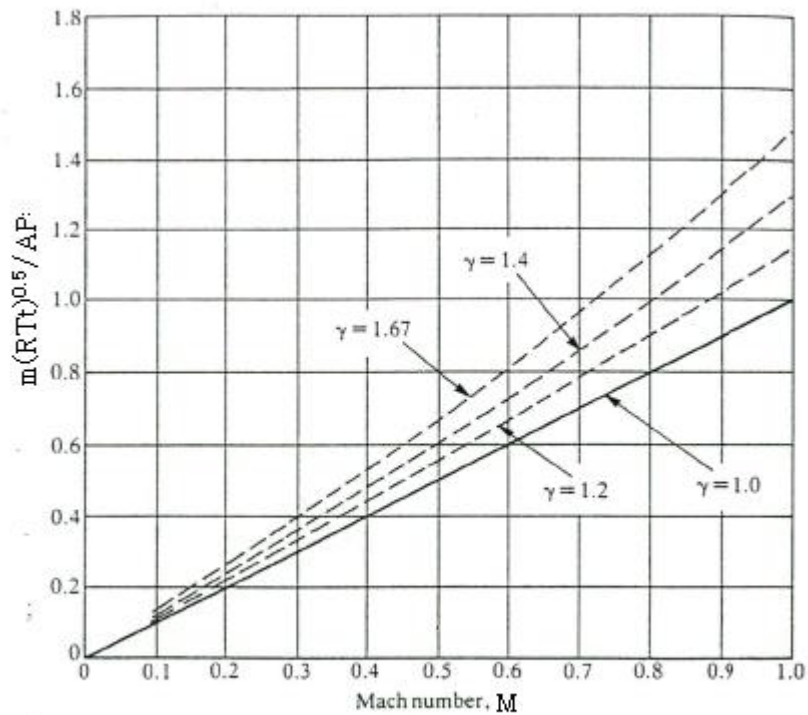


Fig.7.11 Mass flow function $m(RTt)^{0.5}/AP = F_3(m)$
(D.S.Miller "Internal flow systems (second edition)" (BHRA)より抜粋)

3. 例題

内径 80mm 相当長さ 684m の天然ガスラインがある。流量 1.478 kg/s、入口静圧 1MPa (10⁶N/m²) のとき、出口の静圧 P₃ およびマッハ数 M₃ を求めよ。なお

比熱比 $\gamma = 1.31$ 、気体定数 $R = 518 \text{ J/kgK}$ 、静止流体温度 $T_t \sim 293 \text{ K} (20^\circ \text{C})$ 、

入口密度 $\rho_1 = 6.59 \text{ kg/m}^3$ 、管摩擦損失係数 $\lambda = 0.008$ 、断面積 $A = 0.7853 \times 0.08^2 = 0.00503 \text{ m}^2$

圧力損失係数 $k_{13} = \lambda (L/D) + \Sigma k_c = 0.008 \times (684/0.08) + 0 = 68.4$

(なお、この場合の L は曲管などの圧損を考慮した長さ [相当長さ] であるので k_c は考えない。)

チャート 2 の手順を用いる。入口流速は多分 $g \ 40 \text{ m/s}$ 程度とやや高めで、径のわりに管長さが長いので出口マッハ数が 0.2 を越える可能性が大きい。一応、低マッハ域の式で計算してみる。

$$m(RT_t)^{0.5}/(AP_1) = 1.478 \times (518 \times 293)^{0.5} / (0.00503 \times 10^6) = 0.1147. \quad \text{Fig. 7-11 より } M_1 = 0.1$$

$$P_3 = P_1 [1 - k_{13} \{m(RT_t)^{0.5}/(AP_1)\}^2]^{0.5} = 10^6 \times [1 - 68.4 \times \{1.478(518 \times 293)^{0.5} / (0.00503 \times 10^6)\}^2]^{0.5} \\ = 10^6 \times [1 - 68.4 \times (575.8/5030)^2]^{0.5} = 0.322 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \quad (0.322 \text{ MPa})$$

よって $M_3 = (P_1/P_3)M_1 = (1/0.322) \times 0.1 = 0.31$ 、 $M_3 > 0.2$ なので、低マッハ域の式は適切でない。全マッハ域の式による。

