

【整番】 FE-01-TG-006	【標題】 運動量保存式の運用例－構造側からの反力
分類：流れ(全般)／種別：技術手引き	作成年月：H29.11／改訂：Ver.0.0 (H30.4) 作成者：N. Miyamoto

全 11 枚

はじめに

運動量(モーメントム)の保存則は運動方程式のベースとして流体解析に用いられおり

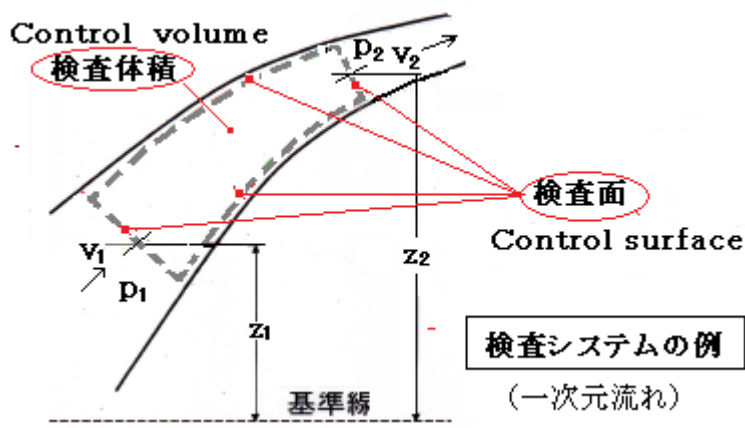
$$\text{流体系に働く作用力(外力)} = \text{運動量の変化} \quad \text{----- (a)}$$

の関係で知られている。この関係はニュートンの第2法則によるもので、ある検査システムに対してその詳細は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \text{検査面に働く機械力} + \text{検査体積に働く重力} + \text{検査面に働く流体垂直力} + \text{検査面に働く流体接線力} \\ & = \text{検査体積内の運動量変化量} + \text{検査面からの流入による運動量} - \text{検査面からの流出による運動量} \end{aligned} \quad \text{----- (b)}$$

ここで注目すべきは左辺第1項の検査面に働く機械力で、これは流体を囲う構造側から流体に作用する力(→反力)であり、その符号をマイナスに反転させれば、流体から構造物に作用する力になる。運動量保存則の運用は様々であるが、ここでは、文献/テキストに見られる運用例を引用する形で流体を囲う構造側から流体側に働く力(反力)を対象にまとめてみた。ごく初歩的な構造－流体の干渉問題を集約している。なお運動量保存則の運用式やその導出などについては次のTSを参照されたし。

【 FE-01-TG-001 流れの各種基礎式に関する情報 】



1. 運動量の式とその運用形⁽¹⁾⁽²⁾

(1) 議論を進める前に運動量の式を確認しておく。運動量の式は水力/流力分野の基本式として種々のテキストに必ず記述されている。例えば Blevins のテキストでは、

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \mathbf{g} \int_V \rho \, dV - \int_{sp} \mathbf{n} \, dA + \int_s \boldsymbol{\tau} \, dA = (d/dt) \int_V \rho \, \mathbf{v} \, dV + \int_V \rho \, \mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} \, dA \quad \text{----- (c)}$$

ここで \mathbf{F} = 検査システム内の流体系に作用する力(ベクトル)

\mathbf{F}_s = 流体力以外の流体系への作用力(ベクトル)、 \mathbf{g} = 重力加速度(ベクトル)、

ρ = 流体密度、 V = 検査体積の体積、 A = 検査面の面積、 p = 内圧(abs.)、

\mathbf{n} = 検査面に対する法線方向単位ベクトル、 $\boldsymbol{\tau}$ = せん断応力(ベクトル)、

\mathbf{v} = 流体速度(ベクトル)、 \mathbf{v}_b = 検査面自身の速度(ベクトル)

積分を含むこの式はベクトル式であるから方位を表わす符号が、その場所によって変化するので注意する必要がある(太字はベクトルを示している)。この式の中央辺は(a)式の作用力、右辺は作用力によって生じる運動量の変化を表わしている。

中央辺第1項 \mathbf{F}_s は第2～4項以外の例えば攪拌などによって強制的に加えられる機械力のようなものを表わしており、もしそのような機械力が存在しないなら、 \mathbf{F}_s は構造物に分担される力(反力)になる。中央辺第2項はいわゆる自重を表わす項で、下向き流れ方向に自重が加わると運動量変化が増大する。また中央辺の第3項+第4項は流体力で、第3項は流れを自ら押し流す推力で通常は圧力(静圧)項と考えればよい。第4項は例えば流れに平行する構造壁で生じる流体摩擦を考えればよい。

一方、右辺第1項は検査体積内で起きる過渡的な運動量変化で、例えば水撃や振動による波動の通過で起きる。右辺第2項は定常流れにおける流体速度の大きさや流れ方向の変化に伴う運動量の変化を表わす。この場合、検査面自身の速度ベクトル \mathbf{v}_b が在ると運動量は減退する。

(c)式はごく一般的な運動量の関連式を表わしている。通常の流れにおいて構造物に分担される力を考える時は右辺第1項の過渡項は全く無視できる。更に検査面自身の流速ベクトル \mathbf{v}_b は特例的で一般的でない(通常無視できる)。従って (c)式は次のように簡略化して表わすことができる。

$$\mathbf{F}_s = \int_S p \mathbf{n} dA + \int_S \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA - \mathbf{g} \rho V - \int_S \boldsymbol{\tau} dA \quad \text{----- (d)}$$

ここで $\mathbf{g} \rho V$ は $\mathbf{g} \int_V \rho dV$ に相当し、検査体積の自重(ベクトル)を表わしている。

なお(d)式は、流体力以外の検査システム内の流体系に作用する力を与える式である。しかしこの力が直ちに構造側からの反力になる訳ではない。何故なら、構造体の外表面に作用する外圧(例えば大気圧)によって \mathbf{F}_s は欠損を生じるからである。この欠損した \mathbf{F}_s は次式で与えられる。

$$\mathbf{F}_s^* = \int_S p^* \mathbf{n} dA + \int_S \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA - \mathbf{g} \rho V - \int_S \boldsymbol{\tau} dA \quad \text{----- (e)}$$

ここで \mathbf{F}_s^* = 外圧を考慮した作用力、 p^* = 内外差圧(= $p - p_a$)、 p = 内圧(abs.)、 p_a = 外圧(abs.)

