

【整番】 FE-02-TM-006	【標題】 急拡/急縮要素の圧縮性流れ計算
分類：流れ(圧縮性流れ)/種別：技術メモ	作成年月：H23.4/改訂：Ver0.0 (H23.6)
作成者：N.Miyamoto	

全 15 枚

1. はじめに

非圧縮性流れと同じように圧縮性流れでも急激な断面変化に伴って、大きな圧力変化や流速変化がおきる。例えば、安全弁や破裂板の出口側(2次側)、絞り弁の2次側、管オリフィスの前後など然り。流路の流れ計算でこれら要素の果たす役割は大きく、単純な系ではそれによって流れ特性が決まってしまうこともある。これらの特性についてはテキスト/文献類でとりあげられており、特に議論する余地も少ないが、煩雑な圧縮性流れの理論展開を理解する上で一つのポイントになると思われるのでここでとりあげてみたい。また、急拡要素の例としてバタフライ弁をとりあげ、その流れ特性に関する議論のひとつを紹介してみたい。

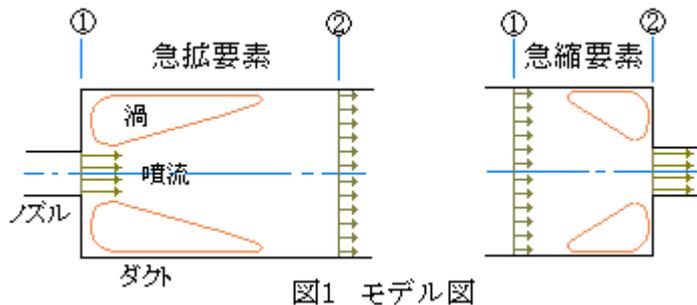


図1 モデル図

2. 流れの特性式^{(1)~(4)}

(1) 図1に要素のモデル図を示す。急拡モデルでは、入口ノズルから噴流となって流入した後、比較的長い区間(ダクト径の8~12倍程度)で膨張拡散し均一な流れになって流出する。この場合噴流の出口に縮流(ベナコントラクタ)は存在しないと考える。急縮モデルでは均一な流れが比較的短い区間で急激に収縮してノズル内に流入する。急拡断面①の後や急縮断面②の前の周辺剥離ゾーンには渦ができる。

流れとしては比較的高速で区間が短いのでラギングの有無に依らず断熱流れと見なされるが、内部の渦や粘性摩擦による損失の介在で等エントロピ流れとは見なされず通常の全エンタルピ一定の流れと考える。

(2) 出入口の圧力関係など、流れの特性式は次のようになる。導入過程など詳しくは補足説明による。

急拡要素ないし急縮要素の場合)

$$T_2/T_1 = \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\} \quad \text{-----(1)}$$

$$P_2/P_1 = \phi (M_1/M_2) [\{2 + (\gamma - 1)M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}]^{1/2} \quad \text{-----(2)}$$

$$P_2/P_{01} = (P_2/P_1) \{1 + (\gamma - 1)M_1^2/2\}^{-\gamma/(\gamma-1)} \quad \text{-----(3)}$$

$$P_{02}/P_{01} = \phi (M_1/M_2) [\{2 + (\gamma - 1)M_2^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}]^{(\gamma+1)/(2(\gamma-1))} \quad \text{-----(4)}$$

$$(s_2 - s_1)/R = -\ln(P_{02}/P_{01}) \quad \text{-----(5)}$$

$$h_2/h_1 = 1 + \{(\gamma - 1)/2\} M_1^2 \{1 - (M_2/M_1)^2 (T_2/T_1)\} \quad \text{-----(6)}$$

急拡要素の場合)

$$M_1 \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}^{1/2} / \{1 + \gamma M_1^2 + (P_f/P_1)(1/\phi - 1)\} = M_2 \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}^{1/2} / (1 + \gamma M_2^2) \quad \text{-----(7)}$$

$$P_f/P_{01} = (P_f/P_1) \{1 + (\gamma - 1)M_1^2/2\}^{-\gamma/(\gamma-1)} \quad \text{-----(8)}$$

急縮要素の場合)

$$M_2 \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}^{1/2} / \{1 + \gamma M_2^2 + (P_f/P_2)(\phi - 1)\} = M_1 \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}^{1/2} / (1 + \gamma M_1^2) \quad \text{-----(9)}$$

$$P_f/P_{02} = (P_f/P_1) \{1 + (\gamma - 1)M_2^2/2\}^{-\gamma/(\gamma-1)} \quad \text{-----(10)}$$

補助公式) 以上の式を運用する際に用いる式

$$m(RT_0)^{0.5} / (P_0A) = M \gamma^{0.5} \{1 + (\gamma - 1)M^2/2\}^{-(\gamma+1)/(2(\gamma-1))}$$

$$P_0 = P \{1 + (\gamma - 1)M^2/2\}^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$T_0 = T \{1 + (\gamma - 1)M^2/2\}$$

記号定義 : P_0 = 全圧(Pa)、 P = 静圧(Pa)、 T_0 = 全温(K)、 T = 静温(K)、 M = マッハ数、

P_f = 急拡断面①及び急縮断面②の壁面に作用する静圧[ベース圧力](Pa)

S = エントロピ(J/kgK)、 h = エンタルピ(J/kg)、 M = マッハ数(-)、 γ = 比熱比(-)、

R = 気体定数(J/kgK)、 ϕ = 面積比(= A_1/A_2)、 A_1 = 入口面積(m²)、 A_2 = 出口面積(m²)

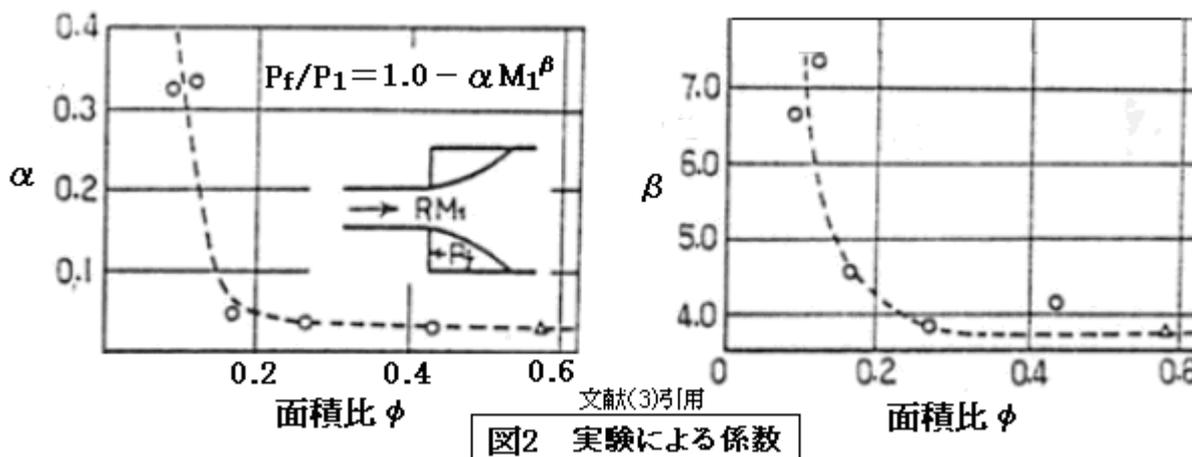
サフィックス 1 → 要素入口①、2 → 要素出口②

なお急拡要素では、壁面圧力 P_f は、 $M_1 < 0.6$ 以下では $P_f = P_1$ としてよいが、マッハ数が大きいと剥離部分の動圧が増して P_f は多少低下する傾向がある。 $M_1 < 1$ 以下の実験式として次の式がある⁽³⁾。

