

【整番】FE-02-TM-005	【標題】容積要素廻りの準定常的な流量-圧力関係とその運用
分類：流れ(圧縮性流れ)/種別：技術メモ	作成年月：H20. 1 / 改訂：Ver0. 0 (H20. 1) 作成者：N.Miyamoto

全 11 枚

出入口以外は密閉された気体タンクないし気相を持ったタンクでは、出入口流量が変化すると気体は圧縮されて圧力上昇がおき、逆に出入口流量に変化を生じる。例えばタンクに充気するときやタンクから排気するときどれほど時間がかかるかといった問題を解く時、その容積要素廻りの流量-圧力関係が必要になる。本 TS では準定常的な密閉気体タンク廻りの流量-圧力関係を示し、その運用例として密閉タンクに充気する場合の圧力の時間変化の計算法を例示する。

1. タンクの圧力と出入口流量の関係

(1) 図 1 のモデルにおいてはタンクの出入口流量が変化するときタンク内圧も変化する。この関係は、

$$\text{断熱タンク： } dP/dt = (\gamma R/V) (T_i m_i - T_o m_o) = (\gamma / V) \{ (P_i / \rho_i) m_i - (P_o / \rho_o) m_o \} \quad \text{----- (a)}$$

$$\text{等温タンク： } dP/dt = (R/V) (T_i m_i - T_o m_o) = (1/V) \{ (P_i / \rho_i) m_i - (P_o / \rho_o) m_o \} \quad \text{----- (b)}$$

ここで P = タンク圧力(N/m²)、 t = 時間(sec.)、 d = 微分演算子

T_i = 入口側全温度(K)、 T_o = 出口側(=タンク内)全温度(K)、

ρ_i = 入口側流体密度(kg/m³)、 ρ_o = 出口側(=タンク内)流体密度(kg/m³)、

P_i = 入口側全圧力(N/m²)、 P_o = 出口側(=タンク内)全圧力(N/m²)、

m_i = 流入質量流量(kg/s)、 m_o = 流出質量流量(kg/s)

V = タンク容積(m³)、 R = 気体定数{J/(kgK)}、 γ = 比熱比(-)

なお、断熱タンクとは容積部に対し等エントロピ変化、等温タンクとは容積部に対し等温変化を仮定したものを云う。上式から判るように断熱タンクの圧力変化は等温タンクのその γ 倍になる。

当初から各部の流体温度がほぼ同じで流量変化($m_i - m_o$)が微小のときは、次のように簡略化しても大きな誤差にはならないと思われる。これは設備の動特性計算などに使用できる。

$$\text{断熱タンク： } dP/dt = (\gamma RT/V) (m_i - m_o) = \{ \gamma P / (\rho V) \} (m_i - m_o)$$

$$\text{等温タンク： } dP/dt = (RT/V) (m_i - m_o) = \{ P / (\rho V) \} (m_i - m_o)$$

ここで P 、 T = タンクも含めた流体の全圧力、全温度

(2) 上記の(a)(b)式は非定常変化を表わす式であるが、圧力波の伝播を解くものではないので、緩やかな変化いわゆる準定常的な変化に適用を限る。例えば、設備運転の恒常的な推移(流量などの変化)やバッチ的な充気操作あるは排気操作などを検討する場合に適している。ここではその一つの運用例としてタンクに充気する時の圧力の時間変化の計算を以下に示す。

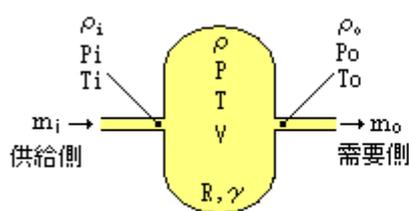


図1. 基本モデル

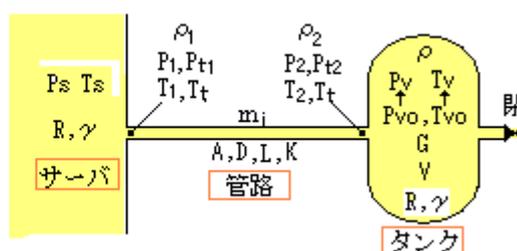


図2. 充気モデル

2. 運用例－断熱タンクに充気する場合の計算

- (1) 図2のようなモデルを考える。サーバの圧力は一定で、サーバからタンクに至る管路の圧力降下は主に粘性抵抗即ち摩擦圧損に因るもの(いわゆるファノ流れ)とする。この場合、タンクの流量－圧力関係は、(a)式で $m_0=0$ とおいて次のようになる。

$$dP/dt = (\gamma RT_i/V) m_i = (\gamma P_i / (\rho_i V)) m_i \quad \text{-----}(c)$$

なお、入口全温度 T_i はファノ流れであるから、 $T_i = T_s$ ($T_s =$ サーバ温度)である。

- (2) サーバとタンクの差圧が少なくタンク入口マッハ数が小さいとき ($M < 0.3$ 程度) は、非圧縮性流れで近似できる。この場合、タンク圧力の時間変化 $P(t)$ は次のようである。

$$P(t) = P_s - \{ (P_s - P_{v0})^{0.5} - (1/2)(\gamma RT_s/V)(2\rho_f gA^2/K)^{0.5} t \}^2 \quad \text{-----}(d)$$