(なお、外圧が大気圧になるときの p^* はゲージ圧 p_g で表示する。)

(e)式では検査体積を囲う検査面 S のうち、流れに直交する面のみが対象となる。図1aのような単純な単一1次元流れでは、それは流入側検査面 S_1 と流出側検査面 S_2 になる。その場合、右辺の $\int_S p^* \mathbf{n} dA$ と $\int_S \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$ は、積分対象の $p^* \mathbf{n}$ と $\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$ が検査面上で一樣(均一)であるとすれば、 $p^* \mathbf{A} \mathbf{n}$ と $\rho v^2 \mathbf{A} \mathbf{n}$ に単純化できる。従って (e)式は、

$$\mathbf{F}_s^* = p_2^* A_2 \mathbf{n}_2 + p_1^* A_1 \mathbf{n}_1 + \rho v_2^2 A_2 \mathbf{n}_2 + \rho v_1^2 A_1 \mathbf{n}_1 - \mathbf{g} \rho V - \int_S \boldsymbol{\tau} dA \quad \text{----- (f)}$$

ここで A は検査面の面積である。さて問題は単位ベクトル \mathbf{n} である。図1bに示すように、法線単位ベクトル \mathbf{n} は1の大きさを持ち各検査面に対し外向き+になる。さらに、それは次式のようにブレイクダウンされる。

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta \quad \text{----- (g)}$$

ここで \mathbf{i} = x 方向単位ベクトル、 \mathbf{j} = y 方向単位ベクトル、 θ = 法線と x 軸が交差する角度、

θ は x 軸から反時計廻りに $0 \rightarrow 180^\circ$ あるいは時計廻りに $0 \rightarrow -180^\circ$ の範囲で変化するので、 \mathbf{n} は $\mathbf{n} = (1 \sim -1)\mathbf{i} + (1 \sim -1)\mathbf{j}$ になる。(f)式を(e)式に代入すると

$$\mathbf{F}_s^* = p_2^* A_2 (\mathbf{i} \cos \theta_2 + \mathbf{j} \sin \theta_2) + p_1^* A_1 (\mathbf{i} \cos \theta_1 + \mathbf{j} \sin \theta_1) - \mathbf{g} \rho V - \int_S \boldsymbol{\tau} dA$$

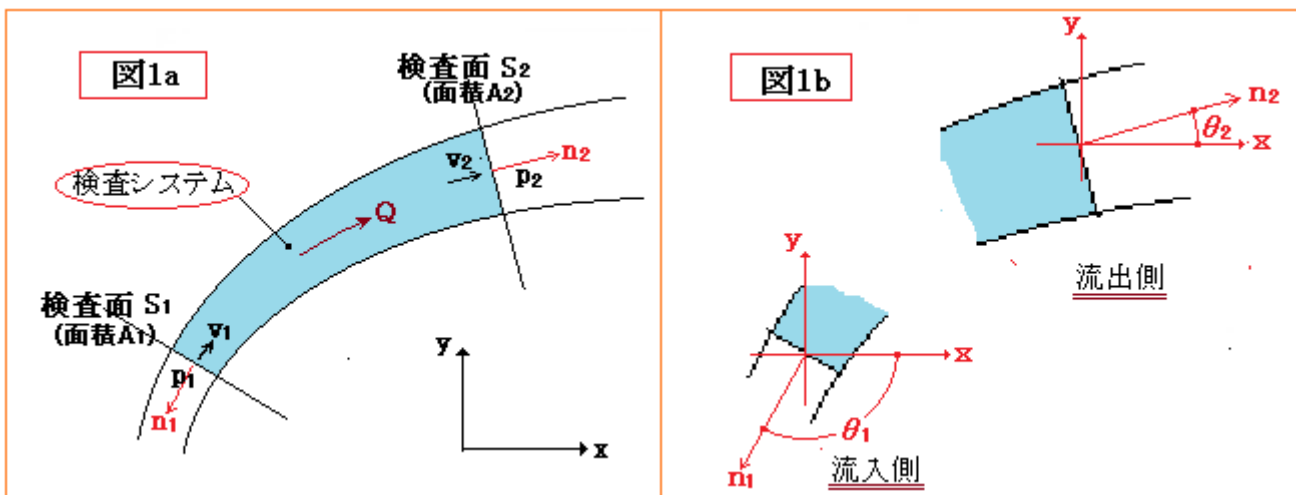
$$\begin{aligned}
 & + \rho v_2^2 A_2 (\mathbf{i} \cos \theta_2 + \mathbf{j} \sin \theta_2) + \rho v_1^2 A_1 (\mathbf{i} \cos \theta_1 + \mathbf{j} \sin \theta_1) - \mathbf{g} \rho V - \int_s \tau dA \\
 = & (p_2^* A_2 \cos \theta_2 + p_1^* A_1 \cos \theta_1 + \rho v_2^2 A_2 \cos \theta_2 + \rho v_1^2 A_1 \cos \theta_1) \mathbf{i} \\
 & + (p_2^* A_2 \sin \theta_2 + p_1^* A_1 \sin \theta_1 + \rho v_2^2 A_2 \sin \theta_2 + \rho v_1^2 A_1 \sin \theta_1) \mathbf{j} - \mathbf{g} \rho V - \int_s \tau dA \\
 & \text{----- (h)}
 \end{aligned}$$

摩擦抵抗のない水平流れ場合は右辺の $(-\mathbf{g} \rho V - \int_s \tau dA)$ が無視できるので、上式の右辺は直交するベクトル \mathbf{i} と \mathbf{j} の合成になっている。この合成ベクトルの大きさは次式で得られる。

$$\begin{aligned}
 F_s^* = & [(p_2^* A_2 \cos \theta_2 + p_1^* A_1 \cos \theta_1 + \rho v_2^2 A_2 \cos \theta_2 + \rho v_1^2 A_1 \cos \theta_1)^2 \\
 & + (p_2^* A_2 \sin \theta_2 + p_1^* A_1 \sin \theta_1 + \rho v_2^2 A_2 \sin \theta_2 + \rho v_1^2 A_1 \sin \theta_1)^2]^{0.5} \text{----- (i)}
 \end{aligned}$$