$$P_f/P_1 = 1.0 - \alpha M_1^\beta$$

ここで α, β = 実験に基づく係数(下図による)。面積比が小さい時は適宜、外挿すること。

$M_1 > 1$ では衝撃波の介在で P_f/P_1 は大きく低下する。上記の実験式は使えない。



また、急縮要素では、データが殆どないが、 $M_2 < 1$ で $P_f = P_1$ で特に支障はないと思う。

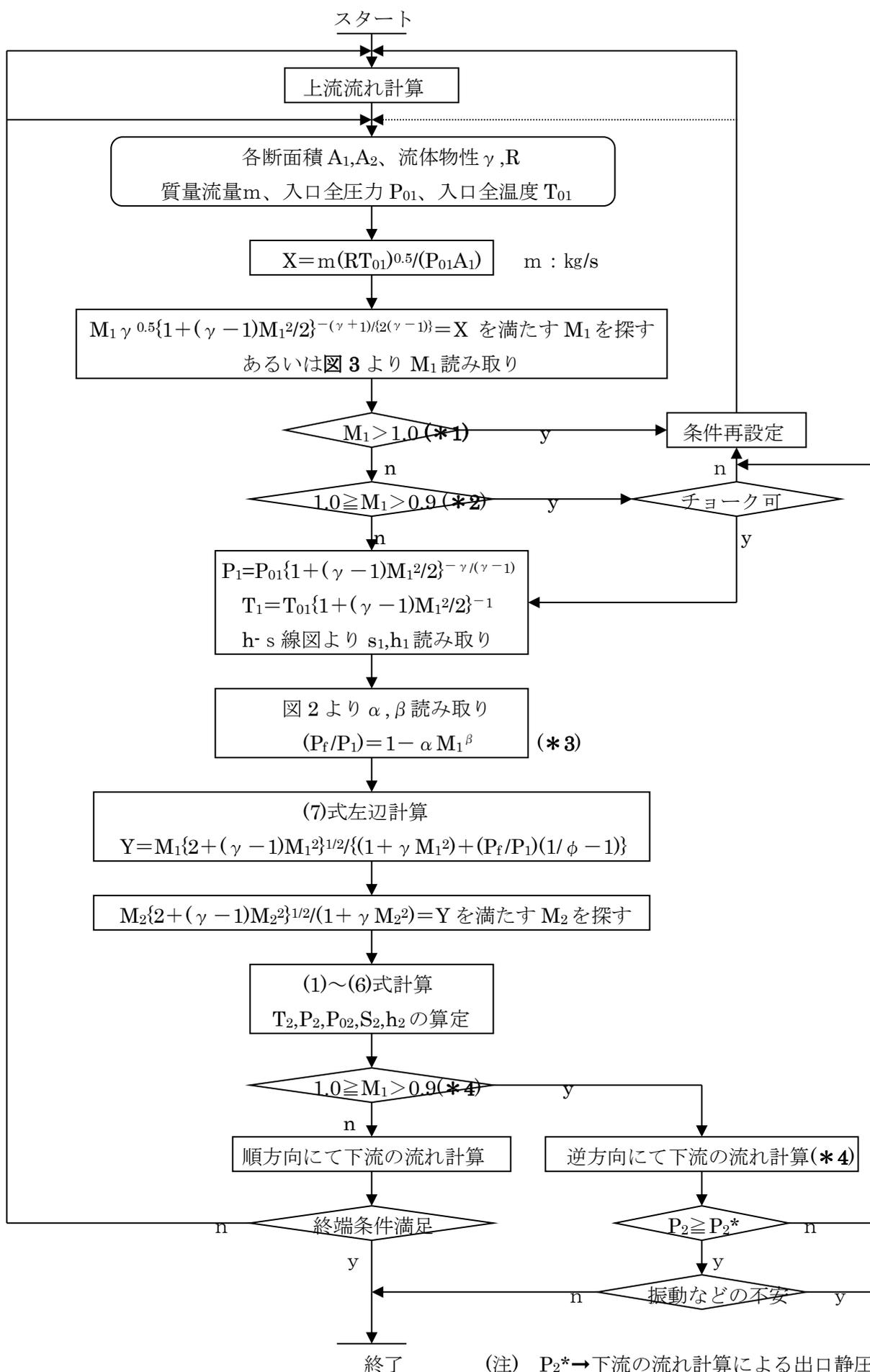
3. 特性式の運用例

(1) 実際のプラント設備で急拡/急縮要素を単独に扱えるケースは少ないが、ここでは上流条件、即ち質量流量 m 、入口側全圧 P_{01} 、入口側全温度 T_{01}

を設定して流れ方向と同じ計算流れ(順方向)で検討するケースを取り上げる。計算ステップは下記。

- ① まず、 m, P_t, T_t から入口マッハ数 M_1 を求め、 $M_1 \leq 1$ であることを確認する。
- ② 与えられた m, P_{01}, T_{01} から入口側の P_1, T_1, s_1, h_1 を求める。ついで
- ③ (P_f/P_1) を設定し M_1 を用いて(7)式の右辺を計算し、左辺の出口マッハ数 M_2 を求める。更に
- ④ M_1, M_2 を用いて圧力比などを計算し、出口側の $P_2, T_2, P_{02}, s_2, h_2$ を求める。
- ⑤ 下流側で予想される圧力条件と比較する。

具体的にチャートで示すと以下のようなになる。



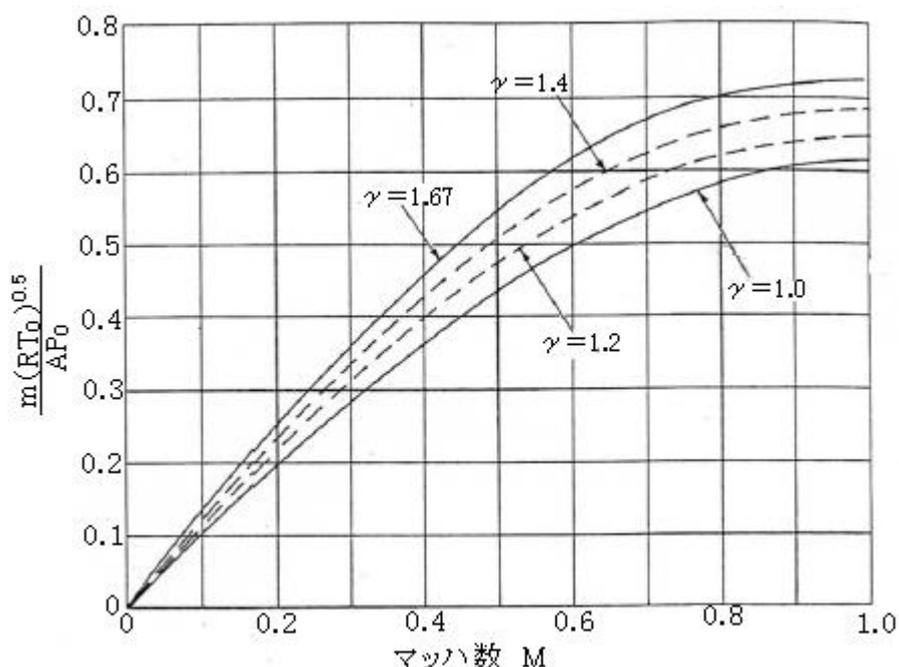


図3 質量流量関数とマッハ数の関係 テキスト(4)Fig.7.10引用

(*1) 入口側はストレートなノズルを考えているので、超音速 $M_1 > 1$ にはならない。ただ計算上は、設定された質量流量 m が多いと流速があがって $M_1 > 1$ になるので、その場合は m を下げるか、入口面積 A_1 をアップして調整する。因みに、もし入口が末広ノズル状になっておれば $M_1 > 1$ 即ち超音速もありうる。また入口側が鋭角縁のオリフィスようになっておれば、孔通過後に縮流して実際の入口面積が縮小しそこでチョークが起きてやや様相が変わってくる。これらについては、別途扱う必要があるのでここでは割愛する。

(*2) 入口マッハ数が 1 に漸近すると振動/騒音の問題がでてくる。定常の流れであれば M_1 は 0.5 以下にはしたい所だが、騒音対策がなされた配管やレリーフラインのような配管であればチョークを可とすることもある。 $M_1 > 0.9$ とした理由は Miller のコメント⁽⁴⁾ によっているが、このような遷移域では計算と実際の食い違いが響いてくるので、妥当ではないかと思う。

チョーク不可と判断したら設定条件を変更するが、多くの場合、上流に遡って変更することになると思われる。

(*3) $M_1 = 1$ のときは M_2 への依存が強まるが、 M_2 はそれ程大きくはないと仮定して、ここでは $(P_f/P_1) = 1 - \alpha M_1^\beta$ を有効とする(テキスト類では無効とする表現もあるが…)。ただ、実際の出口静圧あるいは下流の流れ計算から見積もられた出口静圧が、 $M_1 = 1$ として当該要素で計算された P_2 よりもかなり低くなると、出口流速がアップして M_2 が上昇し、その分 (P_f/P_1) が急減して、この (P_f/P_1) の実験式はとても使えないので注意すべきである。

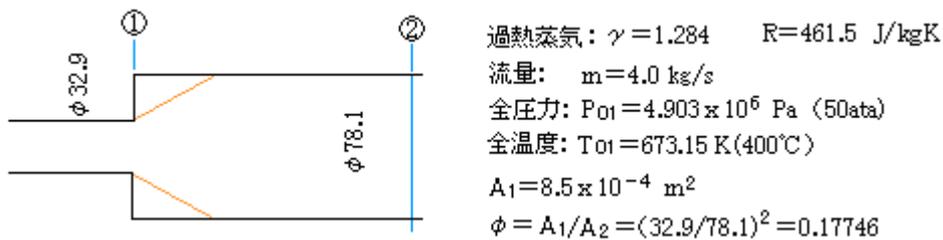
(*4) もし入口直後でチョーク状態であるなら、この急拡モデルの入口(ノズル出口)と出口(ダクト静圧回復点)は分断されて縁切れになっている。その場合、前述と同じく下流の流れ計算から見積もられた出口静圧が、 $1.0 \geq M_1 > 0.9$ として当該要素で計算された P_2 よりもかなり低くなると、衝撃/振動が強まる恐れがあるので、その乖離がどの程度になるかを確認すべきと

思われる。即ち下流の流れ計算は**末端条件から遡って**計算し、その結果得られた P_2^* を当該要素計算から得られた P_2 と比較し、その差異から著しい衝撃/振動/騒音が懸念されるならば、再度設定条件を見直し、再計算に付すのがよいと思われる。なお、その場合の下流の流れ計算では、質量保存則/エネルギー保存則に順じて上流に合わせる必要がある(上流と同じ質量流量 m と全温度 T_{01} を用いる)。なお(ベース圧力/静圧)比 P_f/P_1 は(7)式を変形し $M_1=1$ と置いて、

$$P_f/P_1 = \{(A_1/A_2)/(1-A_1/A_2)\} (1+\gamma)^{0.5} [(1+\gamma M_2^2)/\{M_2\{2+(\gamma-1)M_2^2\}\}^{0.5} - (1+\gamma)^{0.5}]$$