ここで $P_s =$ サーバ圧力 (N/m^2)、 $P_{v0} =$ タンクの初期圧力 (N/m^2)、 $T_s =$ サーバ温度 (K)
 $V =$ タンク容積 (m^3)、 $\gamma =$ 流体の比熱比 (-)、 $R =$ 気体定数 [$J/(kgK)$]、 $t =$ 経過時間 (s)
 $\rho_f =$ 管路内流体の密度 (kg/m^3) $\doteq (0.75P_s + 0.25P_0)/(RT_s)$ 、
 $A =$ 管路断面積 (m^2)、 $g =$ 重力加速度 (m/s^2)
 $K =$ 管路の圧損係数 ($= \lambda L/D + \sum k_c$)、 $\lambda =$ 管摩擦係数 (-) (Moody 線図ベース)
 $L =$ 管路長さ (m)、 $D =$ 管路内径 (m)、 $k_c =$ 管路構成要素の圧損係数 (-)
 (管摩擦係数 λ は一定ではないが、ここでは略 10^6 以上のレイノルズ数を用いて Moody 線図から適当な値を設定する。)

なお、全充気時間 t_e は、上式で $P(t) = P_s$ 、 $t = t_e$ とおいて、

$$t_e = 2(P_s - P_{v0})^{0.5} / \{ (\gamma RT_s/V)(2\rho_f gA^2/K)^{0.5} \}$$

となる。また最大流量 $(m_i)_{max}$ 及びマッハ数 M は次のようになる。

$$(m_i)_{max} = (2\rho_f gA^2/K)^{0.5} (P_s - P_{v0})^{0.5}$$

$$M = U/a = \{ m_i / (\rho_f A) \} / (\kappa RT_s)$$

(この M 値の 1.5 倍をとってタンク入口マッハ数とし、それが 0.3 以下であれば (d) 式は近似式として使えるのではないかと思う。)

- (3) サーバ～タンクの差圧が大きくてタンク入口マッハ数が高いときは、以下のフローチャートによるものとする。なお、チャートで用いた記号の説明は以下の通り

$P_s =$ サーバ圧力 (N/m^2)、 $T_s =$ サーバ温度 (全温度) (K)、

$P_{v0} =$ タンク初期圧力 (N/m^2)、 $T_{v0} =$ タンク初期温度 (K)

$P_{t1} =$ 管路入口全圧力 (N/m^2)、 $P_1 =$ 管路入口静圧 (N/m^2)、 $P_2 =$ 管路出口静圧 (N/m^2)

$T_t =$ 管路の全温度 (K)、 $\rho_1 =$ 管路入口密度 (kg/m^3)、 $A =$ 管路断面積 (m^2)

$M_1 =$ 管路入口マッハ数 (-)、 $M_2 =$ 管路出口マッハ数 (-)、

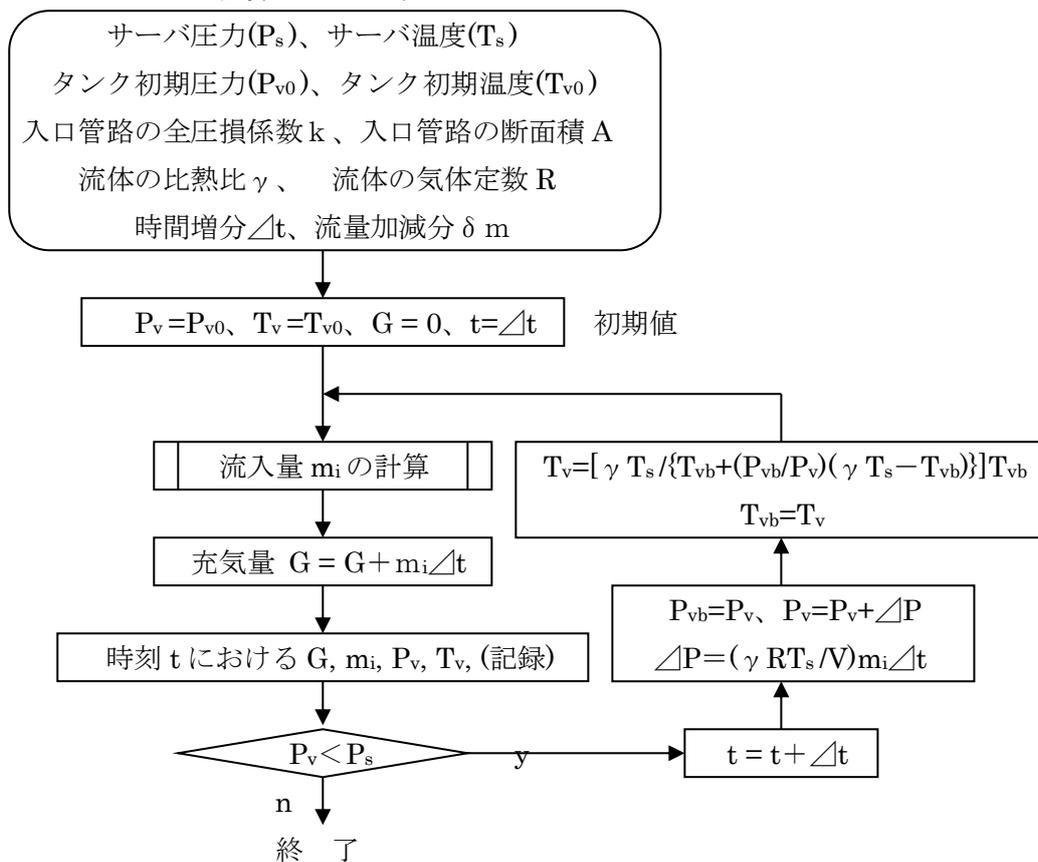
$m_i =$ 流入流量 (kg/s)、 $G =$ 任意時刻 t までの累積流入量 (kg)、

$K =$ 管路の圧損係数 ($= \lambda L/D + \sum k_c$) ----- $\lambda, L, D, k_c \rightarrow$ 前 (2) 項に同じ