F_s^* は外圧を考慮した流体力以外に流体系に作用する力(スカラー量)である。なお、合成ベクトルの向即ち水平ベクトル(x方向)と合成ベクトルのなす交叉角 α は、

$$\begin{aligned}
 \alpha = & \tan^{-1} [(p_2^* A_2 \sin \theta_2 + p_1^* A_1 \sin \theta_1 + \rho v_2^2 A_2 \sin \theta_2 + \rho v_1^2 A_1 \sin \theta_1) \\
 & \div (p_2^* A_2 \cos \theta_2 + p_1^* A_1 \cos \theta_1 + \rho v_2^2 A_2 \cos \theta_2 + \rho v_1^2 A_1 \cos \theta_1)] \text{----- (j)}
 \end{aligned}$$



なお、1次元流れでは、 $Q=vA$ なので(f),(h),(i)式は次のように書ける。

$$F_s^* = p_2^* A_2 n_2 + p_1^* A_1 n_1 + \rho Q v_2 n_2 + \rho Q v_1 n_1 - \mathbf{g} \rho V - \int_s \tau dA \text{----- (f)}$$

$$\begin{aligned}
 F_s^* = & (p_2^* A_2 \cos \theta_2 + p_1^* A_1 \cos \theta_1 + \rho Q v_2 \cos \theta_2 + \rho Q v_1 \cos \theta_1) \mathbf{i} \\
 & + (p_2^* A_2 \sin \theta_2 + p_1^* A_1 \sin \theta_1 + \rho Q v_2 \sin \theta_2 + \rho Q v_1 \sin \theta_1) \mathbf{j} - \mathbf{g} \rho V - \int_s \tau dA \text{---- (h)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_s^* = & [(p_2^* A_2 \cos \theta_2 + p_1^* A_1 \cos \theta_1 + \rho Q v_2 \cos \theta_2 + \rho Q v_1 \cos \theta_1)^2 \\
 & + (p_2^* A_2 \sin \theta_2 + p_1^* A_1 \sin \theta_1 + \rho Q v_2 \sin \theta_2 + \rho Q v_1 \sin \theta_1)^2]^{0.5} \text{----- (i)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha = & \tan^{-1} [(p_2^* A_2 \sin \theta_2 + p_1^* A_1 \sin \theta_1 + \rho Q v_2 \sin \theta_2 + \rho Q v_1 \sin \theta_1) \\
 & \div (p_2^* A_2 \cos \theta_2 + p_1^* A_1 \cos \theta_1 + \rho Q v_2 \cos \theta_2 + \rho Q v_1 \cos \theta_1)] \text{----- (j)}
 \end{aligned}$$

ここでは単純な1次元単一流れの例をあげたが、多分岐流れなどにもこれと同じようなやり方で作用力 F_s^* , F_s^* を求めることができる。

(2) 以上は運動量そのものである(線形運動量とも呼べる)。ある支点があつてそれから r だけ伸びたレバーの前端に運動量 mv が作用している状態では一般に $(rxmv)$ を角運動量という。この場合でも運動量の式の同様の式が成立する。

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}_s + \int_V \rho (\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}) dV - \int_s p (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) dA + \int_s (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\tau}) dA \\ &= (d/dt) \int_V \rho (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) dV + \int \rho (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} dA \quad \text{-----(k)} \end{aligned}$$

ここで \mathbf{T} = 検査システム内の流体系に働く支点廻りのトルク(ベクトル)(ベクトル)、
 \mathbf{T}_s = 流体力以外に検査体積に加えられる支点廻りのトルク(ベクトル)、
 \mathbf{r} = 固定軸からの半径(ベクトル)、 $\mathbf{g}, p, \rho, A, V, \mathbf{n}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_b, \boldsymbol{\tau} \rightarrow$ (c)式のときに同じ

この式で(半径ベクトル・他のベクトル)はベクトル内積を表わす。例えば

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \rightarrow rv \cos \alpha \quad \text{ここで } \alpha = \text{ベクトル } \mathbf{r} \text{ に直交するラインとベクトル } \mathbf{v} \text{ の交叉角}$$

更に議論すると複雑になるので、2.10 節(\rightarrow 図(K)(L))の事例を参照されたし。

2. 運動量保存式の運用例^{(1)~(5)}

2.1 直管流れ (図 2(A)(B))

(1) この場合、構造側からの反力 \mathbf{F}_s^* は、前章の(h)式から得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s^* &= (p_2^* A_2 \cos \theta_2 + p_1^* A_1 \cos \theta_1 + \rho Q v_2 \cos \theta_2 + \rho Q v_1 \cos \theta_1) \mathbf{i} \\ &\quad + (p_2^* A_2 \sin \theta_2 + p_1^* A_1 \sin \theta_1 + \rho Q v_2 \sin \theta_2 + \rho Q v_1 \sin \theta_1) \mathbf{j} - \mathbf{g} \rho V - \int_s \boldsymbol{\tau} dA \end{aligned}$$

まず図 2 の(A)の水平直管を考えると、図に示すように $\theta_1 = 180^\circ$ $\theta_2 = 0^\circ$ 及び $A_1 = A_2 = A$ なので

$$\mathbf{F}_s^* = \{(p_2^* - p_1^*)A + \rho Q(v_2 - v_1)\} \mathbf{i} - \mathbf{g} \rho V - \int_s \boldsymbol{\tau} dA$$

直管では流速一定でかつ摩擦圧損小なので $v_2 = v_1$ 、 $p_2^* \doteq p_1^*$ 、 $\int_s \boldsymbol{\tau} dA \doteq 0$ になり、

$$\mathbf{F}_s^* = -\mathbf{g} \rho V$$

即ち水平成分は零になり、パイプに作用する力は、y 方向下向きの自重 $-\mathbf{g} \rho V$ だけになる。

しかし細長い直管になると、摩擦圧損 $(p_1^* - p_2^*)$ ($\rightarrow \Delta p$) および流体摩擦抵抗 $\int_s \boldsymbol{\tau} dA$ は無視できなくなる。この場合、せん断応力 τ は次式で定義される。

$$C_f = \tau / (\rho v^2 / 2) \rightarrow \tau = C_f \times (1/2) \rho v^2 = (\lambda / 4) \times (1/2) \rho v^2$$