ここで $M_3 = 0.38$ を仮定すると、全マッハ域の関係式より

$$k_{13}^* = (M_3^2 - M_1^2) / (\gamma M_1^2 M_3^2) + 2 \log(M_1/M_3) = (0.38^2 - 0.1^2) / (1.31 \times 0.1^2 \times 0.38^2) + 2 \log(0.1/0.38) \\ = 71.05 - 2.67 = 68.4 \quad \longleftarrow K_{13} \text{ と一致}$$

$$P_3 = (M_1/M_3)P_1 = (0.1/0.38) \times 1 = 0.263 \text{ MPa}$$

従って 出口マッハ数 $M_3 = 0.38$ 、出口圧力 $P_3 = 0.263 \text{ MPa}$ 、差圧 $(P_1 - P_3) = 0.737 \text{ MPa}$

念のため、 $P_1 = 10^6$ 、 $P_2 = 0.263 \times 10^6 \text{ N/m}^2 (\text{Pa})$ の出入口条件で流量を確認する。チャート 1 より、

$$m = [A/(RT)^{0.5}] [(P_1^2 - P_3^2) / \{k_{13} + 2 \log(P_1/P_3)\}]^{0.5} \\ = [0.00503 / (518 \times 293)^{0.5}] \times \{[(10^6)^2 - (0.263 \times 10^6)^2] / \{68.4 + 2 \log(1/0.263)\}\}^{0.5} \\ = 1.291 \times 10^{-5} \times [0.9308 \times 10^{12} / 71]^{0.5} = 1.478 \text{ kg/s}$$

これは、出題の条件に合致するので OK

【 解説 】

0. 等温流れは断熱無しで外部との熱の授受が自由な流れである。故に、断熱材でラギングされていない機器配管は全て然りという理解に陥り易いが、外部との熱の授受自身は、高速の気体の流動に比べてはるかに緩慢であるから、狭いプラントエリアで起きている現象の多くは、むしろ熱移動とは縁が薄くどちらかと言えば断熱流れに近いと思われる。また圧力損失項が軽微であれば等エントロピ的でもある。事実、プラントの気体流れは、断熱の有無によらず断熱流れ/等エントロピ流れで扱われていることが多い。筆者の理解では、十分に近い放熱/吸熱が可能な長距離のガス輸送管において等温流れは成立するような気がする。具体的にはネットワーク状に工場内に張り巡らしたユーティリティ系の空気配管/ガス配管あるいはガスパイプラインが対象になるのだろう。この辺りもっと見識を積む必要があるのだろうが、本 TS はとりあえず、この程度の先入的な認識からスタートしている。

因みに、等温流れの特徴として次のようなものが挙げられる。

- ・ 静温度の変化がないので**密度変化は圧力変化に単純比例する**。
- ・ ニュートンの音速であるため、音速が通常より低く**比較的低い速度でチョークする**。

1. 等温流れの理論背景については、種々のテキストで説明されているが、過不足/濃淡が多い。そこでここでは敢えて松尾先生のテキスト記述⁽¹⁾をかみくだくような形で説明を試みる。

等温流れに関する対数微分形^(*)1)の基礎式は次の通り。

$$\text{連続式: } d\rho/\rho + du/u = 0 \quad \text{----- (a)}$$

$$\text{運動式: } du/u + 1/(\gamma M^2)dP/P + (1/2)(\lambda/D)dx = 0 \quad \text{(*)2) ----- (b)}$$

$$\text{状態式: } dP/P = d\rho/\rho + dT/T \quad \text{----- (c)}$$

$$\text{マッハ式: } dM/M = du/u - (1/2)dT/T \quad \text{----- (d)}$$

等温流れでは静温度の変化がなく $dT=0$ であるから、状態式/マッハ式において $dT=0$ とおくと $dP/P = d\rho/\rho$ 、 $dM/M = du/u$ 、これに(a)式を用いて、

$$dP/P = d\rho/\rho = -du/u = -dM/M \quad \text{----- (e)}$$

[圧力 P / 密度 $\rho \rightarrow$ 減少、流速 u / マッハ数 $M \rightarrow$ 増加]