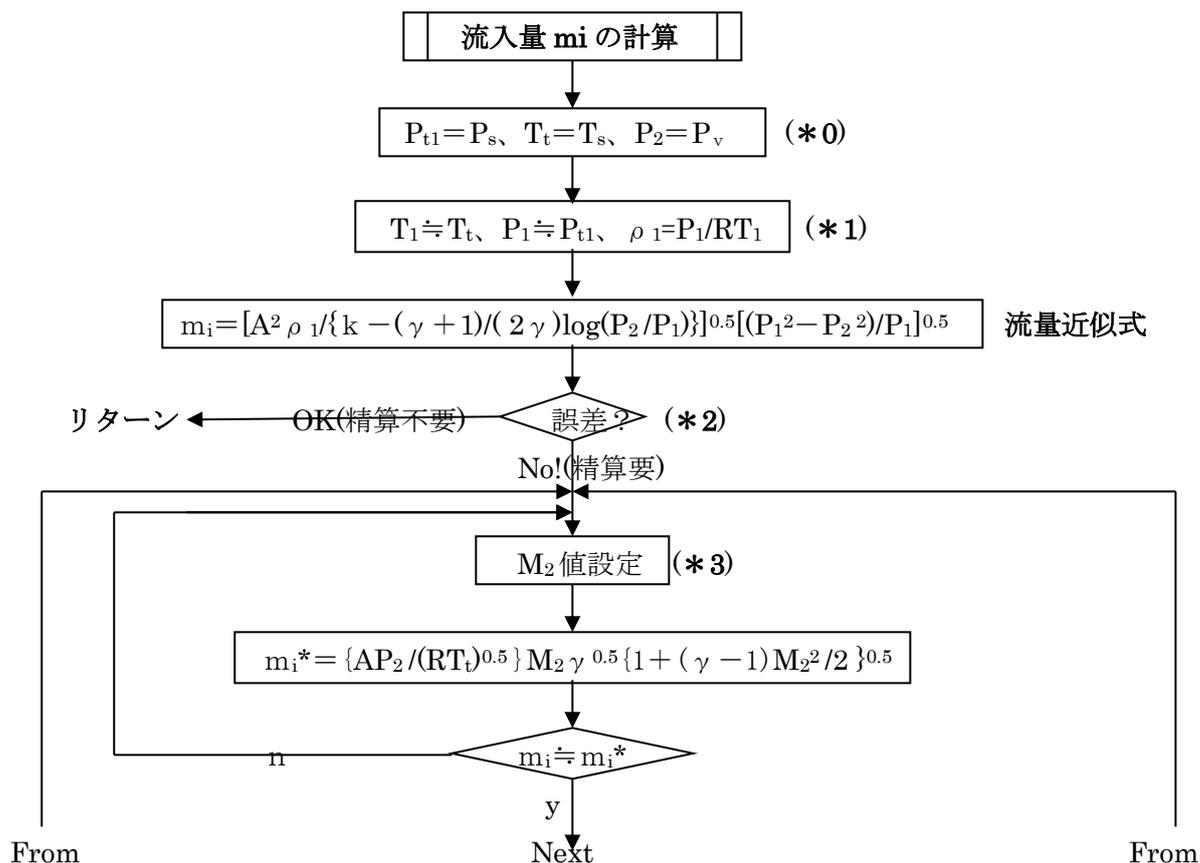
$\gamma =$ 流体の比熱比 (-)、 $R =$ 流体の気体定数 [$J/(kgK)$]、

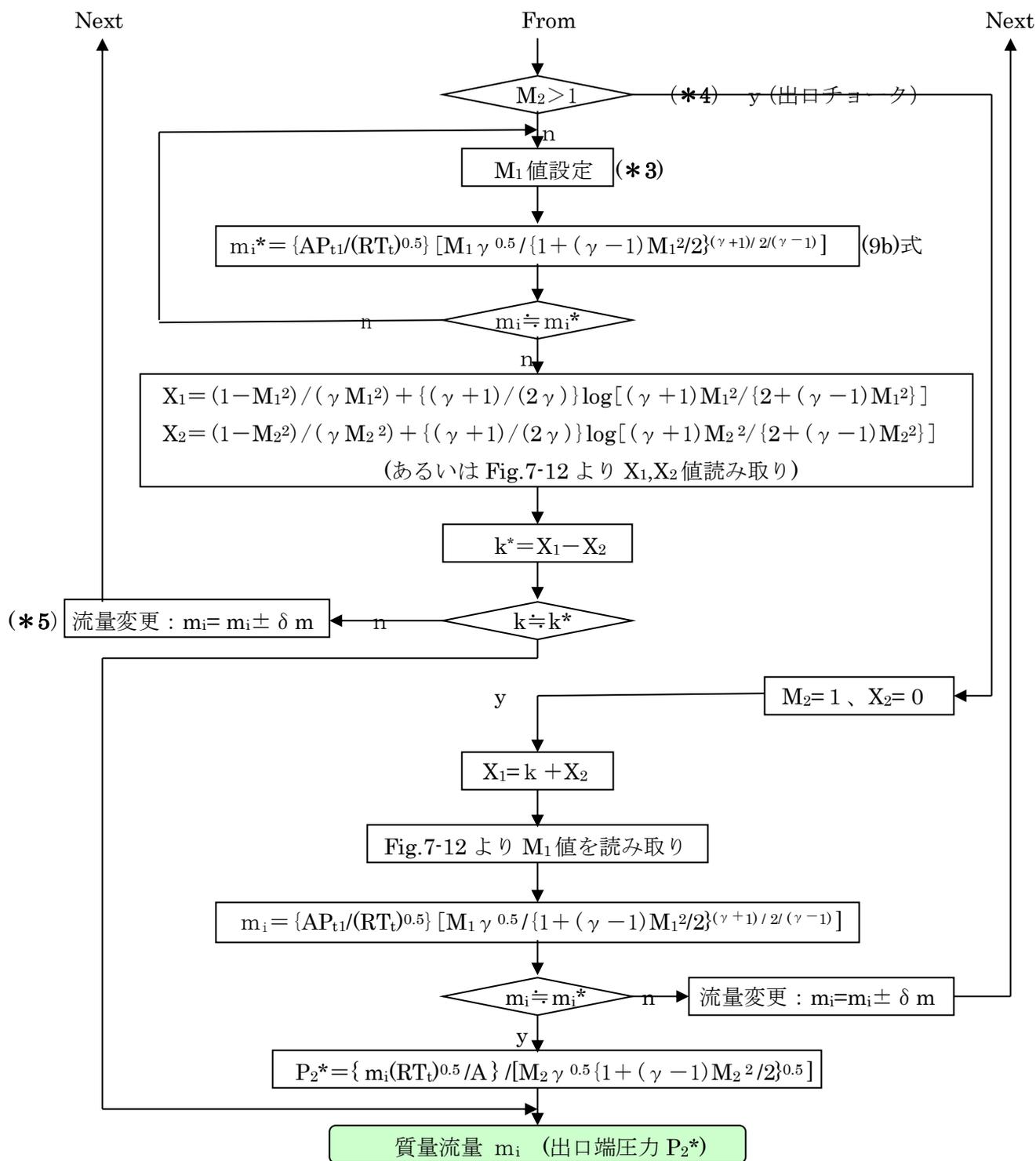
$\Delta t =$ 時間増分 (1~10 sec 程度?)、 $\delta m =$ 流量加減分 (kg/s)