となる。もちろん (P_f/P_1) を求める式はないので、 (P_f/P_1) はあくまで、下流計算から得られた M_2 に依存するので流れ計算上の効力はない。ただ、強度チェック上は有効である。

(2) ここで下記の例題を考えてみる。



補助公式より、

$$X = m(RT_{01})^{0.5} / (P_{01}A_1)$$

$$= 4.0 \times (461.5 \times 673.15)^{0.5} / (4.903 \times 10^6 \times 8.5 \times 10^{-4}) = 2229.5 / 4167.6 = 0.535$$

$$M_1 \gamma^{0.5} \{1 + (\gamma - 1)M_1^2/2\}^{-(\gamma+1)/(2(\gamma-1))} = 1.133M_1(1 + 0.142M_1^2)^{-4.021} = 0.535$$

$$\rightarrow \text{トライ \& エラーにて } M_1 = 0.565$$

$$P_1 = P_{01} \{1 + (\gamma - 1)M_1^2/2\}^{-\gamma/(\gamma-1)} = 4.903 \times 10^6 \times (1 + 0.142 \times 0.565^2)^{-4.521} = 4.013 \times 10^6 \text{ Pa (40.9ata)}$$

$$T_1 = T_{01} \{1 + (\gamma - 1)M_1^2/2\}^{-1} = 673.15 \times (1 + 0.142 \times 0.565^2)^{-1} = 644 \text{ K (371°C)}$$

$$\text{蒸気表より } h_1 = 750.9 \text{ kcal/kg} \text{ , } s_1 = 1.5912 \text{ kcal/kgK}$$

$$\text{面積比 } \phi = 0.17746 \text{ のとき 図 2 より } \alpha = 0.06 \text{ , } \beta = 4.3 \rightarrow P_f/P_1 = 1 - 0.06 \times 0.565^{4.3} = 0.995$$

$$Y = M_1 \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}^{1/2} / \{(1 + \gamma M_1^2) + (P_f/P_1)(1/\phi - 1)\}$$

$$= 0.565 \times \{2 + 0.284 \times 0.565^2\}^{1/2} / \{(1 + 1.284 \times 0.565^2) + 0.995(1/0.17746 - 1)\}$$

$$= 0.8169 / 6.0218 = 0.1357$$

$$M_2 \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}^{1/2} / (1 + \gamma M_2^2) = M_2 \{2 + 0.284M_2^2\}^{0.5} / (1 + 1.284M_2^2) = 0.1357$$

$$\rightarrow \text{トライ \& エラーにて } M_2 = 0.097$$

$$T_2/T_1 = \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\} = \{2 + 0.284 \times 0.565^2\} / \{2 + 0.284 \times 0.097^2\} = 1.044$$

$$P_2/P_1 = \phi (M_1/M_2) [\{2 + (\gamma - 1)M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}]^{1/2}$$

$$= 0.17746 \times (0.565/0.097) [\{2 + 0.284 \times 0.565^2\} / \{2 + 0.284 \times 0.097^2\}]^{1/2} = 1.056$$

$$P_{02}/P_{01} = \phi (M_1/M_2) [\{2 + (\gamma - 1)M_2^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}]^{(\gamma+1)/(2(\gamma-1))}$$

$$= 0.17746(0.565/0.097) [\{2 + 0.284 \times 0.097^2\} / \{2 + 0.284 \times 0.565^2\}]^{4.02} = 0.8696$$

$$(s_2 - s_1) = -R \cdot \ln(P_{02}/P_{01}) = -461.5 \ln(0.8696) = 64.5 \text{ J/kgK (0.0154 kcal/kgK)}$$

$$h_2/h_1 = 1 + \{(\gamma - 1)/2\} M_1^2 \{1 - (M_2/M_1)^2 (T_2/T_1)\}$$

$$= 1 + 0.142 \times 0.565^2 \{1 - (0.097/0.565)^2 \times 1.044\} = 1.044$$

$$\text{従って } T_2 = 1.044 T_1 = 1.044 \times 371^\circ\text{C} = 387^\circ\text{C}$$

$$P_2 = 1.056 P_1 = 1.056 \times 40.9 = 43.2 \text{ ata (kg/cm}^2\text{A)}$$

$$P_{02} = 0.8696 \times 4.903 \times 10^6 = 4.26 \times 10^6 \text{ Pa} = 4.26 \text{ MPa (43.5 ata)}$$

$$s_2 = 1.5912 + 0.0154 = 1.6065 \text{ kcal/kgK, } h_2 = 1.044 \times 750.9 = 784 \text{ kcal/kg}$$

更に $M_1 = 1$ になる場合を検討してみる。補助公式より、

$$m = \{P_{01} A_1 / (RT_{01})^{0.5}\} M_1 \gamma^{0.5} \{1 + (\gamma - 1) M_1^2 / 2\}^{-(\gamma + 1) / (2(\gamma - 1))}$$

$$= \{4.903 \times 10^6 \times 8.5 \times 10^{-4} / (461.5 \times 673.15)^{0.5}\} \times 1 \times 1.284^{0.5} \times (1 + 0.142)^{-4.021} = 4.968 \text{ kg/s}$$

$$P_1 = P_{01} \{1 + (\gamma - 1) M_1^2 / 2\}^{-\gamma / (\gamma - 1)} = 4.903 \times 10^6 \times (1 + 0.142)^{-4.521} = 2.69 \times 10^6 \text{ Pa (27.4 ata)}$$

$$T_1 = T_{01} \{1 + (\gamma - 1) M_1^2 / 2\}^{-1} = 673.15 \times (1 + 0.142)^{-1} = 590 \text{ K (317}^\circ\text{C)}$$

$$(P_f / P_1) = 1 - 0.06 \times 1^{4.3} = 0.94$$

$$Y = M_1 \{2 + (\gamma - 1) M_1^2\}^{1/2} / \{(1 + \gamma M_1^2) + (P_f / P_1)(1 / \phi - 1)\}$$

$$= \{2 + 0.284\}^{1/2} / \{(1 + 1.284) + 0.94(1/0.17746 - 1)\} = 0.2275$$

$$M_2 \{2 + (\gamma - 1) M_2^2\}^{1/2} / (1 + \gamma M_2^2) = M_2 \{2 + 0.284 M_2^2\}^{0.5} / (1 + 1.284 M_2^2) = 0.2275$$

$$\rightarrow \text{トライ \& エラーにて } M_2 = 0.166$$

$$T_2 / T_1 = \{2 + (\gamma - 1) M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1) M_2^2\} = \{2 + 0.284\} / \{2 + 0.284 \times 0.166^2\} = 1.1375$$

$$P_2 / P_1 = \phi (M_1 / M_2) [\{2 + (\gamma - 1) M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1) M_2^2\}]^{1/2}$$

$$= 0.17746 \times (1/0.166) [(2 + 0.284) / \{2 + 0.284 \times 0.166^2\}]^{1/2} = 1.14$$

$$P_{02} / P_{01} = \phi (M_1 / M_2) [\{2 + (\gamma - 1) M_2^2\} / \{2 + (\gamma - 1) M_1^2\}]^{(\gamma + 1) / (2(\gamma - 1))}$$

$$= 0.17746 (1/0.166) [\{2 + 0.284 \times 0.166^2\} / (2 + 0.284)]^{4.02} = 0.637$$

よって

$$T_2 = 1.1375 \times T_1 = 1.1375 \times 317 = 361^\circ\text{C}$$

$$P_2 = 1.14 P_1 = 1.14 \times 2.69 \times 10^6 \text{ Pa} = 3.07 \times 10^6 \text{ Pa (31.3 ata)}$$

$$P_{02} = 0.637 \times 4.903 \times 10^6 = 3.12 \times 10^6 \text{ Pa (31.8 ata)}$$

出口側の背圧が 31.3ata 以下になるとチョークする。限界圧比は $(P^* / P_0) = 31.3 / 50 = 0.628$ 。

仮に、下流末端から計算される出口側の全圧 P_{02} が 24ata ($2.35 \times 10^6 \text{ Pa}$) あったと、 $m = 4.968 \text{ kg/s}$ 、

$A_2 = 0.7854 \times 0.0781^2 = 4.79 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ 、 $T_{02} = T_{01} = 673.15 \text{ K}$ であるから、

$$X = m (RT_{02})^{0.5} / (P_{02} A_2) = 4.968 \times (461.5 \times 673.15)^{0.5} / (2.35 \times 10^6 \times 4.79 \times 10^{-3}) = 2769 / 11257 = 0.246$$

$$M_2 \gamma^{0.5} \{1 + (\gamma - 1) M_2^2 / 2\}^{-(\gamma + 1) / (2(\gamma - 1))} = 1.133 M_1 (1 + 0.142 M_1^2)^{-4.021} = 0.246$$

$$\rightarrow \text{トライ \& エラーにて } M_2 = 0.225$$

$M_1 = 1$ として、(7)式を変形して (P_f / P_1) を計算してみると、

$$(P_f / P_1) = \{\phi / (1 - \phi)\} [(1 + \gamma M_2^2) (\gamma + 1)^{0.5} / \{M_2 \{2 + (\gamma - 1) M_2^2\}^{1/2} - (1 + \gamma)\}]$$

$$= 0.216 \times [(1 + 1.284 \times 0.225^2) \times 2.284^{0.5} / \{0.225 \times \{2 + 0.284 \times 0.225^2\}^{0.5} - 2.284\}] = 0.595$$