(b)式に(e)式を用いて

$$dM/M - 1/(\gamma M^2)dM/M + (1/2)(\lambda/D)dx = 0$$



$$(\lambda/D)dx = \{2(1 - \gamma M^2)/(\gamma M^2)\}(dM/M) \quad \text{----- (f)}$$

次に、局所淀み点での**等エントロピ的せき止め**を想定して

$$P_0/P = (T_0/T)^{\gamma/(\gamma-1)} = \{1 + (\gamma-1)M^2/2\}^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$P_0 = P \{1 + (\gamma-1)M^2/2\}^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\log P_0 = \log P + \{\gamma/(\gamma-1)\} \log\{1 + (\gamma-1)M^2/2\}$$

微分して $dP_0/P_0 = dP/P + \{\gamma/(\gamma-1)\}(\gamma-1)M/\{1 + (\gamma-1)M^2/2\}dM = dP/P + [2\gamma M/\{2 + (\gamma-1)M^2\}]dM$

(e)式より $dP/P = -dM/M$ であるから

$$dP_0/P_0 = -dM/M + [2\gamma M/\{2 + (\gamma-1)M^2\}]dM$$

$$\text{故に } dP_0/P_0 = [2\gamma M/\{2 + (\gamma-1)M^2\} - 1/M]dM \quad \text{----- (g)}$$

次に、全温度は、 $T_0 = T\{1 + (\gamma-1)M^2/2\}$ であるから

$$\log T_0 = \log T + \log\{1 + (\gamma-1)M^2/2\}$$

微分して $dT_0/T_0 = dT/T + [(\gamma-1)M/\{1 + (\gamma-1)M^2/2\}]dM = dT/T + [2(\gamma-1)M/\{2 + (\gamma-1)M^2\}]dM$

$dT=0$ であるから

$$dT_0/T_0 = [2(\gamma-1)M/\{2 + (\gamma-1)M^2\}]dM \quad \text{----- (h)}$$

更に、熱力学の第1則より、外部から(へ)の熱量 dq は気体のエンタルピーの変化になるので

$dq = C_p dT_0$ であるから

$$dq = C_p dT_o = [2C_p T_o (\gamma - 1)M / \{2 + (\gamma - 1)M^2\}] dM \quad \text{-----(i)}$$

(e)～(i)は等温流れの特性を記述している(*4)。

2. さて(f)式を変形すると

$$dM/dx = (\lambda/D) M / \{2(1 - \gamma M^2) / (\gamma M^2)\} \quad \text{----- (f)}$$

従って $M \leq 1/\gamma^{0.5}$ の時: $dM/dx \geq 0$ 、 $M > 1/\gamma^{0.5}$ の時: $dM/dx < 0$

$M = 1/\gamma^{0.5}$ が変曲点になり $M = 1/\gamma^{0.5}$ までは、下流に行くにつれマッハ数は増加するが、 $M = 1/\gamma^{0.5}$ に到達すると減少に転じる。もし管路中途に変曲点がくれば、管路断面の拡大がない限り流量はダウンして、変曲点は管路端に移動する。この状態はチョークと同じで、等温流れでは $M = 1$ ではなく、 $M = 1/\gamma^{0.5}$ でチョークが起きることになる(*3)。当初 x の位置 ($M = M$) にあり x^+ の位置で $M = 1/\gamma^{0.5}$ に到達したとすると

$$\begin{aligned} \int (\lambda/D) dx &= \int \{2(1 - \gamma M^2) / (\gamma M^2)\} dM/M \\ (\lambda/D) (x^+ - x) &= [-1/(\gamma M^2) - \log M^2] M^{1/\sqrt{\gamma}} = (1 - \gamma M^2) / (\gamma M^2) + \log(\gamma M^2) \\ \downarrow \\ (\lambda/D) L_{\max} &= (1 - \gamma M^2) / (\gamma M^2) + \log(\gamma M^2) \quad \text{----- (j)} \end{aligned}$$

L_{\max} は任意位置からチョーク点までの最大可能な管路長さである。(j)式から得られる M は、全長が L_{\max} の管路の末端でチョーク ($M = 1/\gamma^{0.5}$) しているときの入口マッハ数である。管路断面積が一定の場合常に末端でチョークし途中でチョークすることはない。