計算フローチャート



(脚注) P_{vb} 、 T_{vb} → 各変化ステップで、変化前の圧力、温度を云う。変化後 P_v 、 T_v に変わる。
 “流入量 m_i の計算モジュール” は下記の通り。





脚 注

(*0) $P_2 = P_v$ とすることについては、解説の 3.項を参照のこと。

(*1) 流量近似式は $\rho_1 (= P_1 / RT_1)$ 、 P_1 を含んでおり T_1, P_1 がわからないと計算できない。

然るに全温度 T_t と流体の静温度 T の関係は $T_t = T\{1 + (\gamma - 1)M^2/2\}$ 、全圧力 P_t と静圧 P の関係は $P_t = P\{1 + (\gamma - 1)M^2/2\}^{\gamma/(\gamma-1)}$ であるから、マッハ数がわからないと静温度 T_1, P_1 は得られない。初期段階ではまだマッハ数はわからないのでやむなく $T_1 \doteq T_t$ 、 $P_1 \doteq P_{t1}$ にしている。この場合 T_1 の誤差は小さく P_1 の誤差は大きくなるが、 $M_1 = 0.3 \sim 0.5$ 程度までは P_1 の誤差も極端ではないと思える。

- (*2) 流量近似式は、出口マッハ数がかかなり高くなっても大きな誤差はでないと思えるが、まだ十分確認していない。出口マッハ数がそれほど高くない見込みあるいはそれほど精度を要しない計算であれば、更に精算することなくここで打ち切ればよいと思う。
- (*3) m_i *式の{ }内の $(\gamma - 1)M^2/2$ を無視して得られる式 $M = m_i(RT_i)^{0.5}/(\gamma^{0.5}AP)$ を用いて初期設定値を設定すれば、収束が速い。ただ、末端チョークでは誤差が大きいのか？
- (*4) 管路端のマッハ数が1を越えるのは、タンク圧力 P_2 が低すぎるためと思われる。マッハ数が1以上の超音速を実現するには特殊なノズルが必要である。通常の管路では $M_2 = 1$ で頭打ちになるので、 $M_2 = 1$ にFixさせて再度 M_1 を計算して M_1 、 M_2 から管路端圧力 P_2^* を求める。因みに $M_2 < 1$ の亜音速域では $P_2^* = P_2$ である(ここではその積もりで当初、 P_2 を用いて計算している)。しかしチョークして $M_2 = 1$ になれば $P_2^* > P_2$ になる。チョークするとこの部分で不連続になるからである。この辺を念頭に入れて計算すべきある。
- (*5) 流量近似式で計算した近似流量をもちいて(1)式が成立するかをチェックするが、もし誤差が大きくて我慢できないなら、微量量($\pm 2\%$ 程度)を加減して計算を繰り返す。