ここで $C_f = \text{Fanning}$ の表面摩擦係数、 $\lambda = \text{Moody}$ の管摩擦係数

流体摩擦項は $\int_s \boldsymbol{\tau} dA = \mathbf{n} \int_s \tau dA = \mathbf{n} \tau \times \pi DL$ (但し $D = \text{内径}$ 、 $L = \text{長さ}$)になる。単位ベクトルの向きは流入面の法線ベクトルと同じなので \mathbf{n}_1 にとり $\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} \cos \theta_1 + \mathbf{j} \sin \theta_1 = -\mathbf{i}$ なので

$$\int_s \boldsymbol{\tau} dA = -\mathbf{i} (\tau \times \pi DL) = -\mathbf{i} \{(\lambda / 4) \times (1/2) \rho v^2 \times \pi DL\} = -\mathbf{i} \{(1/2) \lambda (L/D) \rho v^2 \times (\pi D^2 / 4)\}$$

この場合 $\Delta p = (p_1^* - p_2^*) = (1/2) \lambda (L/D) \rho v^2$ で、 $A = \pi D^2 / 4$ なので $\int_s \boldsymbol{\tau} dA = -(p_1^* - p_2^*) A \mathbf{i}$ になる。この結果と $v_1 = v_2$ を、前述の \mathbf{F}_s^* 式に代入すると

$$\mathbf{F}_s^* = \{(p_2^* - p_1^*)A + \rho Q(v_2 - v_1)\} \mathbf{i} - \mathbf{g} \rho V + (p_1^* - p_2^*) A \mathbf{i} = -\mathbf{g} \rho V$$

結局、前述の結果と同じになる。即ち水平直管では水平方向の外力ないし反力は存在しない。

(2) 次に図 2(B)の垂直々管を考える。この場合、 $\theta_1 = 90^\circ$ 、 $\theta_2 = -90^\circ$ なので

$$\mathbf{F}_s^* = \{(-p_2^* + p_1^*)A + \rho Q(-v_2 + v_1)\} \mathbf{j} - \mathbf{g} \rho V - \int_s \boldsymbol{\tau} dA$$

$v_2 = v_1$ であって、流体摩擦は無視できるので、 $\mathbf{F}_s^* = -(p_2^* - p_1^*) A \mathbf{j} - \mathbf{g} \rho V$ になる。

ここで、ベルヌーイの定理より

$$p_1^* / \rho + v_1^2 / 2 + gh = p_2^* / \rho + v_2^2 / 2 \quad (\text{ここで } h \text{ はポイント } 1, 2 \text{ の高さの差})$$

$v_2 = v_1$ なので、 $p_1^* / \rho + gh = p_2^* / \rho \rightarrow (p_2^* - p_1^*) = g \rho h = g \rho V / A$ になる。これを \mathbf{F}_s^* 式に用いて

$$F_s^* = -(g \rho V/A) x A_j - g \rho V = -g \rho V j - g \rho V = g \rho V - g \rho V = 0 \quad (\text{垂直方向})$$

従って垂直管では全く流体系に作用する外力ないし反力は存在しない。この結果は流体摩擦を考慮しても同じである。

2.2 拡大/縮小管流れ (図 2(C))

(1) この場合も流体力以外の外力 F_s は、前章の(h')式から得られる。

$$F_s^* = (p_2^* A_2 \cos \theta_2 + p_1^* A_1 \cos \theta_1 + \rho Q v_2 \cos \theta_2 + \rho Q v_1 \cos \theta_1) i + (p_2^* A_2 \sin \theta_2 + p_1^* A_1 \sin \theta_1 + \rho Q v_2 \sin \theta_2 + \rho Q v_1 \sin \theta_1) j - g \rho V - \int_s \tau dA$$

図に示すように $\theta_1 = 180^\circ$ および $\theta_2 = 0^\circ$ 、また流体摩擦は通常、無視できるので、

$$F_s^* = (p_2^* A_2 - p_1^* A_1 + \rho Q v_2 - \rho Q v_1) i - g \rho V$$

ここでベルヌーイの定理によれば、

$$p_1^* / \rho + v_1^2 / 2 = (p_2^* + \Delta p) / \rho + v_2^2 / 2 \rightarrow p_2^* = p_1^* - \Delta p + (1/2) \rho (v_1^2 - v_2^2)$$

また $Q = A_2 v_2 (= A_1 v_1)$ である。上記の F_s^* 式にこの p_2^* と Q を代入して整理すると

$$F_s^* = \{ (p_1^* - \Delta p) A_2 - p_1^* A_1 \} + (1/2) \rho (v_1 - v_2)^2 A_2 i - g \rho V$$

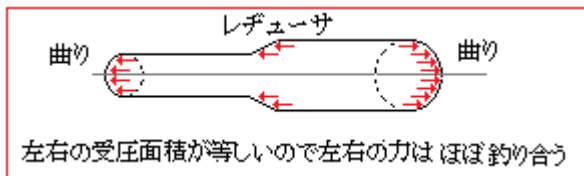
従って下向きの流体自重 $g \rho V$ の他に、 $\{ (p_1^* - \Delta p) A_2 - p_1^* A_1 \} + (1/2) \rho (v_1 - v_2)^2 A_2$ の構造側からの水平方向反力が作用する。この力は、通常流速項の影響が小さいので、圧力項の $\{ (p_1 - \Delta p) A_2 - p_1 A_1 \}$ に依存する。特に急拡大/急縮小するとき、管路断面積の A_1 と A_2 の差と圧損 Δp が大きくなって、大きな反力が加わる。

(2) サンプル計算：拡大方向に内径 150x300mm の水平レヂューサが入口圧 10kg/cm²G、入口流速 2m/s の水配管で使用されている。発生する水平反力はどの位か？但しレヂューサ圧損 0.05kg/cm²