P_{02} が低くなるほど M_2 はアップし、このように (P_f / P_1) はかなり減少する [補足説明(2)参照]。入口①はチョークし、出口②の全圧は限界の 31.8ata を下回っているので衝撃波による振動/騒音が予想されるが、それでも問題がなければ、この急拡要素は減圧要素として利用できる。

4. 急拡要素の例ーバタフライ弁2次側の流れ⁽⁵⁾

バタフライ弁構造は図1の急拡モデルのイメージに合わないが、絞られた弁ディスクから流出する流れは急拡大流れになる。以下バタ弁通過部分を急拡モデルで扱った文献⁽⁵⁾のあらましを紹介する。なお、青字はTS作成者の理解の範囲で補記したものである(念為)。

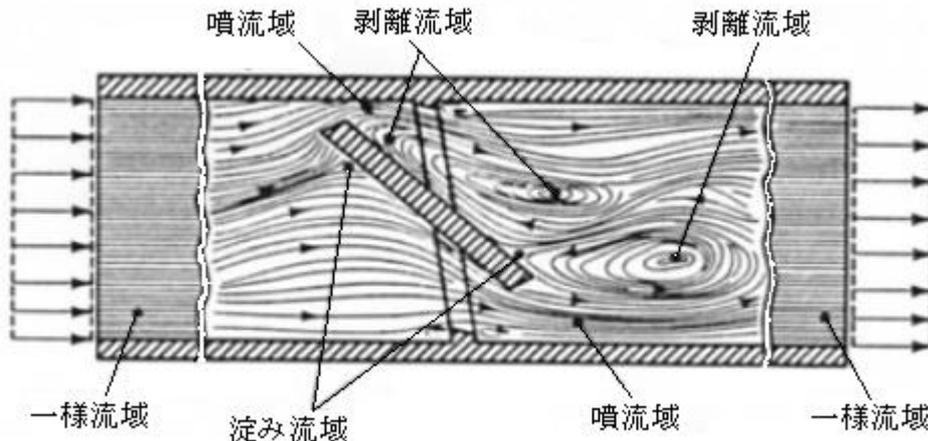


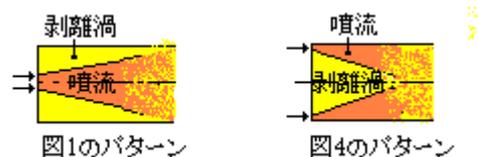
図4 バタフライ弁の定性的な流れ状態 文献(5)のFig.15引用

- (1) 部分的に開いたバタフライ弁ディスク前後の定性的な流れ状態を上図に示す。もちろんバタ弁のかなり上流/下流では一様な流れであるが、弁体(ディスク)の前後ではかなり、ドラスチックに変化する。しかしそれはランダムではなく、淀み流域、噴流域、剥離流域の3つの流域にわかれる。

流れが弁に近づくにつれて、ディスクの傾き方向あるいは流れ断面の縮小によって、その方向や速度を変化しはじめる。即ち、ディスクの前面に淀み部分ができて、その部分の辺りで流れ方向はディスクの外周に転じ、面積の急縮によって噴流となる。ディスクの背面のウェーキ部分には、中間に淀み部分をもった、2つの大きな流れの剥離部分ができる。この剥離流れと噴流は干渉しあって混合し再圧縮して流れ下り、おおむね(8~12)x管径の下流で静圧回復して一様流れに戻る。

バタフライ弁の質量流量と圧力特性は下流の噴流と剥離流域の干渉の影響を強く受ける。特に流れ断面積の拡大は、剥離流れの大きさに依存する所が大きい。剥離流域の大きさ/構造は、弁の構造、開度及び局所の流れ条件によっている。ディスクが絞られて噴流域が狭まると、噴流はチョークして音速に、場合によって超音速になり、擬似衝撃波を発生して一次元流れは2次元化する。また剥離流域は広がって再圧縮のために静圧回復位置は後方にずれる。

- (2) 構造的には、図1のモデルでは中心に拡大流れ(噴流)があり、その周囲を剥離流域が囲んでいるが、図4では中心に剥離流域があり、噴流はその周辺になる。下図参照。



しかし流れの構造からみれば、図4のパターンは図1のパターンで扱える可能性がある。即ち既存の一次元理論[前2項の(1)~(9)式]を用いてバタ弁の流れ特性が記述できる筈である。その場合ディスク背後の剥離流域が不透明で理論と実際の一致は、図1のようには望めない。既存の一次元

理論が利用できるようにするには、**有効な面積比 ϕ** を実験(あるいは 3 次元 CFD)によって、ディスク開度と前後の流れ条件の関数として求める必要がある。

(3) 文献(5)の実験は、次の 3 種類である。

①急拡モデル実験、 ②モデル弁実験、 ③フルサイズ実験

急拡モデル実験は、**Fig.3** のような筒状の供試体を用いたもので、入口ノズルとして、コンタード (nozzle1)、コンカル(nozzle2)、鋭角端(nozzle3)の 3 種類を用いて比較している。

モデル弁実験は **Fig.8** のような実験装置で、幾種類かのサイズの弁体(ディスク)についてその特性を調べたもの(サイズ効果の確認も含んでいる)。フルサイズ実験は、モデル弁の結果を実物の 300A 弁で確認したものである。実験結果の代表例を **Fig.5**、**Fig.7**、**Fig.9**、**Fig.10**、**Fig.11** に示す。

Fig.5 は、チョーク発生時の限界圧力比と有効面積比の関係を示す。ここでは急拡モデルとモデル弁の結果が一緒に示されているが、横軸の有効面積比としては急拡モデルでは $C_{FN}(A_1/A_2)$ 、モデル弁では C_{FV} を用いている(C_{FN} はノズル流量係数、 C_{FV} は弁流量係数で面積比(A_1/A_2)も含んだもの)。通常、バタ弁の限界圧力比(P_2/P_{01})は 0.6~0.75 程度。理論上の限界圧力比は(P^*/P_0)=0.529 (ただし $\gamma=1.4$)である。 P_2 は途中の静圧回復分だけノズル出口静圧 P^* より低い。従って、限界圧力比は 0.529 ではなく 0.52~0.75 になる。しかし nozzle2 と nozzle3 では、0.529 を下回る。この原因はノズル流出直後の縮流に由ると思われる。即ち実質的な流れ断面積 A_1 が縮んで P_2 が減少したためと思われる。**Fig.5** で注目されるのは、nozzle 1 の急拡モデルとモデル弁の結果がいずれも、実線で示される一次元理論値と一致する傾向にあることである。即ち、弁のモデルとしては nozzle 1 が適していることになる。更に云えば、絞られたバタ弁のディスクと弁座の隙間から流出する噴流には縮流(ベナコントラクタ)が存在しないことがわかる。

Fig.7 は、壁圧/入口全圧比と有効面積比の関係を示している。理論値(実線)と実験結果は有効面積比(A_1/A_2)の低い範囲ではほぼ一致する傾向にある。 P_f/P_1 は補足説明(2)にもあるように、チョーク状態では M_2 が高くなるに連れて減少する。この傾向は縦軸の P_f/P_{01} でも同じ(但し値は半分)。従って、 P_2/P_{01} が小さくなって出口圧力が限界圧力を大きく割り込むと、補足説明の通り M_2 は著しくアップして P_f/P_{01} は 1 を大きく下回ることになる。この傾向が **Fig.7** にはっきりでている。また高い有効面積比で実験結果と理論がずれるのはこの影響にもよる(?)。なお nozzle 1, 2, 3 の相違は見られない。

Fig.9 は実験で得られた弁流量係数(=実際の弁通過流量/呼径ベース通過流量)と開度の関係を示している。弁体/弁座と障害が多いので全開近くでも流量係数は半分程度に留まる。 C_F 値に振れがあるのは下流の P_2/P_{01} の影響とされる(?)。

Fig.10 は、モデル弁実験による全圧力比と有効面積比(=弁流量係数)の関係を示している。全圧力比(P_{02}/P_{01})は弁の圧力降下(圧損相当)を表わしているが、当然弁が絞られて有効面積比が低下すると全圧比は低下する。実験結果と理論値(実線)はよく一致している。

Fig.11 は実際の 300A バタ弁の実験結果を示すもの。全圧比-開度の関係は実験が失敗して乱れている(**Fig.10** のような結果がはっきりでているので問題はない)。弁流量係数-開度の関係は **Fig.9** とほぼ一致している。

結論的には、Fig 9 で与えられるような弁流量係数を有効面積比(ϕ)に引き当てた一次元解析によって弁の諸特性および流量特性が得られることになる。即ち、ある入口側全圧/全温度に対して、質量流量を仮定して前3項チャートの計算をくりかえし、その入口条件での開度-質量流量/全圧比の関係を得ることができる。