(e)式についても中途位置における状態(P, ρ, u, M)から末端におけるチョーク状態($P^+, \rho^+, u^+, 1/\gamma^{0.5}$)まで積分する。

$$\begin{aligned} \int dP/P &= \int d\rho/\rho = -\int du/u = -\int dM/M \\ \downarrow \\ \log(P/P^+) &= \log(\rho/\rho^+) = \log(u^+/u) = \log(1/(M \gamma^{0.5})) \\ \text{従って} \quad P/P^+ &= \rho/\rho^+ = u^+/u = 1/(M \gamma^{0.5}) \quad \text{----- (k)} \end{aligned}$$

(g)式についても中途位置における状態(P_o, M)から末端におけるチョーク状態($P_o^+, 1/\gamma^{0.5}$)まで積分する。

$$\begin{aligned} \int dP_o/P_o &= \int [2\gamma M / \{2 + (\gamma - 1)M^2\} - 1/M] dM \\ \downarrow \\ \log(P_o^+/P_o) &= \log [M \gamma^{0.5} \{ (3\gamma - 1) / \{ \gamma (\gamma - 1)M^2 + 2\gamma \} \}^{\gamma/(\gamma-1)}] \\ \text{従って} \quad (P_o/P_o^+) &= \{1/(M \gamma^{0.5})\} \{ \gamma (\gamma - 1)M^2 + 2\gamma \} / [(3\gamma - 1)]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad \text{----- (l)} \end{aligned}$$

(h)式についても中途位置における状態(T_o, M)から末端におけるチョーク状態($T_o^+, 1/\gamma^{0.5}$)まで積分する。

$$\begin{aligned} \int dT_o/T_o &= \int 2(\gamma - 1)M / \{2 + (\gamma - 1)M^2\} dM \\ \downarrow \\ \log(T_o^+/T_o) &= \log \{ (3\gamma - 1) / \{ \gamma (\gamma - 1)M^2 + 2\gamma \} \} \\ \text{従って} \quad (T_o/T_o^+) &= \{ \gamma (\gamma - 1)M^2 + 2\gamma \} / (3\gamma - 1) \quad \text{----- (m)} \end{aligned}$$

3. (j)～(m)の結果を利用して管路の任意位置 x_1 から x_2 までの変化は以下ようになる。

まず摩擦損失-マッハ数関係については

$$\begin{aligned} (\lambda/D) (x^+ - x_1) &= (1 - \gamma M_1^2) / (\gamma M_1^2) + \log(\gamma M_1^2) \\ (\lambda/D) (x^+ - x_2) &= (1 - \gamma M_2^2) / (\gamma M_2^2) + \log(\gamma M_2^2) \end{aligned}$$

辺々差し引いて

$$(\lambda/D) (x_2 - x_1) = (M_2^2 - M_1^2) / (\gamma M_1^2 M_2^2) + 2\log(M_1/M_2) \quad \text{----- (n)}$$

次に静圧関係については $P_2/P^+=1/(M_2 \gamma^{0.5})$ 、 $P_1/P^+=1/(M_1 \gamma^{0.5})$ であるから

$$(P_2/P_1) = (M_1/M_2) \text{-----}(o)$$

同様にして $(\rho_2/\rho_1) = (M_1/M_2) \text{-----}(p)$

$$(u_1/u_2) = (M_1/M_2) \text{-----}(q)$$

$$(P_{o2}/P_{o1}) = (M_1/M_2) \{ \gamma (\gamma - 1) M_2^2 + 2 \gamma \} / \{ \gamma (\gamma - 1) M_1^2 + 2 \gamma \}^{\gamma/(\gamma - 1)} \text{-----}(r)$$

$$(T_{o2}/T_{o1}) = \{ \gamma (\gamma - 1) M_2^2 + 2 \gamma \} / \{ \gamma (\gamma - 1) M_1^2 + 2 \gamma \} \text{-----}(s)$$

4. (n)式は区間 $x_1 \sim x_2$ の摩擦損失に伴うマッハ数の変化を示している。この式の左辺は直管の摩擦による $x_1 \sim x_2$ の圧力損失係数 k_f であるが、実際は曲管や弁などの圧力損失係数 k_c (*5) もあるので、

$$k_{12} = (M_2^2 - M_1^2) / (\gamma M_1^2 M_2^2) + 2 \log(M_1/M_2) \quad \text{ここで } k_{12} = k_f + \Sigma k_c$$