計算) 出口流速 v_2 は $v_2 = (A_1/A_2)v_1 = 0.15^2/0.3^2 \times 2 = 0.5\text{m/s}$ になる。故に

$$F_s^* = \{ (10 - 0.05) \times 10^4 \times 0.7854 \times 0.3^2 - 10 \times 10^4 \times 0.7854 \times 0.15^2 \} + (1/2) (1000/9.81) (2 - 0.05)^2 \times 0.7854 \times 0.3^2 = (7033.3 - 1767.2) + 13.7 = 5279.8 \text{ kg f} \rightarrow \text{流れ方向に } 5280 \text{ kg f}$$

F_s^* は正であるから、x 方向(→流れ方向)に向かってレヂューサ躯体の反力がかかっている。言い換えればレヂューサ躯体は流れ方向と逆向きに押されている。その殆どが内圧による推力である。力としては大きい、伸縮継手がない限り配管自身でほぼバランスしているので殆ど問題になることはない。



2.3 曲管流れ (図 2(D))

(1) この場合も構造物への作用力 F_s は、前章の(h')式から得られる。

$$F_s^* = (p_2^* A_2 \cos \theta_2 + p_1^* A_1 \cos \theta_1 + \rho Q v_2 \cos \theta_2 + \rho Q v_1 \cos \theta_1) i + (p_2^* A_2 \sin \theta_2 + p_1^* A_1 \sin \theta_1 + \rho Q v_2 \sin \theta_2 + \rho Q v_1 \sin \theta_1) j - g \rho V - \int_s \tau dA$$

なおここでは簡略化のため流体自重 $g \rho V$ と摩擦項 $\int_s \tau dA$ は省く。図からわかるように、流入側で $\theta_1 = 180^\circ$ 、流出側で $\theta_2 (< 0)$ であるから反力ベクトルは次のようになる。

$$F_s^* = (p_2^* A_2 \cos \theta_2 - p_1^* A_1 + \rho Q v_2 \cos \theta_2 - \rho Q v_1) i + (p_2^* A_2 + \rho Q v_2) \sin \theta_2 j$$

また、合成ベクトルの大きさ即ち反力の合成値は、(i)式で得られる。

$$F_s^* = [(p_2^* A_2 \cos \theta_2 - p_1^* A_1 + \rho Q v_2 \cos \theta_2 - \rho Q v_1)^2 + (p_2^* A_2 + \rho Q v_2)^2 \sin^2 \theta_2]^{0.5}$$

一般に配管で使用されている曲管は出入口の径は変わらず、圧損もさほど大きくはないので $A_1 = A_2 = A$ 、 $v_1 = v_2 = v$ 、 $p_1^* \doteq p_2^* \doteq p^*$ とおける。故に反力ベクトルは

$$F_s^* = (\cos \theta_2 - 1) (p^* A + \rho Q v) i + \sin \theta_2 (p^* A + \rho Q v) j$$

大きさは $F_s^* = (p^* A + \rho Q v) \{(\cos \theta_2 - 1)^2 + \sin^2 \theta_2\}^{0.5} = (p^* A + \rho Q v) (2 - 2 \cos \theta_2)^{0.5}$ になるが
公式より $\cos \theta_2 = 1 - 2 \sin^2(\theta_2/2)$ であるから、

$$F_s^* = 2(p^* A + \rho Q v) \sin(\theta_2/2)$$

合成ベクトルの方向は(j)式より

$$\alpha = \tan^{-1} \{ \sin \theta_2 / (\cos \theta_2 - 1) \}$$

- (2) サンプル計算：内径 200mm の 90° エルボが内圧 10kg/cm²G で流速 3m/s の水配管で使用されている。発生する合成作用力はいくらか？

計算) この場合、流量は $Q = 3 \times 0.7854 \times 0.2^2 = 0.0942 \text{ m}^3/\text{s}$ なので、

$$F_s^* = 2(p^* A + \rho Q v) \sin(\theta_2/2) = 2 \times \{10 \times 10^4 \times 0.7854 \times 0.2^2 + (1000/9.81) \times 0.0942 \times 3\} \times \sin(-45^\circ) = -2242 \text{ kg} \quad (\text{内向き})$$

なお、合成ベクトルの方向は $\alpha = \tan^{-1} \{ \sin(-90^\circ) / (\cos(-90^\circ) - 1) \} = 45^\circ$