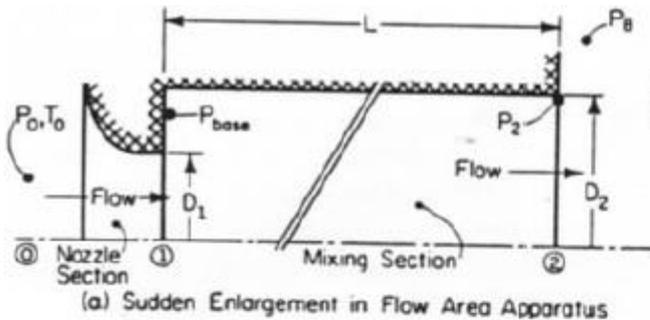
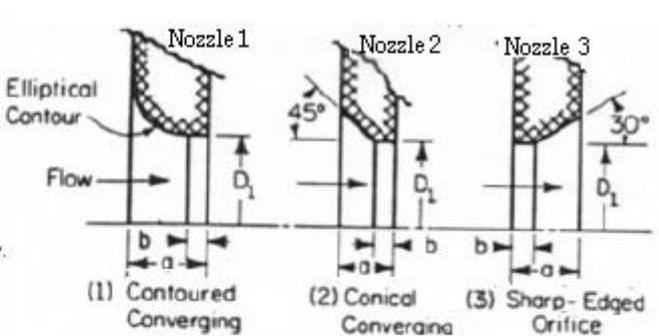
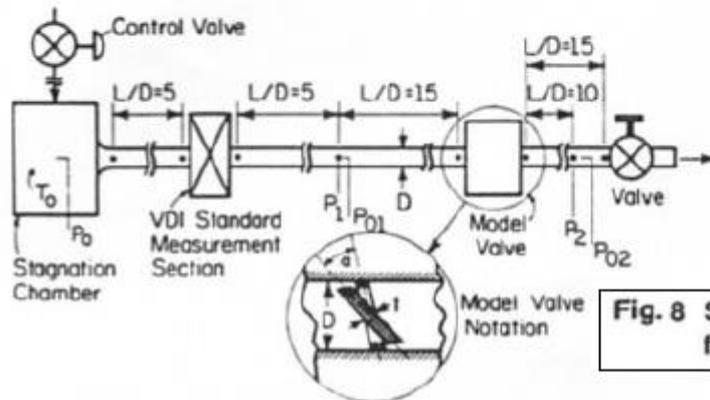