と拡張される。更にこの式は以下のように変形できる。

$$k_{12} = \{ 1 - (M_1/M_2)^2 \} / (\gamma M_1^2) + 2 \log(M_1/M_2)$$

(o)式より $k_{12} = \{ 1 - (P_2/P_1)^2 \} / (\gamma M_1^2) + 2 \log(P_2/P_1)$

マッハ数 $M_1 = u_1/a_1$ 、音速 $a_1 = (\gamma P_1 / \rho_1)^{0.5}$ であるから

$$\begin{aligned} k_{12} &= \{ P_1^2 / (\rho_1 u_1^2) \} \{ 1 - (P_2/P_1)^2 \} - 2 \log(P_1/P_2) \\ &= \{ \rho_1 P_1 A^2 / (\rho_1 u_1 A) \} \{ 1 - (P_2/P_1)^2 \} - 2 \log(P_1/P_2) \\ &= \{ \rho_1 P_1 A^2 / m^2 \} \{ 1 - (P_2/P_1)^2 \} - 2 \log(P_1/P_2) \end{aligned}$$

これを変形して、次の質量流量式が得られる。

$$m = [A^2 \rho_1 \{ k_{12} + 2 \log(P_1/P_2) \}]^{0.5} [(P_1^2 - P_2^2) / P_1]^{0.5} \text{-----}(t)$$

この式は、【FE-02-TM-001 ガス膨張のある配管の圧力損失計算】の(1)式に同じである。

5. 低マッハ数 ($M_{max.} \leq 0.2$) の断面積一定の長い管路について、Miller は次の式を提示している⁽²⁾。

$$(P_1/P_2)^2 = k \{ m (RT_t)^{0.5} / (AP_2) \}^2 + 1 = 1 / [1 - k \{ m (RT_t)^{0.5} / (AP_1) \}^2] \text{-----}(u)$$

この式を変形すると、次の質量流量式が得られる。

$$m = \{ A / (RT_t)^{0.5} \} \{ (P_1^2 - P_2^2) / k \}^{0.5} \text{-----}(u')$$

一方、前記の(t)式を変形すると

$$\begin{aligned} m &= [A^2 \rho_1 \{ k_{12} + 2 \log(P_1/P_2) \}]^{0.5} [(P_1^2 - P_2^2) / P_1]^{0.5} \\ &= [A / (P_1 / \rho_1)^{0.5}] [(P_1^2 - P_2^2) / \{ k + 2 \log(P_1/P_2) \}]^{0.5} \quad (k_{12} \text{は } k \text{ と表示}) \end{aligned}$$

ここで分母の (P_1 / ρ_1) は $(P_1 / \rho_1) = RT_1$ 。ここではマッハ数は 0.15 以下なので

$$T = T_t / \{ 1 + (\gamma - 1) M^2 / 2 \} = T_t / \{ 1 + (1.4 - 1.0) \times 0.2^2 / 2 \} = 0.992 T_t \quad (\text{但し } \gamma = 1.4 \text{ のとき})$$

従って、 $(P_1 / \rho_1) = RT_1 \doteq RT_t$ 故に、

$$m = [A / (RT_t)^{0.5}] [(P_1^2 - P_2^2) / \{ k + 2 \log(P_1/P_2) \}]^{0.5} \text{-----}(t')$$

(u')式と(t')式を比べると、Miller の(u')式は、理論式の(t')式の分母にある $2 \log(P_1/P_2)$ を割愛したものであることがわかる。Miller 式の蓋然性を調べるため(u')式と(t')式を比較すると下図のようになる。殆ど数%内で両者は漸近している。なお、この図においては、

$$\begin{aligned} \text{Miller 式} : & \dots (P_1/P_2)^2 = k \{ m (RT_t)^{0.5} / (AP_2) \}^2 + 1 \\ & \downarrow \\ & (M_2/M_1)^2 = k \{ m (RT_t)^{0.5} / (AP_2) \}^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{理論式} & : \dots (P_1/P_2)^2 = \{k + 2\log(P_1/P_2)\} \{m(RT_t)^{0.5}/(AP_2)\}^2 + 1 \\ & \quad \downarrow (M_2/M_1)^2 = \{k + 2\log(M_2/M_1)\} \{m(RT_t)^{0.5}/(AP_2)\}^2 + 1 \end{aligned}$$