推力としては大きいですが、伸縮継手がない限り配管自身ではほぼバランスしているので殆ど問題になることはない。

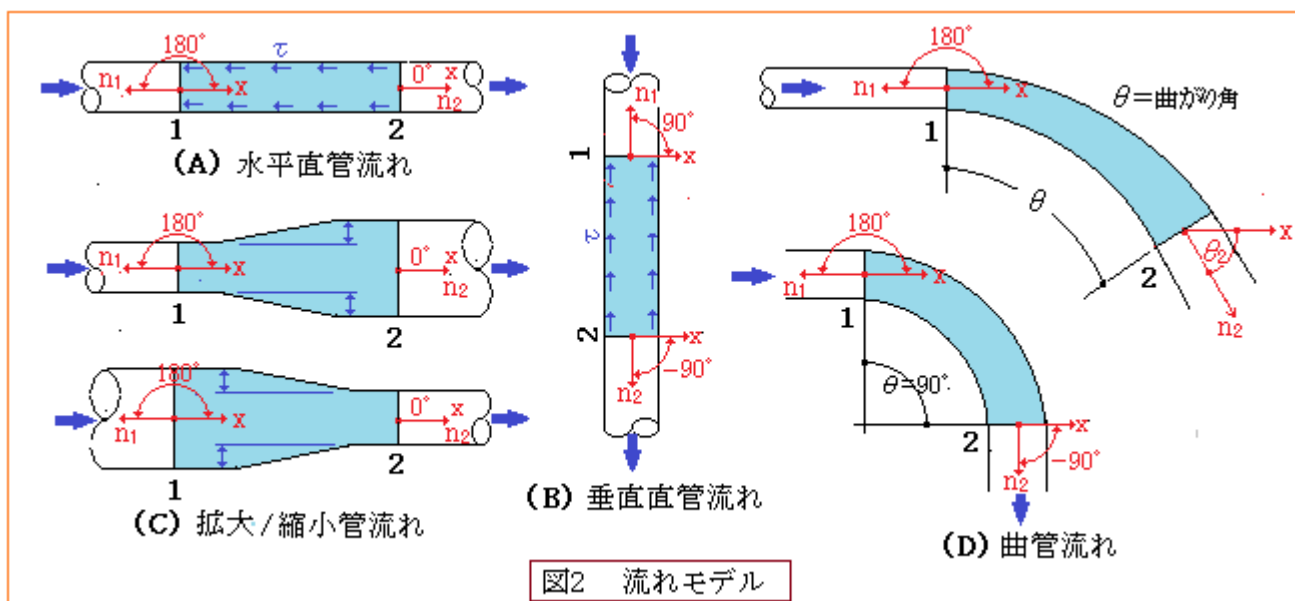


図2 流れモデル

2.4 曲面壁に沿う流れ (図 2 (E))

- (1) この場合も構造物からの反力 F_s^* は、前章の(h)式から得られる。

$$F_s^* = (p_2^* A_2 \cos \theta_2 + p_1^* A_1 \cos \theta_1 + \rho Q v_2 \cos \theta_2 + \rho Q v_1 \cos \theta_1) i + (p_2^* A_2 \sin \theta_2 + p_1^* A_1 \sin \theta_1 + \rho Q v_2 \sin \theta_2 + \rho Q v_1 \sin \theta_1) j - g \rho V - \int_s \tau dA$$

なおここでは簡略化のため流体自重 $g \rho V$ と摩擦項 $\int_s \tau dA$ は省く。図からわかるように、流入側

で $\theta_1=180^\circ$, 流出側で $\theta_2(>0)$ で、 $v_1=v_2=v$ であるから構造側からの反力は

$$\mathbf{F}_s^* = (p_2^* A_2 \cos \theta_2 - p_1^* A_1 + \rho Q v \cos \theta_2 - \rho Q v) \mathbf{i} + (p_2^* A_2 + \rho Q v) \sin \theta_2 \mathbf{j}$$

更に圧力項は内外差圧が零なので、

$$\mathbf{F}_s^* = \{ \rho Q v (\cos \theta_2 - 1) \} \mathbf{i} + (\rho Q v \sin \theta_2) \mathbf{j}$$

$$F_s^* = \rho Q v \{ (\cos \theta_2 - 1)^2 + \sin^2 \theta_2 \}^{0.5}$$

更に θ_2 が 図(E)下段 のように 180° ターンすると、 $\mathbf{F}_s^* = (-2 \rho Q v) \mathbf{i}$ 、 $F_s^* = 2 \rho Q v$ になり、水平作用力は 2 倍近くなる。

(2) サンプル計算：流量 $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$ の水が流速 2 m/s で $+45^\circ$ スロープの壁に沿って流れている。

壁の水平/垂直方向の各反力はいくらになるか？

$$\text{計算) } \mathbf{F}_s^* = \{ \rho Q v (\cos \theta_2 - 1) \} \mathbf{i} = (1000/9.81) \times 0.5 \times 2 \times (\cos 45^\circ - 1) \mathbf{i} = -29.9 \text{ i kg} \rightarrow \text{水平 } \underline{-30 \text{ kg}}$$

$$\mathbf{F}_s^* = (\rho Q v \sin \theta_2) \mathbf{j} = (1000/9.81) \times 0.5 \times 2 \times \sin 45^\circ = 72 \text{ kg} \rightarrow \text{垂直 } \underline{72 \text{ kg}}$$

2.5 衝突噴流 (図 2(F))

(1) この場合も構造物からの反力 \mathbf{F}_s は、前章の(h)式を拡張した形で得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s^* = & (p_3^* A_3 \cos \theta_3 + p_2^* A_2 \cos \theta_2 + p_1^* A_1 \cos \theta_1 + \rho Q_3 v_3 \cos \theta_3 + \rho Q_2 v_2 \cos \theta_2 + \rho Q_1 v_1 \cos \theta_1) \mathbf{i} \\ & + (p_3^* A_3 \sin \theta_3 + p_2^* A_2 \sin \theta_2 + p_1^* A_1 \sin \theta_1 + \rho Q_3 v_3 \sin \theta_3 + \rho Q_2 v_2 \sin \theta_2 + \rho Q_1 v_1 \sin \theta_1) \mathbf{j} \\ & - \mathbf{g} \rho V - \int_s \tau \, dA \end{aligned}$$

なおここでは簡略化のため流体自重 $\mathbf{g} \rho V$ と摩擦項 $\int_s \tau \, dA$ は省く。また圧力項は内外差圧が零なので割愛される。図からわかるように、流入側で $\theta_1(<0)$ 、流出側で $\theta_2=90^\circ$ 、流出側で $\theta_3=-90^\circ$ であるから、反力ベクトルは

$$\mathbf{F}_s^* = (\rho Q_1 v_1 \cos \theta_1) \mathbf{i} + (- \rho Q_3 v_3 + \rho Q_2 v_2 + \rho Q_1 v_1 \sin \theta_1) \mathbf{j} \quad (\text{但し } Q_1 = Q_2 + Q_3)$$

この式では入口流量 Q_1 は既知であるが流出量 Q_2, Q_3 は未定である。 Q_2, Q_3 は \mathbf{F}_s^* が x 方向成分のみの反力で y 方向成分(→上式の右边第 2 項)は零になることから得られる。即ち

$$\text{右边第 2 項} = 0 \rightarrow - \rho Q_3 v_3 + \rho Q_2 v_2 + \rho Q_1 v_1 \sin \theta_1 = 0$$

$Q_3 = Q_1 - Q_2$ 、を代入し、衝突前後も同じ流線上にある所から $v_1 = v_2 = v_3$ とおけば、

$$-(Q_1 - Q_2) + Q_2 + Q_1 \sin \theta_1 = 0 \rightarrow Q_2 = \{ (1 - \sin \theta_1) / 2 \} Q_1 \text{ 及び } Q_3 = \{ (1 + \sin \theta_1) / 2 \} Q_1$$