Fig. 3 Apparatus for sudden-enlargement experiments
急拡モデル実験の供試体 文献(5)引用

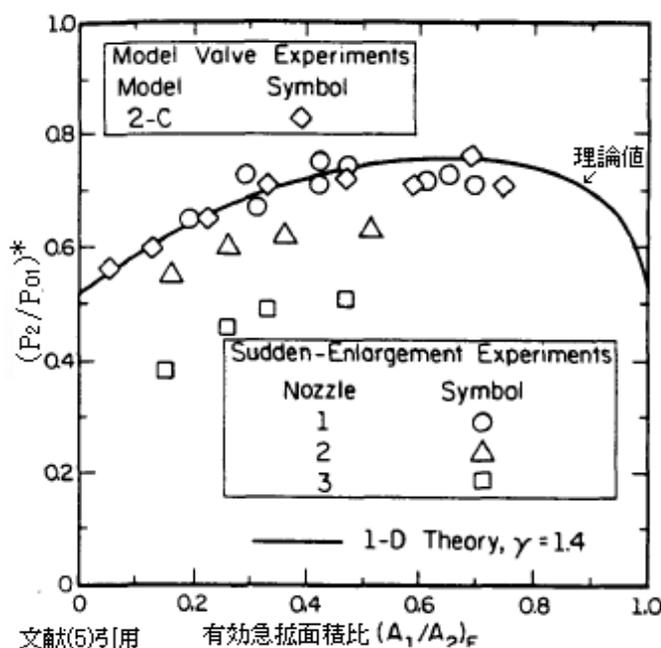


(b) Nozzle Geometries
上記の3タイプのノズルを使用

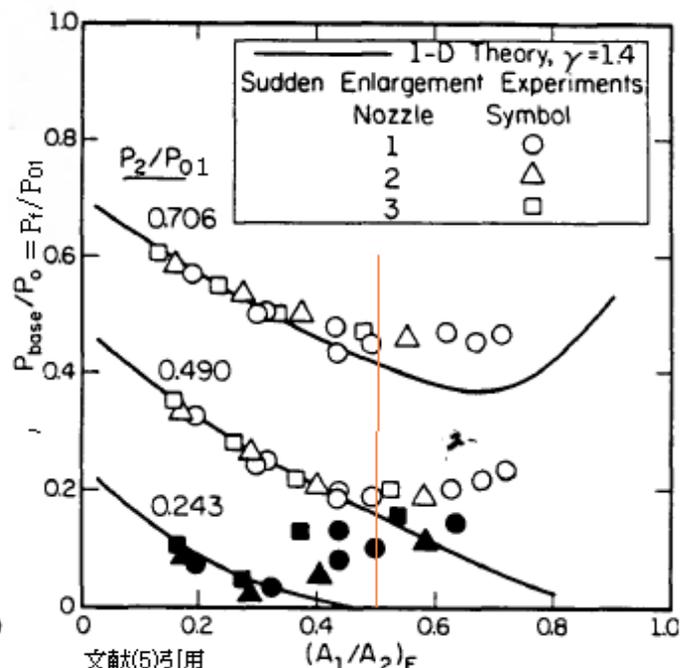


モデル弁実験装置 文献(5)引用

Fig. 8 Schematic of experimental apparatus for model valve experiments



文献(5)引用 有効急拡面積比 (A_1/A_2)_E
Fig. 5 チョーク発生時の全圧比(P_2/P_{01})-有効面積比



文献(5)引用
Fig. 7 壁圧(base pressure)比-有効面積比

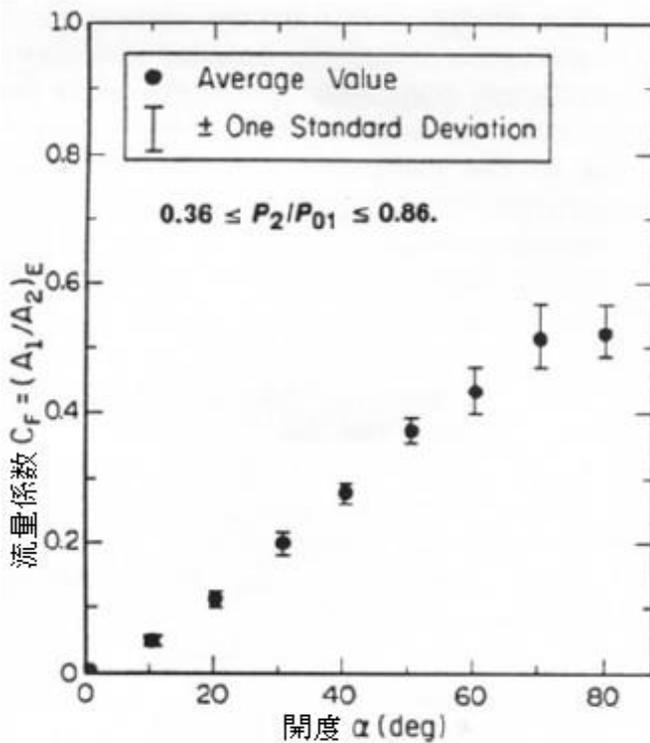


Fig. 9 モデル弁(2-A)の流量係数-開度

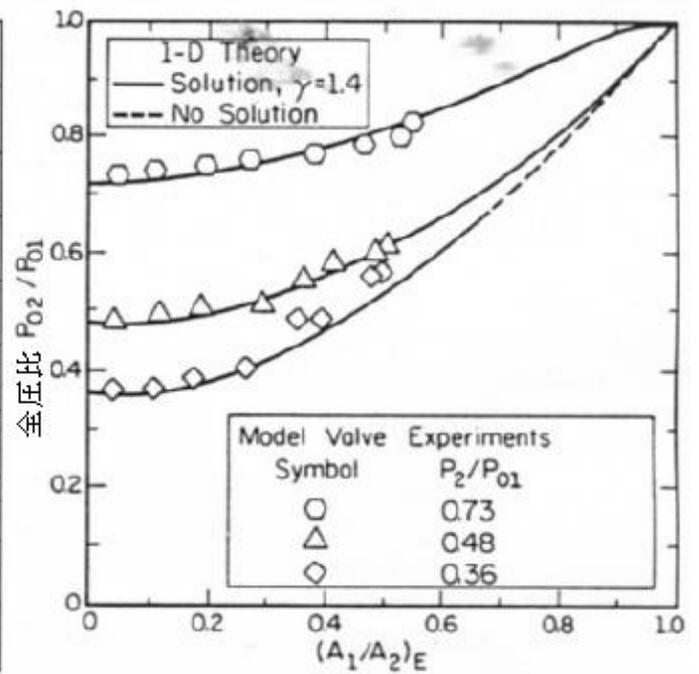


Fig. 10 モデル弁(2-A)の全圧比-有効面積比

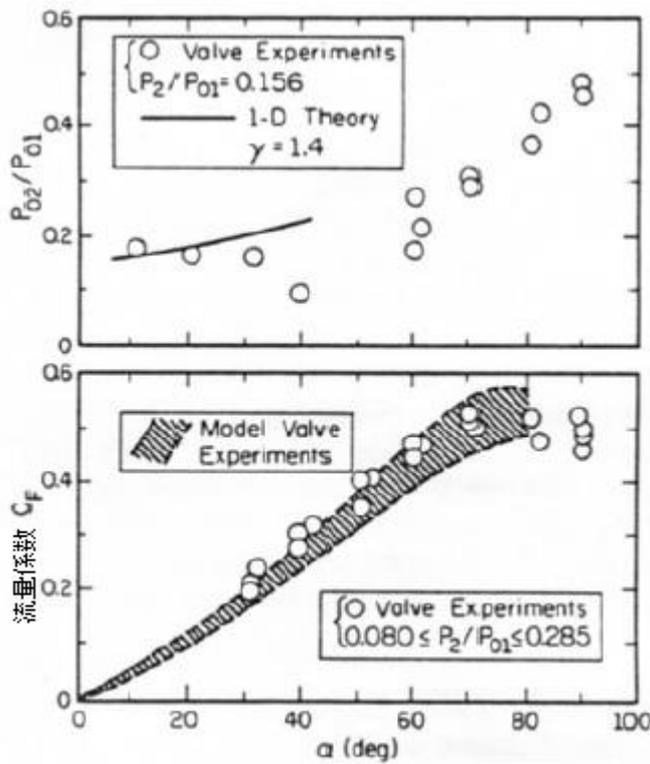
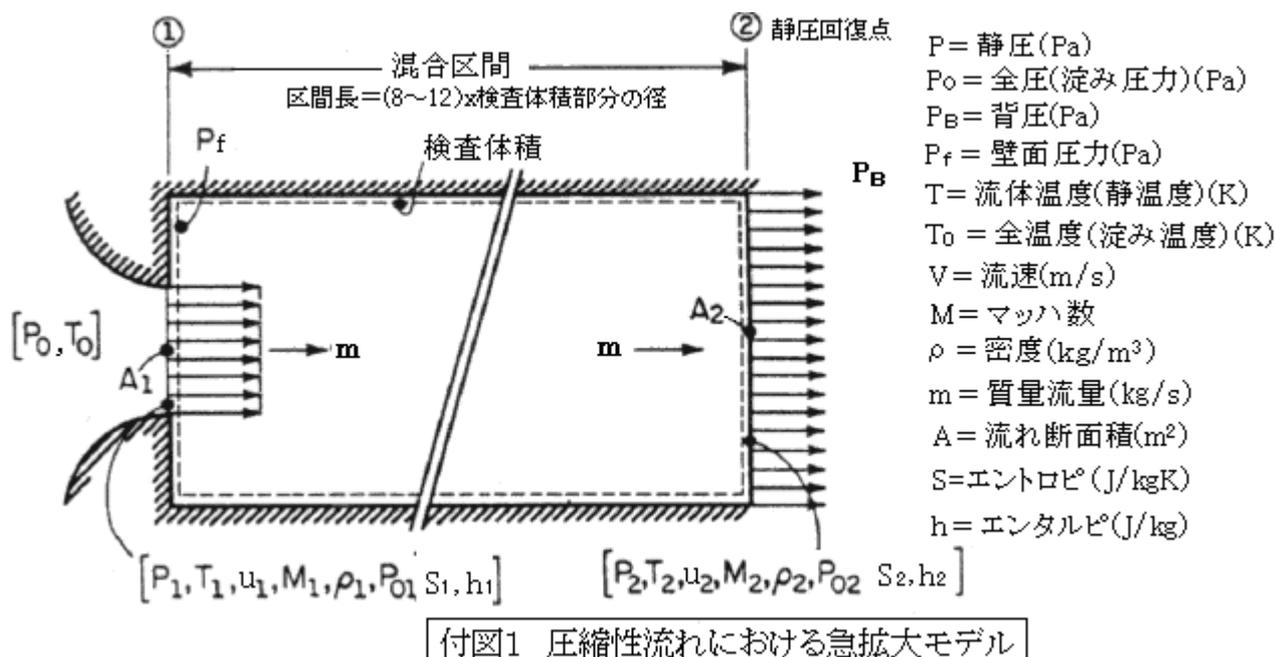


Fig. 11 全圧比ないし流量係数と開度の関係
 文献(5)引用 (300Aフルサイズ弁)

【 補 足 説 明 】

- (1) 本 TS では急拡大要素と急縮要素を扱っているが、実際の流れでは急拡大要素が多いので、まず急拡大要素について説明する。



上図に急拡大モデルを示す。このモデルはノズル出口からその下流の静圧回復点までの混合区間をモデル化するもの。この場合、熱的には、流路外面に保温がされていようとなかろうと、区間は十分短いので、断熱流れとする。このモデルでは次の3つの式が成立する。

$$\text{連続式: } m = \rho_1 A_1 u_1 = \rho_2 A_2 u_2 \quad \text{----- (a)}$$

$$\text{運動量保存式: } P_f(A_2 - A_1) + P_1 A_1 - P_2 A_2 = \rho_2 A_2 u_2^2 - \rho_1 A_1 u_1^2 \quad \text{----- (b)}$$

$$\text{エネルギー式: } T_0 = T_{01} = T_{02} \quad \text{----- (c)}$$

(a)(b)についてはモデル図から理解できると思う。(c)については少し補足しておく。断熱流れの場合、

$$\text{エネルギー保存則: } a^2/(\gamma - 1) + (1/2)u^2 = \text{一定}$$

流速 $u = Ma$ であるから、

$$\{a^2/(\gamma - 1)\}\{1 + (\gamma - 1)M^2/2\} = \text{一定} \quad (\text{但し } a = \text{音速}, \gamma = \text{比熱比}, M = \text{マッハ数})$$

ここで淀み状態では $u = 0 \rightarrow M = 0$ であるから、

$$\{a^2/(\gamma - 1)\}\{1 + (\gamma - 1)M^2/2\} = a_0^2/(\gamma - 1) = \text{const.}$$

γ は固定しているから、淀み状態の音速 a_0 は一定である。然るに a_0 は $a_0 = (\gamma RT_0)^{1/2}$ で定義されるので、全温度 T_0 も一定になる。故に $T_0 = T_{01} = T_{02}$ 。全温度一定(全エンタルピー一定)流れになる。

因みに上記の式を変形して、次の全温-静温関係が得られる。

$$(a_0/a)^2 = \gamma RT_0/(\gamma RT) = T_0/T = \{1 + (\gamma - 1)M^2/2\} \rightarrow T_0 = \{1 + (\gamma - 1)M^2/2\}T$$

上記の(a)(b)(c)を用いて、急拡大モデルの諸関係(圧力比)が得られる。まず(a)式において、状態式から $\rho = P/RT$ 、また $u = Ma = M(\gamma RT)^{1/2}$ であるから $P_2/P_1 = (A_1/A_2)(M_1/M_2)(T_2/T_1)^{1/2}$ 、前述の通り

全温度－静温度の関係は、 $T_0 = \{1 + (\gamma - 1)M^2/2\}T$ であるから、 $T_{01}=T_{02}$ の関係を用いて、

$$(T_2/T_1) = \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\} \quad \text{-----}(d)$$

これを、上記の (P_2/P_1) 式に代入すると、次の出入口静圧比が得られる。但し $\phi = A_1/A_2$ である。

$$P_2/P_1 = \phi (M_1/M_2) [\{2 + (\gamma - 1)M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}]^{1/2} \quad \text{-----}(e)$$

全圧と静圧の関係は公式として、 $P_0/P = \{1 + (\gamma - 1)M^2/2\}^{\gamma/(\gamma - 1)}$ で与えられるので、出口静圧/入口全圧比 $[P_2/P_{01} = (P_2/P_1)(P_1/P_{01})]$ は、

$$P_2/P_{01} = (P_2/P_1) \{1 + (\gamma - 1)M_1^2/2\}^{-\gamma/(\gamma - 1)} \quad \text{-----}(f)$$

同じく全圧/静圧比 P_0/P を用いると 出入口全圧比 $[P_{02}/P_{01} = (P_2/P_1)(P_1/P_{01})(P_{02}/P_2)]$ は

$$P_{02}/P_{01} = \phi (M_1/M_2) [\{2 + (\gamma - 1)M_2^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}]^{(\gamma + 1)/(2(\gamma - 1))} \quad \text{-----}(g)$$

次に(b)式を変形して $1 + (P_f/P_1)(A_2/A_1 - 1) + \rho u_1^2/P_1 = (P_2/P_1)(A_2/A_1) + (\rho u_2^2/P_1)(A_2/A_1)$
 $\rho u^2 = \{P/(RT)\}M^2(\gamma RT) = P\gamma M^2$ であるから、

$$(1 + \gamma M_1^2) + (P_f/P_1)(1/\phi - 1) = (M_1/M_2) [\{2 + (\gamma - 1)M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}]^{1/2} (1 + \gamma M_2^2)$$