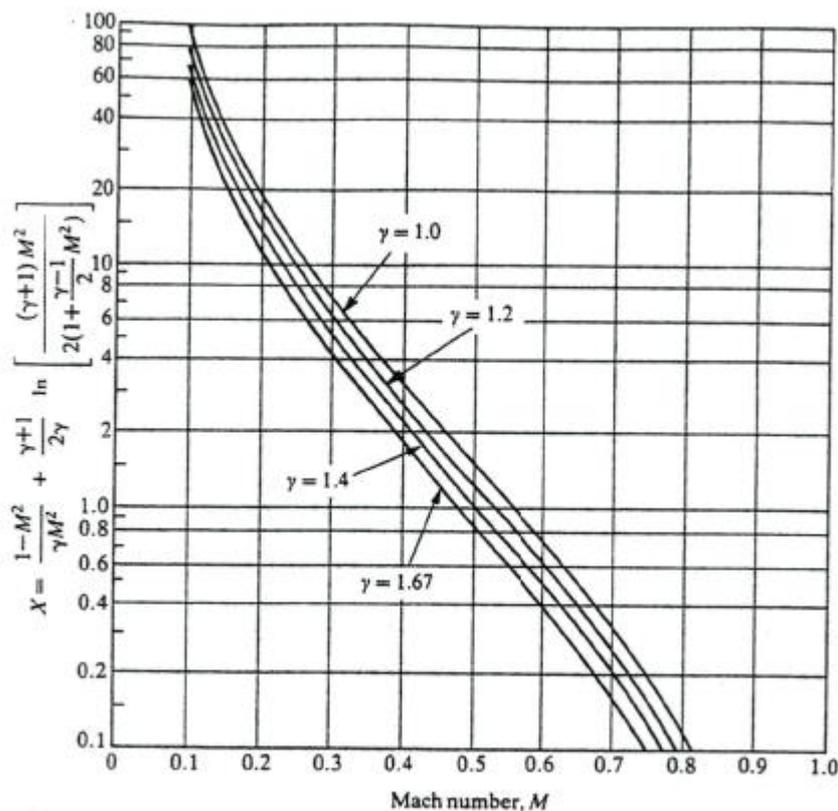


Fig. 7.12 Loss coefficient parameter X

(D.S.Miller "Internal flow systems (second edition)"(BHRA)より抜粋)

【 解 説 】

1. 断熱タンクの(a)式は、谷下先生の熱力テキスト⁽¹⁾を準用して、次のように導かれている。

容積部において エネルギー収支は

$$Q_{12} = U_2 - U_1 + AL_{12} \quad \text{-----}(1)$$

ここで、 Q_1 =外部への放熱、 U =内部エネルギー、 L =外部仕事、 A =仕事の熱当量
サフィックス 1,2=変化前、変化後を指す。

断熱変化の場合 $Q_{12}=0$ である。また U_2, U_1, L_{12} は

$$U_1 = G_{v0}C_vT_{v0} + G_iC_vT_i - G_oC_vT_o, \quad U_2 = (G_{v1} + G_i - G_o)C_vT_{v1}, \quad L_{12} = -(P_iV_i - P_oV_o)$$

但し C_v =定容比熱、 G =質量、 T =全温度、 P =全圧、 V =体積

サフィックス $v, i, o \rightarrow$ タンク内, 流入分, 流出分の意、 $0, 1 \rightarrow$ 流入前, 流入後の意

これを(1)式に代入しさらに R を乗じて、

$$C_v(G_{v0} + G_i - G_o)RT_{v1} - C_vG_{v0}RT_{v0} - C_vG_iRT_i + C_vG_oRT_o - AR(P_iV_i - P_oV_o) = 0$$

この式においては、

$$(G_o + G_i - G_o)RT_{v1} = P_{v1}V_v, \quad G_{v0}RT_{v0} = P_{v0}V_v, \quad G_iRT_i = P_iV_i, \quad G_oRT_o = P_oV_o, \quad AR = (\gamma - 1)C_v$$

但し R =気体定数、 γ =比熱比、 V_v =タンク容積、

これを上式に代入し整理すると

$$(P_{v1} - P_{v0})V_v = \gamma(P_iV_i - P_oV_o) = \gamma(G_iRT_i - G_oRT_o) \quad \text{-----}(2)$$

$(P_{v1} - P_{v0}) = dP$ 、 $G_i = m_i dt$ 、 $G_o = m_o dt$ また $P/\rho = RT$ であるから、

$$dP/dt = (\gamma R/V_v)(T_i m_i - T_o m_o) = (\gamma/V_v)\{(P_i/\rho_i)m_i - (P_o/\rho_o)m_o\} \quad \text{-----}(3)$$

但し m_i =流入質量、 m_o =流出質量、 ρ_i =流入側流体密度、 ρ_o =流出側流体密度

この式で、 $V = V_v$ と表示したものが本文の(a)式である。

等温タンクの場合、内部エネルギー U は変化しないので $U_2 - U_1 = 0$ となり、外部仕事は全て圧力上昇になる。そこで、

$$V_v dP = P_i V_i - P_o V_o = (P_i/\rho_i)G_i - (P_o/\rho_o)G_o = RT_i m_i dt - RT_o m_o dt$$

よって $dP/dt = (R/V_v)(T_i m_i - T_o m_o) = (1/V_v)\{(P_i/\rho_i)m_i - (P_o/\rho_o)m_o\}$

初期タンク温度が流入する流体温度と変わらないなら、 $T_i = T_o = T$ になり、

$$dP/dt = (RT/V_v)(m_i - m_o)$$

断熱タンクにおいても初期温度に差異が少なく、 $(m_i - m_o)$ が微少なら、同様に

$$dP/dt \approx (\gamma RT/V_v)(m_i - m_o)$$

になると思われる。

2. (a)(b)式は、種々の容積要素廻りの準定常問題に使える。ここでは、その1例として断熱された密閉タンクに、多少離れた位置にある加圧源からチューブを繋いで充気する場合を取り上げて検討してみた。この場合、基本式(a)は $m_o = 0$ とおいて

$$dP/dt = (\gamma RT_i/V) m_i = (\gamma P_i/(\rho_i V)) m_i \quad \text{-----}(4)$$

式を解く上で唯一、入口管路の扱いが問題になる。管路の圧力降下が少なく低マッハ数で流れる時は非圧縮性流れで扱えるが、加圧源～タンクの圧力差(あるいは圧力比)が著しく、高いマッハ数になれば圧縮性流れで扱う必要がある。

まず、非圧縮性流れで扱う場合は、管路の圧力損失は $\Delta P = (P_s - P) = \{k / (2 \rho_f g A^2)\} m_i^2$ であるから

$$m_i = (2 \rho_f g A^2 / k)^{0.5} (P_s - P)^{0.5}$$

これを(4)式に代入し、 $T_i = T_s$ として

$$dP/dt = (\gamma RT_s / V) (2 \rho_f g A^2 / k)^{0.5} (P_s - P)^{0.5} = A (P_s - P)^{0.5} \quad [但し A = (\gamma RT_s / V) (2 \rho_f g A^2 / k)^{0.5}]$$