なおここでは(o)式の $P_2/P_1=M_1/M_2$ の関係を用いている。これらの式で、 $\{m(RT_t)^{0.5}/(AP_2)\}$ は

$$\{m(RT_t)^{0.5}/(AP_2)\} = \gamma^{0.5} M_2 \{1 + (\gamma - 1) M_2^2/2\}^{0.5}$$

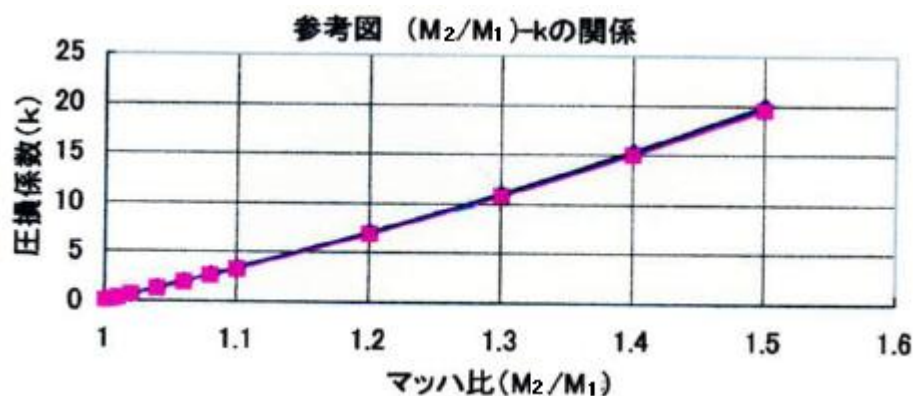
なる関係があり、 $\gamma = 1.67$ (Max レベル)、 $M_2=0.2$ (Max) のとき

$$\{m(RT_t)^{0.5}/(AP_2)\} = 1.67^{0.5} \times 0.2 \times \{1 + (1.67 - 1) 0.2^2/2\}^{0.5} = 0.26$$

従って Miller 式 : $(M_2/M_1)^2 = 0.26^2 k + 1 \quad \therefore k = \{(M_2/M_1)^2 - 1\}/0.0676$

$$\text{理論式} : (M_2/M_1)^2 = 0.26^2 \{k + 2\log(M_2/M_1)\} + 1 \quad \therefore k = \{(M_2/M_1)^2 - 1\}/0.0676 - 2\log(M_2/M_1)$$

これをプロットしたのが下図である。この図では 3% 程度の誤差があるが殆ど支障ないので Miller 式の適用条件 $M_2 \leq 0.2$ は妥当 と思われる。



6. 以上は、等温流れに特定した議論であるが、チャートではこれ以外に圧縮性流れの一般式、

$$\begin{aligned} m(RT_t)^{0.5}/(AP_1) &= M_1 \gamma^{0.5} \{1 + (\gamma - 1) M_1^2/2\}^{0.5} \\ m(RT_t)^{0.5}/(AP_2) &= M_2 \gamma^{0.5} \{1 + (\gamma - 1) M_2^2/2\}^{0.5} \\ m &= \{AP_{t1}/(RT_t)^{0.5}\} [M_1 \gamma^{0.5} / \{1 + (\gamma - 1) M_1^2/2\}^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}] \\ P_1 &= P_{t1} / \{1 + (\gamma - 1) M_1^2/2\}^{\gamma/(\gamma-1)} \\ T &= T_t \{1 + (\gamma - 1) M_1^2/2\} \end{aligned}$$

などを用いている。これらについてはテキスト類⁽¹⁾⁽²⁾を参照のこと。ここでは説明を割愛する。

解説の脚注 :