これを変形して

$$P_f/P_1 = \{\phi / (1 - \phi)\} [(M_1/M_2) [\{2 + (\gamma - 1)M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}]^{1/2} (1 + \gamma M_2^2) - (1 + \gamma M_1^2)] \quad \text{---}(h)$$

計算に便利なように、 M_1 項と M_2 項を分離すると、

$$M_1 \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}^{1/2} / \{1 + \gamma M_1^2 + (P_f/P_1)(1/\phi - 1)\} = M_2 \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}^{1/2} / (1 + \gamma M_2^2) \quad \text{-----}(i)$$

前述の全圧/静圧比を用いると、ベース圧力/入口静圧比は、

$$P_f/P_{01} = (P_f/P_1) \{1 + (\gamma - 1)M_1^2/2\}^{-\gamma/(\gamma - 1)} \quad \text{-----}(i)$$

次に急拡モデルの熱的な関係を少し丁寧に考えてみる。エントロピ変化 ds は輸送エントロピの変化 ds_e と生成エントロピ ds_i の和であるから

$$ds = ds_e + ds_i = dq_e/T + dq_i/T = dq/T (> dq_e/T)$$

ここで 全熱量変化 dq は内部エネルギー変化 de と定圧膨張変化 $p dv$ の和であるから、 $dq = de + p dv$ 。
 またエンタルピは $h = e + p v$ の関係がありこの微分をとると $dh = de + p dv + v dp \rightarrow de + p dv = dh - v dp$
 故に $dq = dh - v dp$ 。この2つの dq 式を用いると、

$$\textcircled{1} ds = de/T + p dv/T, \quad \textcircled{2} ds = dh/T - v dp/T$$

まず①について、 $de = C_v dT$ と状態式 $Pv = RT (\rightarrow P/T = R/v)$ から、この式は $ds = C_v(dT/T) + R(dv/v)$
 (ここで C_v = 定容比熱、 R = 気体定数)。また、この式の左辺2項の dv は $dv = (dv/d\rho)d\rho$ 、然るに
 $v = 1/\rho$ あるから、 $(dv/d\rho) = -1/\rho^2 \rightarrow dv = -(1/\rho^2)d\rho \rightarrow dv/v = -d\rho/\rho$ 。これを ds 式に代入して
 $ds = C_v(dT/T) - R(d\rho/\rho)$ が得られる。これら2つの ds 式を、ある区間で積分すると、

$$s_2 - s_1 = C_v \ln(T_2/T_1) + R \ln(v_2/v_1), \quad s_2 - s_1 = C_v \ln(T_2/T_1) - R \ln(\rho_2/\rho_1)$$

次に②について、 $dh = C_p dT$ と状態式 $p v = RT (\rightarrow v/T = R/P)$ を用いて、 $ds = C_p(dT/T) - R(dP/P)$
 (ここで C_p = 定圧比熱)。また、 $R = C_p - C_v$ であるから、 $ds = C_p(dT/T - dP/P) + C_v(dP/P)$ 。更にここで、
 状態式の対数をとると $\ln P = \ln \rho + \ln R + \ln T$ 、この微分をとって

$$\{d(\ln P)/dP\} dP = \{d(\ln \rho)/d\rho\} d\rho + \{d(\ln R)/dR\} dR + \{d(\ln T)/dT\} dT$$

$$\rightarrow dP/P = d\rho/\rho + dT/T \rightarrow (dT/T - dP/P) = -d\rho/\rho$$

であるから、上記の ds 式は $ds = C_v(dP/P) - C_p(d\rho/\rho)$ になる。これら ds 式を 1-2 区間で積分すると、

$$s_2 - s_1 = C_p \ln(T_2/T_1) - R \ln(P_2/P_1), \quad s_2 - s_1 = C_v \ln(P_2/P_1) - C_p \ln(\rho_2/\rho_1)$$

これらの4つの式はいずれも、流路の任意区間のエントロピー変化を表わすものである。

因みに等エントロピー変化では、上記の $s_2 - s_1 = C_v \ln(P_2/P_1) - C_p \ln(\rho_2/\rho_1)$ において、 $(s_2 - s_1) = 0$ であるから、 $C_v \ln(P_2/P_1) = C_p \ln(\rho_2/\rho_1)$ 。この式に $C_v = \{1/(\gamma - 1)\}R$ 、 $C_p = \{\gamma/(\gamma - 1)\}R$ を代入して

$$\ln(P_2/P_1) = \gamma \ln(\rho_2/\rho_1) \rightarrow (P_2/P_1) = (\rho_2/\rho_1)^\gamma \rightarrow P_2/\rho_2^\gamma = P_1/\rho_1^\gamma \rightarrow P/\rho^\gamma = \text{一定}$$

また上記の $s_2 - s_1 = C_p \ln(T_2/T_1) - R \ln(P_2/P_1)$ において、 $s_2 - s_1 = 0$ 及び $C_p = \{\gamma/(\gamma - 1)\}R$ を代入して

$$C_p \ln(T_2/T_1) = R \ln(P_2/P_1) \rightarrow (P_2/P_1) = (T_2/T_1)^{\gamma/(\gamma-1)} \rightarrow P/T^{\gamma/(\gamma-1)} = \text{一定}$$

これらは等エントロピー関係を表わす公式としてよく使われている。

上記 $s_2 - s_1 = C_p \ln(T_2/T_1) - R \ln(P_2/P_1)$ では、 $T_0 = T\{1 + (\gamma - 1)M^2/2\}$ 、 $P_0 = P\{1 + (\gamma - 1)M^2/2\}^{\gamma/(\gamma-1)}$ であるから 流速 0 即ちマッハ数 $M=0$ のときは $s_{02} - s_{01} = C_p \ln(T_{02}/T_{01}) - R \ln(P_{02}/P_{01})$ となる。

本ケースは、大きな渦が入口からの噴流の廻りに生じるので、その熱変換を考えれば等エントロピー変化ではなく、単に全温度一定の流れ(全エンタルピー一定の流れ)なので、 $T_{02} = T_{01}$ である。故に前式は、

$s_{02} - s_{01} = -R \ln(P_{02}/P_{01})$ となる。左辺の $(s_{02} - s_{01})$ は、流れが $T \rightarrow T_0$ のように、等エントロピー的にせき止められたとすれば、 $(s_{02} - s_{01}) = (s_2 - s_1)$ であるから、次の式が得られる。即ちエントロピー変化は全圧変化[(f)式]に依存している。

$$(s_2 - s_1)/R = -\ln(P_{02}/P_{01}) \quad \text{------(j)}$$

なお、急拡モデルは前述の通り、全エンタルピー一定の流れであるので、 $h_0 = h + (1/2)u^2 = \text{一定}$ 。故に

$$h_1 + (1/2)u_1^2 = h_2 + (1/2)u_2^2 \quad (h = \text{比エンタルピー})$$

両辺を h_1 で除し $h_2/h_1 = 1 + (1/2)\{(u_1^2 - u_2^2)/h_1\}$ 。この式に、 $u^2 = M^2(\gamma RT)$ 、 $h = \{\gamma R/(\gamma - 1)\}T$ 、 $T_0 = T\{1 + (\gamma - 1)M^2/2\}$ および $T_{01} = T_{02}$ の関係を用いて整理すると、次のエンタルピー関係式が得られる。

$$h_2/h_1 = 1 + \{(\gamma - 1)/2\}M_1^2[1 - (M_2/M_1)^2\{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}/\{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}] \quad \text{------(k)}$$

以上の(d)~(j)式のうち、 (P_2/P_1) 、 (P_{02}/P_{01}) 及び (P_f/P_1) 式はテキスト類⁽¹⁾⁽²⁾で周知の通りである。

テキストによっては、Benedict の Gas dynamic function(気体力学関数)を用いて、上記の諸関係を表わすことがある。参考としてその結果だけを下記に示す。内容的には上記に全く同じである。

$$\textcircled{2} \text{静圧}/\textcircled{1} \text{静圧比} : P_2/P_1 = \phi X_2/X_1$$

$$\textcircled{2} \text{静圧}/\textcircled{1} \text{全圧比} : P_2/P_{01} = (P_2/P_1)Z_1$$

$$\textcircled{1} \text{ベース圧}/\textcircled{1} \text{静圧比} : P_f/P_1 = (\gamma + 1)\{\phi/(1 - \phi)\}[Y_2 - Y_1]/X_1$$

$$\textcircled{1} \text{ベース圧}/\textcircled{1} \text{全圧比} : P_f/P_{01} = (P_f/P_1)Z_1$$

$$\textcircled{2} \text{全圧}/\textcircled{1} \text{全圧比} : P_{02}/P_{01} = (P_2/P_1)(Z_1/Z_2)$$

$$X_1 = P(\gamma, M_1)/P^* = M_1^{-1}\{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}/(\gamma + 1)^{-1/2}$$