流量の配分はともかくとして、 \mathbf{F}_s^* は前述の通り x 方向成分のみなので、

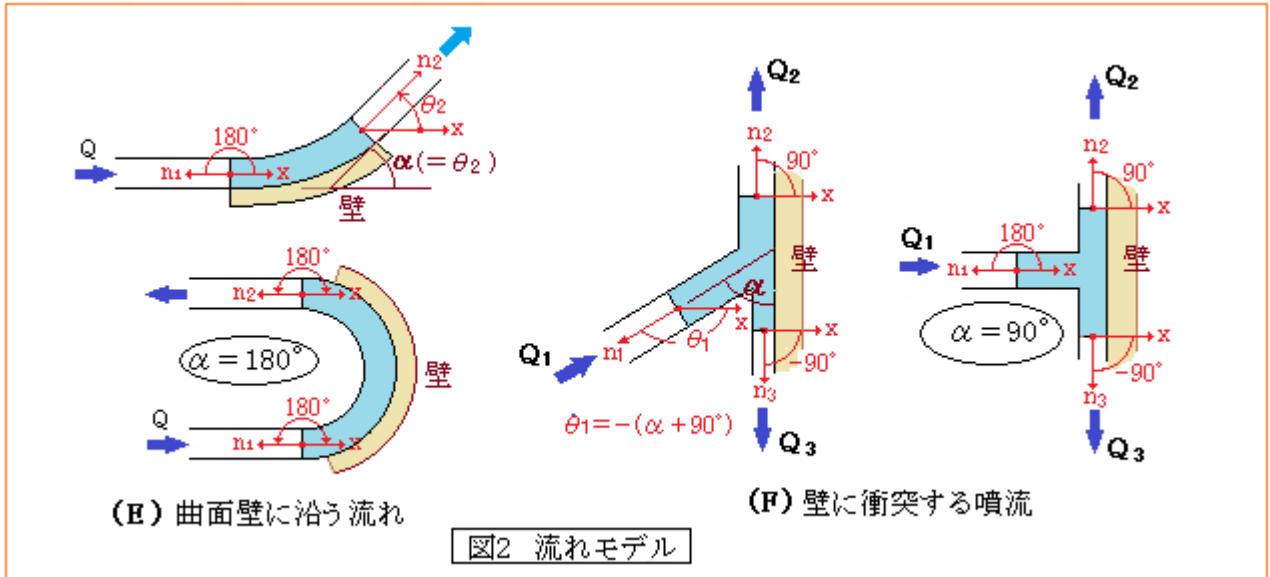
$$\mathbf{F}_s^* = (\rho Q_1 v_1 \cos \theta_1) \mathbf{i} \quad , \quad F_s^* = \rho Q_1 v_1 \cos \theta_1$$

噴流が垂直に当たる時は θ_1 が 180° なので 衝突反力 $F_s^* = - \rho Q v_1$ になり、 Q_2 と Q_3 は等しく流れる。

(2) 流量 $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ の水噴流が流速 9 m/s でコンクリート壁に衝突するとき、壁に生じる力はいくらか？

なお衝突角 α は 60° とする。

$$F_s^* = \rho Q_1 v_1 \cos \theta_1 = (1000/9.81) \times 0.1 \times 9 \times \cos(-60^\circ - 90^\circ) = -79.5 \text{ kg f}$$



2.6 合流分岐流れ (図 2(G))

(1) この場合、構造物への作用力 F_s は、前章の(h')式を拡張して得られる(重力項/摩擦項は無視)。

$$\begin{aligned} F_s^* = & (p_4^* A_4 \cos \theta_4 + p_3^* A_3 \cos \theta_3 + p_2^* A_2 \cos \theta_2 + p_1^* A_1 \cos \theta_1 \\ & + \rho Q_4 v_4 \cos \theta_4 + \rho Q_3 v_3 \cos \theta_3 + \rho Q_2 v_2 \cos \theta_2 + \rho Q_1 v_1 \cos \theta_1) i \\ & + (p_4^* A_4 \sin \theta_4 + p_3^* A_3 \sin \theta_3 + p_2^* A_2 \sin \theta_2 + p_1^* A_1 \sin \theta_1 \\ & + \rho Q_4 v_4 \sin \theta_4 + \rho Q_3 v_3 \sin \theta_3 + \rho Q_2 v_2 \sin \theta_2 + \rho Q_1 v_1 \sin \theta_1) j \end{aligned}$$

ここで図より $\theta_1 = 180^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$ また $\theta_3 = +\alpha$, $\theta_4 = -\alpha$ である。また、分岐側のそれぞれの流量、速度、圧力及び面積は等しく Q , v , p , A とすると

$$F_s^* = (2pA \cos \alpha + p_2^* A_2 - p_1^* A_1 + 2\rho Qv \cos \alpha + \rho Q_2 v_2 - \rho Q_1 v_1) i \quad (\text{x 方向成分のみ})$$

構造物からの反力 F_s^* が全くない状態では

$$\begin{aligned} 2pA \cos \alpha + p_2^* A_2 - p_1^* A_1 + 2\rho Qv \cos \alpha + \rho Q_2 v_2 - \rho Q_1 v_1 &= 0 \\ \rightarrow \cos \alpha &= (p_1^* A_1 - p_2^* A_2 + \rho Q_1 v_1 - \rho Q_2 v_2) / (2pA + 2\rho Qv) \end{aligned}$$

従って、構造物側(配管側)に反力を生じない分岐角 α は次のようになる。

$$\alpha = \cos^{-1} \{ (p_1^* A_1 - p_2^* A_2 + \rho Q_1 v_1 - \rho Q_2 v_2) / (2pA + 2\rho Qv) \}$$