これを積分して $t = (1/A) \int \{1 / (P_s - P)^{0.5}\} dP + C = -(2/A) (P_s - P)^{0.5} + C$

$t=0$ で $P = P_{v0}$ なので、 $C = (2/A) (P_s - P_{v0})^{0.5}$ なので

$$t = (2/A) \{ (P_s - P_{v0})^{0.5} - (P_s - P)^{0.5} \}$$

あるいは $P = P_s - \{ (P_s - P_{v0})^{0.5} - (A/2)t \}^2$ -----(5)

最終的には、 $P \rightarrow P_s$ になるので、全充気時間 t_e は、

$$t_e = 2(P_s - P_{v0})^{0.5} / A \quad \text{-----(6)}$$

パラメータ A は定数として扱っているが、管路中の流体密度 ρ_f と圧損係数 K に含まれるダルシ - の摩擦損失係数 λ は夫々 [圧力、温度]、[レイノルズ数(流速)] に依存して変化する。

流体密度 ρ_f では充気中に $(P_s \sim P_{v0}) \rightarrow (P_s \sim P_s)$ に変化するのので、各平均の平均をとって $(0.25P_{v0} + 0.75P_s)$ を基準圧力とし、また多少高めになるがサーバ温度 T_s をもって基準温度として $\rho_f = (0.25P_{v0} + 0.75P_s) / (RT_s)$ とする。

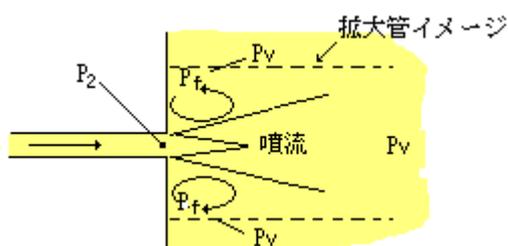
一方、摩擦損失係数 λ は、通常気体流れのレイノルズ数は 10^6 以上になるので、その辺で Moody 線図から適宜、選択する (この辺、徹底すれば反復計算になるので、後で流速をチェックして補正するかして簡易的にフィットさせる程度にとどめる)。

3. 上記の非圧縮性流れ近似が成立するのはむしろまれで、充気当初の高い差圧では圧縮性流れで扱わざるを得ない。特に圧力比 $[P_{v0}/P_s]$ が 0.6 を下回るようになると末端チョーク流れになってしまう。そこで、流量 m_i をファノ流れ式で求めるようにする。ここでは m_i の算定は、

【FE-02-TM-011 ファノ流れ計算に関する情報】

のチャート 1 ”出入口の圧力が既知で、流量を求める場合” を転用した(記号は多少変更している)。

[なお、チャート 1 では、管路出口(タンク入口)静圧 = タンク全圧とおいているが、これには筆者自身不安が残っている。この種の急拡大部ではマッハ $M < 1$ で下図のように $P_2 \doteq P_f \doteq P_v$ と考えているが、この考えで通るのか? また仮にこれが通るとして $M = 1$ では P_f と P_2 がかなり隔離してくるのでは? という疑念がある。読者の判断を乞う]



4. 計算チャートでは流量 m_i の計算をメインにして反復計算を行い、各時刻の流量/タンク圧力/蓄積充気量が得られタンク圧力の時間変化がグラフ化できる。

この場合、タンク温度 T_{v1} は直接的に効いてこないが、次のようにもとめることができる⁽¹⁾。

(2)式を変形して、 $G_i = (P_{v1} - P_{v0})V_v / (\gamma RT_i)$ 、また

$$G_i = (G_{v0} + G_i) - G_{v0} = P_{v1}V_v / (RT_{v1}) - P_{v0}V_v / (RT_{v0}) = (V_v/R)(P_{v1}/T_{v1} - P_{v0}/T_{v0})$$

これらを等置して

$$T_{v1} = [\gamma T_i / \{T_{v0} + (P_{v0}/P_{v1})(\gamma T_i - T_{v0})\}] T_{v0}$$

$T_v = T_{v1}$ 、 $T_s = T_i$ 、 $T_{vb} = T_{v0}$ 、 $P_{vb} = P_{v0}$ 、 $P_v = P_{v1}$ とすれば、

$$T_v = [\gamma T_s / \{T_{vb} + (P_{vb}/P_v)(\gamma T_s - T_{vb})\}] T_{vb}$$

が得られる。

5. ここではサーバからの管路はファノ流れ(摩擦断熱流れ)で扱っているが、バルブ/オリフィスのような絞り構造を入れると等エントロピ的な減圧が加わってくる。ただ等エントロピ流れ+ファノ流れの扱いは厄介なので、この充気計算ではファノ流れ 100%で考えている。例えばオリフィスによる減圧の割合が高くなる時は、実際との乖離が大きくなるので注意を要す。今後検討。

なお、タンクからの直接排気(管路を介さない)については、チョーク状態につき文献(2)に計算方法がでている。この方法は、基本式において文献(1)とそぐわない印象がある。今後検討。

テキスト(1)と(2)については該当部分を添付する。

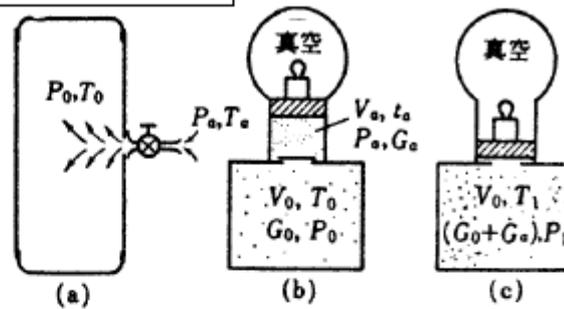
引用文献)