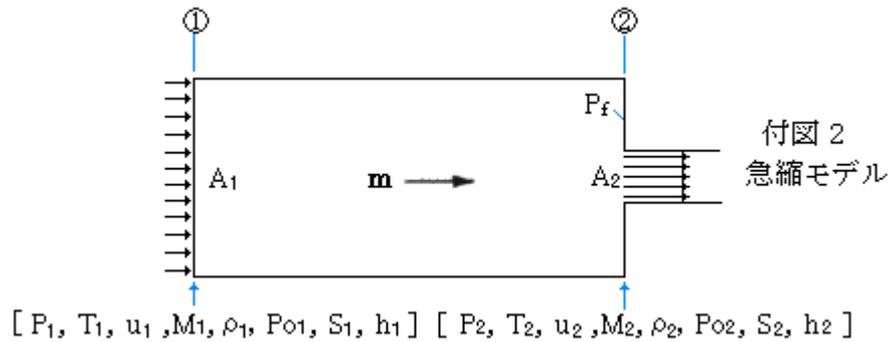
$$X_2 = P(\gamma, M_2)/P^* = M_2^{-1}\{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}/(\gamma + 1)^{-1/2}$$

$$Y_1 = [F(\gamma, M_1)/F^*] = M_1^{-1}(1 + \gamma M_1^2)[2(\gamma + 1)\{1 + (\gamma - 1)M_1^2/2\}]^{-1/2}$$

$$Y_2 = [F(\gamma, M_2)/F^*] = M_2^{-1}(1 + \gamma M_2^2)[2(\gamma + 1)\{1 + (\gamma - 1)M_2^2/2\}]^{-1/2}$$

$$Z_1 = [P(\gamma, M_1)/P_0] = \{1 + (\gamma - 1)M_1^2/2\}^{-\gamma/(\gamma-1)}$$

$$Z_2 = [P(\gamma, M_2)/P_0] = \{1 + (\gamma - 1)M_2^2/2\}^{-\gamma/(\gamma-1)}$$



2. 次に急縮モデルについて。モデルは上図のようになり、急膨モデルの入口/出口をひっくり返したものになる。急膨モデルと同様に、

連続式： $m = \rho_1 A_1 u_1 = \rho_2 A_2 u_2$ -----(a')

運動量保存式： $P_f(A_1 - A_2) + P_2 A_2 - P_1 A_1 = \rho_1 A_1 u_1^2 - \rho_2 A_2 u_2^2$ -----(b')

エネルギー式： $T_0 = T_{01} = T_{02}$ -----(c')

これらの式を用いて同じように、諸関係を求めると以下のようになる。(d')~(g'),(j'),(k')式は、急膨モデルの式と全く同じである。

$(T_2/T_1) = \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}$ -----(d')

$P_2/P_1 = \phi (M_1/M_2) [\{2 + (\gamma - 1)M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}]^{1/2}$ -----(e')

$P_2/P_{01} = (P_2/P_1) \{1 + (\gamma - 1)M_1^2/2\}^{-\gamma/(\gamma-1)}$ -----(f')

$P_{02}/P_{01} = \phi (M_1/M_2) [\{2 + (\gamma - 1)M_2^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}$ -----(g')

$P_f/P_2 = \{1/(\phi - 1)\} [(M_2/M_1) \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}]^{1/2} (1 + \gamma M_1^2) - (1 + \gamma M_2^2)$ --(h')

$M_2 \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}^{1/2} / \{1 + \gamma M_2^2\} + (P_f/P_2)(\phi - 1) = M_1 \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\}^{1/2} / (1 + \gamma M_1^2)$ -----(l')

$P_f/P_{02} = (P_f/P_1) \{1 + (\gamma - 1)M_2^2/2\}^{-\gamma/(\gamma-1)}$ -----(i')

$(s_2 - s_1)/R = -\ln(P_{02}/P_{01})$ -----(j')

$h_2/h_1 = 1 + \{(\gamma - 1)/2\} M_1^2 [1 - (M_2/M_1)^2 \{2 + (\gamma - 1)M_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_2^2\}]$ -----(k')

(2) 急膨要素における傾向についてテキスト(1)の記述を下記に示す・

【7.3 急膨大流れ】から抜粋

1. 急膨大部入口が亜音速流れ ($M_1 < 1$) の場合 本文の(7)式と同じ

前述したように、 $p_f/p_1 = 1$ と仮定すると、式(7.42)より

$$\frac{M_1 \sqrt{2 + (\gamma - 1) M_1^2}}{\gamma M_1^2 + (1/\phi)} = \frac{M_2 \sqrt{2 + (\gamma - 1) M_2^2}}{1 + \gamma M_2^2} \quad (7.43)$$

γ, M_1 および ϕ を与えると、上式より M_2 が求められ、それを式(7.39)と式(7.40)に代入すると、 p_2/p_1 と p_{02}/p_{01} が定まる。

一例として、 $\gamma = 1.4$ の場合の p_{02}/p_{01} と p_1/p_{01} (および M_1) の関係を図 7.7 に示す。図には参考のため、後述の [ノート 7.4] に述べる非圧縮流れの式(7.51)による値を破線で示してある。図より p_{02}/p_{01} は p_1/p_{01} と ϕ が小さいほど小さい。すなわち全圧損失 $(p_{01} - p_{02})/p_{01}$ は、入口マッハ数 M_1 が大きいほど、また面積比 A_2/A_1 が大き

いほど大きくなる。また圧縮流れとして取り扱うと、全圧損失は圧縮性を考慮しない場合よりも大きいことがわかる。この全圧損失は、[例題7・4]に示すように、急拡大部直後のはく離域の圧力 p_f が、はく離のない等エントロピー流れの場合のその部分の平均圧力よりも小さいために生じるものである。

つぎに、 $\gamma=1.4$ の場合の p_{02}/p_{01} と M_2 の関係を図7・8に示す。図の各 ϕ に対する曲線上の白丸は $M_1=1$ の臨界状態となる点を示す。破線は白丸を結んだ線で、破線の下側では、 $M_1 < 1$ である。なお、つぎに述べるように、破線の上側は $M_1=1$ の臨界状態が保たれる領域である。

2. 急拡大部入口が音速流れ($M_1=1$)の場合

この場合、式(7・42)において $M_1=1$ とおき、 p_f/p_1 について解くと

$$\frac{p_f}{p_1} = \frac{\phi}{1-\phi} \left[\frac{(1+\gamma M_2^2)\sqrt{\gamma+1}}{M_2\sqrt{2+(\gamma-1)M_2^2}} - (\gamma+1) \right] \quad (7\cdot44)$$

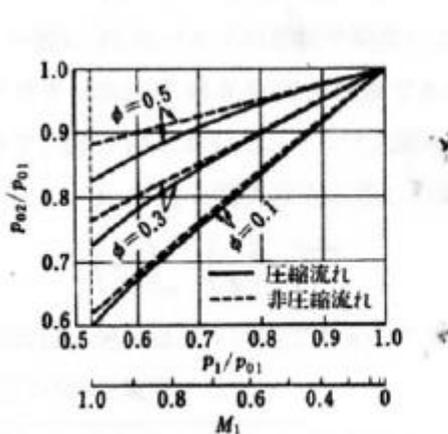


図7・7 急拡大管における流れの全圧損失($\gamma=1.4$)。

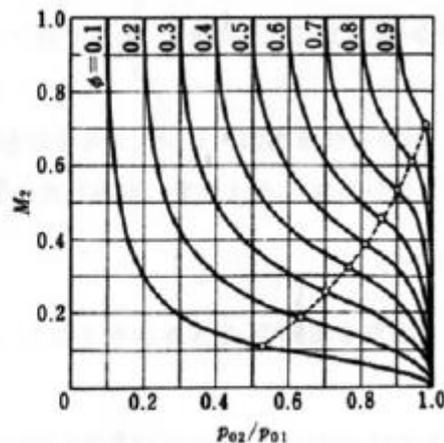


図7・8 急拡大部前後の全圧比 p_{02}/p_{01} と出口マッハ数 M_2 の関係($\gamma=1.4$)。

上式から明らかなように、 p_f/p_1 は M_2 に依存する。すなわち急拡大部入口において $M_1=1$ の場合の急拡大部の流れを定めるには、断面1の状態だけでなく、断面2のマッハ数 M_2 を与える必要がある。上式より、 p_f/p_1 は M_2 の増加とともに減少し、 $M_2 \rightarrow 1$ のとき $p_f/p_1 \rightarrow 0$ となる。

式(7・40)において $\gamma=1.4$ 、 $M_1=1$ として各 ϕ に対して求めた p_{02}/p_{01} と M_2 の関係を図7・8の破線より上側に示す。図から明らかなように、 M_2 は p_{02}/p_{01} の減少とともに増加し、 p_{02}/p_{01} がちょうど ϕ の値に等しくなると、 $M_2=1$ となる。

引用文献テキスト)

- (1) 松尾「圧縮性流体力学—内部流れの理論と解析」(理工学社)
- (2) JSME「技術資料—管路ダクトの流体抵抗」第9章圧縮性流体および蒸気の流れ 9.6
- (3) 「管路系の高速流動特性に関する研究(第2報、急拡大を伴う場合)」森棟、平山、前田
JSME 論文集(B編)46巻404号(S55-4)
- (4) D.S.Miller「Internal Flow Systems(Second Edition)」7.Compressible Flow
- (5) 「An Investigation of Compressible Flow Characteristics of Butterfly Valves」
by A. L. Addy et-al (Trans of the ASME Journal of Fluid Engineering Vol.107,Dec 1985)