(*1) 対数微分法は、予め対数形にしてから微分する方法。例えば

$$\begin{aligned} & \text{連続の式} : \rho u A = \text{定数 } C \\ & \log \rho + \log u + \log A = \log C \\ & (d \log \rho / d \rho) (d \rho / dx) + (d \log u / du) (du / dx) + (d \log A / dA) (dA / dx) = 0 \\ & d \rho / \rho + du / u + dA / A = 0 \\ & \downarrow \text{本ケース } dA = 0 \text{ なので } d \rho / \rho + du / u = 0 \end{aligned}$$

(*2) 運動方程式 : $m(Du/Dt) = \Sigma F$

これに $Du/Dt = \partial u / \partial t + u \partial u / \partial x$ 、 $\Sigma F = -A(\partial P / \partial x) \delta x - (1/2) \rho u^2 \pi D f \delta x$ 、 $m = \rho A \delta x$ を代入し

$$\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x + (1/\rho) (\partial P / \partial x) + (1/2) u^2 (4f/D) = 0$$

非定常項 $\partial u / \partial t$ を除外し

$$\partial u / u + \{1/(\rho u^2)\} \partial P + (1/2) (4f/D) \partial x = 0$$

ここで、 $\rho u^2 = \rho a^2 (u^2/a^2) = \rho a^2 M^2 = \rho (\gamma P/\rho) M^2 = \gamma P M^2$ であるから

$$du/u + \{1/(\gamma M^2)\} dP/P + (1/2)(\lambda/D) dx = 0$$

(*3) ニュートンによれば等温過程の音速は $a^* = (RT)^{0.5}$ である。一方局所の等エントロピ過程では $a = (\gamma RT)^{0.5}$ であるから、仮に $u = a^*$ のとき 定義によるマッハ数は

$$M = u/a = (RT)^{0.5}/(\gamma RT)^{0.5} = 1/\gamma^{0.5}$$

従って等温プロセスにおけるチョークは $M=1$ では起きず、例えば 1 より低い $M=0.845$ ($\gamma=1.4$) で起きることになる。

(*4) 松尾のテキストには等温流れの特性について次のように記されている。

さて、式(8-56)より、 $M < 1/\sqrt{\gamma}$ ($=0.845$, $\gamma=1.4$) では、 $dM/dx > 0$ で、マッハ数は流れ方向に増加する。また、式(8-59)より、 dT_0 と dM は同符号であるから、 $dM/dx > 0$ のとき、 $dT_0/dx > 0$ である。すなわち $M < 1/\sqrt{\gamma}$ の等温流れでは、熱は外部から流れに加えられる。一方、 $M > 1/\sqrt{\gamma}$ の場合、 $dM/dx < 0$ で、マッハ数は流れ方向に減少する。また、このとき $dT_0/dx < 0$ であるから、熱は流れから外部へ伝えられる。等温流れにおける諸量の変化をまとめると、表 8-4 のようになる。

表 8-4 断面積一定の管内の等温流れにおける諸量の変化。

マッハ数 流れの諸量	$M < 1/\sqrt{\gamma}$	$M > 1/\sqrt{\gamma}$
速度 u	増加	減少*
マッハ数 M	増加	減少*
圧力 p	減少	増加
密度 ρ	減少	増加
全温度 T_0	増加	減少
全圧 p_0	減少	$\begin{cases} M < \sqrt{2/(\gamma+1)} \text{ で増加} \\ M > \sqrt{2/(\gamma+1)} \text{ で減少} \end{cases}$

このように、等温流れのマッハ数は流れ方向に $1/\sqrt{\gamma}$ に近づくように変化する。したがって、等温流れの最大可能な管路長さは、 $M=1/\sqrt{\gamma}$ の断面(添字'で表す)までである。

(*5) 要素の圧損係数 k_c は非圧縮性流れの圧損係数(通常の圧損係数)である。Miller のテキスト⁽²⁾によれば各 k_c は夫々 0.25 以下。圧損係数が 0.25 を越える要素では、強固な剥離があつて流れの収縮(ベナコントラクタ)部分ができてそこでチョークする可能性があり、別途これをチェックする必要があるからである。例えば、オリフィス、フローノズル、絞られた弁類が然り。全開近く開かれた弁は問題ないと思う。

引用文献：

- (1) 松尾「圧縮性流体力学—内部流れの理論と解析」(理工学社) 8.10 等温流れ
- (2) D.S.Miller「Internal flow systems(second edition)」7.Compressible Flow