- (1) 谷下市松「工業熱力学 - 基礎編」(裳華房) 第7版 3.6.7
 (2) 松尾「圧縮性流体力学 - 内部流れの理論と解析」(理工学社) 4.8 タンクからの気体の放出

b. 気体の非定常流れの際の絞り

(1) 外気を容器に充填する場合の変化

これには 3-13(a) 図に示すように容器内を真空にしておいて栓を開いて外気を充填する場合と、3-14 図に示すように圧力の異なる 2 個の容器間の栓を開く場合とある。



3-13 図 外気の充填

また、ポンプで気体を圧縮して容器に押し込む場合も、前者に属すると考えることができる。3-13 (a) 図において、始め容器内に $G_0 \text{ kg}$ の空気があり、その状態を P_0, T_0 とし、その中へ状態 P_a, T_a なる外気を $G_a \text{ kg}$ だけ栓を開いて絞りながら入れた後の容器内の状態を P_1, T_1 とする。この場合の変化を考え易くするために、3-13 (b) 図に示すように、この容器に取り付けられた真空の器内に G_a の空気が入っていて、その圧力が P_a に等しくなるようにピストンの上におもりをのせてあり、次に栓を開いてじょじょに G_a の空気を容器内に入れた (3-13 (c) 図) と考えても、3-13 (a) 図の場合と何等異なるところはない。なお、このとき外部との熱交換がないように容器をよく保温してあるものと考えれば、式 (2-17) で $Q_{12}=0$ となり、また外部のおもりによって気体に $P_a V_a$ なる仕事が行なわれるから、同式の $L_{12} = -P_a V_a$ となり、したがって $U_2 - U_1 - AP_a V_a = 0$ となる。しかるに、いまは容器内の全気体について考えているから、式 (3-10) から

$$U_1 = G_0 c_v T_0 + G_a c_v T_a$$

$$U_2 = (G_0 + G_a) c_v T_1$$

となり、これを前式に代入すると、

$$c_v (G_0 + G_a) T_1 - c_v G_0 T_0 - c_v G_a T_a - AP_a V_a = 0$$

この式の両辺に R を乗じ、かつ

$$\begin{aligned} (G_0 + G_a) RT_1 &= P_1 V_0, & G_0 RT_0 &= P_0 V_0, \\ P_a V_a &= G_a RT_a, & AR &= (\kappa - 1) c_v \end{aligned}$$

なる関係を代入すれば

$$G_a = \frac{(P_1 - P_0) V_0}{\kappa RT_a} \quad (3.54)$$

また、一方において

$$G_a = (G_0 + G_a) - G_0 = P_1 V_0 / RT_1 - P_0 V_0 / RT_0$$

であるから、この関係を式 (3.54) に代入して整理すれば、次式がえられる。

$$T_1 = T_0 \frac{\kappa T_a}{T_0 + (\kappa T_a - T_0) \frac{P_0}{P_1}} \quad (3.55)$$

ゆえに、容器にある量の外気を入れたとき、容器内の圧力 P_1 を測定すれば、式 (3.54) および (3.55) から、入れた空気量およびその温度が求められる。式 (3.54) および (3.55) には外気の圧力を含んでいないことは注意すべきである。もし、容器内の始めの温度 T_0 が外気温度 T_a の κ 倍に等しいときは、式 (3.55) は $T_1 = T_0$ となる。また $T_0 = T_a$ の場合には

$$T_1 = T_a \frac{\kappa}{1 + (\kappa - 1) \frac{P_0}{P_1}} \quad (3.55a)$$

となる。この式から、容器内が始め真空 ($P_0 = 0$) であれば P_1 の如何に関せず、 $T_1 = \kappa T_a$ となることも知られる。

4・8 タンクからの気体の放出

タンクに貯えられた気体を使用したり、タンクの安全弁が作動したりすると、気体の放出に伴い、タンク内の圧力は時間とともに減少する。このような流れは、もちろん非定常流れであるが、状態量の時間的変化が比較的ゆるやかな場合には、近似的に各瞬間の流れを定常流れとみなし、定常流れの関係式を適用して解析できる。このような取り扱いを、準定常(quasi-steady)という。

図4・16に示すように、容積 V のタンクに、圧力 p_{0i} 、温度 T_{0i} の気体が貯えられており、これを大気圧 p_a の大気へ放出する流れを、準定常流れとして解析しよう。いま、時刻 $t=0$ に、断面積 A_e の取出口を瞬間的に開口し、この瞬間に流れは取出口でチョークすると仮定する。任意の時刻 t におけるタンク内の圧力を p_0 、温度を T_0 とすれば、その時刻にタンクから流出する質量流量 \dot{m} は、式(4・24)より

$$\dot{m} = \frac{p_0 A_e}{\sqrt{RT_0}} \sigma^* \quad (4\cdot50)$$

微小時間 dt の間に流出する流量は $\dot{m} dt$ で、この間にタンク内の気体の質量 $Vd\rho_0$ だけ減少するから

$$\dot{m} dt = -Vd\rho_0 \quad (4\cdot51)$$

流れが取出口でチョークする最小の p_0 を p_{0f} とすれば、式(4・19)より

$$\frac{p_a}{p_{0f}} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4\cdot52)$$

さて、気体の放出に伴うタンク内の気体の状態変化を等エントロピー変化と仮定すると、式(1・81)より

$$T_0 = T_{0i} \left(\frac{\rho_0}{\rho_{0i}} \right)^{\gamma-1} \quad (4\cdot53)$$

上式の T_0 と $p_0 = \rho_0 RT_0$ を式(4・50)に代入すると

$$\dot{m} = A_e \sigma^* \rho_0 \sqrt{RT_{0i}} \left(\frac{\rho_0}{\rho_{0i}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (4\cdot54)$$

上式の \dot{m} を式(4・51)に代入し、時間 t について0から t まで、密度 ρ_0 について初期値 ρ_{0i} から ρ_0 まで積分すると、次式が得られる。

$$\frac{A_e \sigma^* \sqrt{RT_{0i}}}{V} t = \frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{\rho_{0i}}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1 \right] \quad (4\cdot55)$$

上式より

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho_{0i}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} = \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) \frac{A_e \sigma^* \sqrt{RT_{0i}}}{V} t \right]^{-1} \equiv F(t) \quad (4\cdot56)$$

とおけば

$$\frac{\rho_0}{\rho_{0i}} = [F(t)]^{\frac{2}{\gamma-1}} \quad (4\cdot57)$$

また、等エントロピー変化の関係より

$$\frac{p_0}{p_{0i}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_{0i}} \right)^\gamma = [F(t)]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (4\cdot58)$$

$$\frac{T_0}{T_{0i}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_{0i}} \right)^{\gamma-1} = [F(t)]^2 \quad (4\cdot59)$$

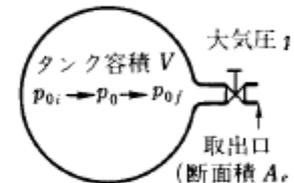


図4・16 タンクからの気体の放出。

式(4.57)の ρ_0 を式(4.54)に代入すると、質量流量 \dot{m} は

$$\dot{m} = \frac{A_e \sigma^* p_{0i}}{\sqrt{RT_{0i}}} [F(t)]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (4.60)$$

取出口における流れのチョークは、 p_0 が式(4.52)の p_{0f} に減少するまで続く。その持続時間 t_w は、式(4.56)の ρ_0/ρ_{0i} を式(4.58)に代入し

$$t_w = \left(\frac{2}{\gamma-1} \right) \frac{V}{A_e \sigma^* \sqrt{RT_{0i}}} \left[\left(\frac{p_{0i}}{p_a} \frac{p_a}{p_{0f}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] \quad (4.61)$$

上式の p_a/p_{0f} に式(4.52)を代入すると

$$t_w = \left(\frac{2}{\gamma-1} \right) \frac{V}{A_e \sigma^* \sqrt{RT_{0i}}} \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p_{0i}}{p_a} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] \quad (4.62)$$

一例として、容積 $V=10 \text{ m}^3$ のタンク内の空気 $[\gamma=1.4, R=287.1 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K}), T_{0i}=300 \text{ K}]$ が $A_e=20 \text{ cm}^2$ の取出口から放出されるとし、式(4.58)による圧力比 p_0/p_{0i} と時間 t の関係を、図4.17に示す。図の等温変化の曲線は、後述の式(4.65)による計算結果である。

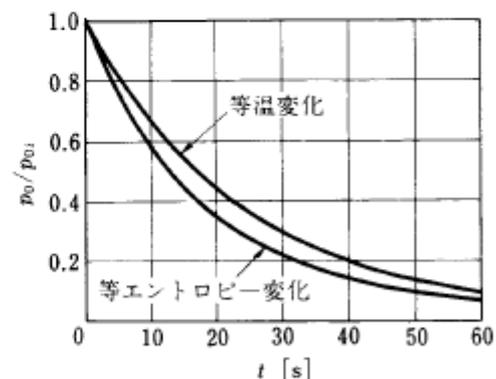


図4.17 気体の放出に伴うタンク内圧力の時間的变化(空気, $V=10 \text{ m}^3$, $A_e=20 \text{ cm}^2$).

[ノート4.4] タンク内の気体が等温変化をする場合

タンクの熱容量が十分大きく、タンク内の気

体が膨張する過程でタンクより熱を受けとることができれば、膨張による気体の温度低下をある程度防ぐことができる。実際、7.6で述べる吹出し式超音速風洞では、貯気槽内の空気の温度は急激に低下する。これを防ぐため、大形の貯気槽では、その内部に、多数の波板鋼板を層状に重ねた蓄熱体を設置することが多い。この場合、空気は波板の層を通過する際に、板から加熱され、貯気槽を出た空気は大体一定温度の空気として実験装置に供給される。

タンク内の気体温度が初期温度 T_{0i} に保たれる場合、式(4.50)を変形すると

$$\dot{m} = A_e \sigma^* \rho_0 \sqrt{RT_{0i}} \quad (4.63)$$

上式の \dot{m} を式(4.51)に代入し、積分すると

$$\frac{A_e \sigma^* \sqrt{RT_{0i}}}{V} t = -\ln \left(\frac{\rho_0}{\rho_{0i}} \right) \quad (4.64)$$

等温変化では、 $p_0/\rho_0 = p_{0i}/\rho_{0i}$ が成り立つ。この関係と上式より

$$\frac{p_0}{p_{0i}} = \frac{\rho_0}{\rho_{0i}} = \exp \left(-\frac{A_e \sigma^* \sqrt{RT_{0i}}}{V} t \right) \quad (4.65)$$

上式の ρ_0 を式(4.63)に代入すると、質量流量 \dot{m} は

$$\dot{m} = \frac{A_e \sigma^* p_{0i}}{\sqrt{RT_{0i}}} \exp \left(-\frac{A_e \sigma^* \sqrt{RT_{0i}}}{V} t \right) \quad (4.66)$$

以上