(2) 静圧が低く大気圧に近いと p_1^* , p_2^* 及び p とは無視できる。更に衝突速度が等しく $v_1 = v_2 = v$ とおけると、 $Q = (Q_1 + Q_2) / 2$ であるから、上記の分岐角 α は

$$\alpha = \cos^{-1} (Q_1 - Q_2) / (2Q) = \cos^{-1} (Q_1 - Q_2) / (Q_1 + Q_2)$$

例えば、 $0.15 \text{ m}^3/\text{s}$ と $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ の流れが同一流速で衝突すれば次の分岐角では反力は起きない。

$$\alpha = \cos^{-1} (0.15 - 0.1) / (0.15 + 0.1) = \text{約 } 78.5^\circ$$

2.7 PB ロケットの推力 (図 2(H))

(1) ペットボトルロケットはボトルに圧縮空気を詰めて水で封じることで得られる簡易ロケットである。この場合も、構造物からの反力(→推力) F_s は、前章の(h')式から得られる(摩擦項は無視)。

$$\begin{aligned} F_s^* = & (p_2^* A_2 \cos \theta_2 + p_1^* A_1 \cos \theta_1 + \rho Qv_2 \cos \theta_2 + \rho Qv_1 \cos \theta_1) i \\ & + (p_2^* A_2 \sin \theta_2 + p_1^* A_1 \sin \theta_1 + \rho Qv_2 \sin \theta_2 + \rho Qv_1 \sin \theta_1) j - g \rho V \end{aligned}$$

図(H)より $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = -90^\circ$ であるから、

$$F_s^* = (p_1^* A_1 - p_2^* A_2 + \rho Qv_1 - \rho Qv_2) j - g \rho V$$

この式は、x 方向を含まず y 方向ベクトルのみで、() 内各項は次のように扱える。

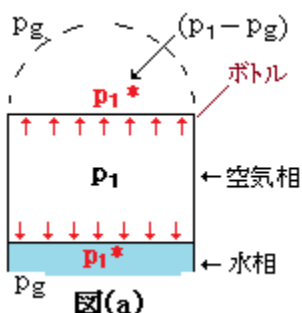
まず第 1 項 $p_1^* A_1$ は、下図(a)のごとくボトル内の水相(→ボトル躯体)を下向きにプッシュする力成分であるが、図に示すように同時にボトル躯体も上向きにプッシュされるのでキャンセルしあって実質的に零として扱える。

次に第 2 項 $p_2^* A_2$ は、噴出口の静圧 p_2 が大気に導通して外気圧 p_g と等しくなるので、 $p_2^* = p_2 - p_g = 0$ とおくことができる。

また第 3 項は、一般に自由表面の降下流速 v_1 が放出速度 v_2 に較べて十分小さいのでモーメント $\rho Q v_1$ は零として扱かえる。

従って上記の F_s^* 式は次のような極めて単純な式になる。

$$F_s^* = (-\rho Q v_2) j - g \rho V \quad \rightarrow \quad F_s^* = \rho Q v_2 - g \rho V = \rho v_2^2 A_2 - \gamma V$$



ここで v_2 はベルヌーイの式を用いて次式で与えられる(但し液レベル差は無視)。

$$p_1 / \rho = p_2 / \rho + v_2^2 / 2 \quad \rightarrow \quad v_2^2 = 2 (p_1 - p_2) / \rho$$

従って、 $F_s^* = 2 (p_1 - p_2) A_2 - \gamma V$ F_s^* は流体に対するボトル側からの反力であるが、ボトル側に支えがないので、ボトルの推力として働く。

(2) 容器内圧力 $2 \text{ kg/cm}^2(\text{abs})$ 、噴出口面積 $A = 0.0002 \text{ m}^2$ で、ボトル重量 1 kg のときの推力は

$$F_s^* = 2 \times 10^4 \times (2 - 1) \times 0.0002 - 1 = 4 - 1 = 3 \text{ kg f}$$

噴出速度は $v_2 = \{2 (p_1 - p_2) / \rho\}^{0.5} = \{2 \times 10^4 \times (2 - 1) / (1000 / 9.81)\}^{0.5} = 14 \text{ m/s}$

2.8 移動水槽からの放水 (図 2(I))

(1) まず静止した水槽からの放水を考える。この場合も構造物からの反力(→推力) F_s は、前章の(h)式から得られる(なお重力項/摩擦項は無視)。

$$F_s^* = (p_2^* A_2 \cos \theta_2 + p_1^* A_1 \cos \theta_1 + \rho Q v_2 \cos \theta_2 + \rho Q v_1 \cos \theta_1) i \\ + (p_2^* A_2 \sin \theta_2 + p_1^* A_1 \sin \theta_1 + \rho Q v_2 \sin \theta_2 + \rho Q v_1 \sin \theta_1) j$$

図(H)より $\theta_1 = 90^\circ$ 、 $\theta_2 = 0^\circ$ であるから、

$$F_s^* = (p_2^* A_2 + \rho Q v_2) i + (p_1^* A_1 + \rho Q v_1) j$$

ここで $p_2^* A_2$ と $p_1^* A_1$ は p_2 と p_1 が何れも外気圧 p_g に等しく $p_2^* = p_1^* = 0$ とおける。また上部水面のモーメント $\rho Q v_1$ も前項で述べたように零とおけるので、

$$F_s^* = (\rho Q v_2) i = (\rho v_2^2 A_2) i \quad \rightarrow \quad \text{水平方向(x 方向)のみ}$$

ベルヌーイの定理では $p_1 / \rho + v_1^2 / 2 + gh = p_2 / \rho + v_2^2 / 2 \quad \rightarrow \quad gh = v_2^2 / 2 \quad \rightarrow \quad v_2 = (2gh)^{0.5}$ 、従って

$$F_s^* = (2 \rho gh A_2) i = 2 \gamma h A_2 i \quad \text{および} \quad F_s = \rho Q v_2 = 2 \gamma h A_2$$

(2) 水槽が放水方向と反対の向きに移動していると水槽の移動動力は増加するが、同時に水槽は本来の水動力が失われる。これに関しテキスト(3)でその明細が示されているので以下紹介しておく。

まず水槽に加わる動力について。水槽には推力 $F_s = \rho Q v_2$ が作用し水槽は速度 u で動くので

水槽には $L_1 = F_s u = \rho Q v_2 u$ の動力が生じていることになる。

次に水槽から失われる水動力について。静止水槽ではベルヌーイの定理より $h = v_2^2 / (2g)$ であるが移動水槽ではさらに $u^2 / (2g)$ が加算されると見ていい。即ち 移動水槽には $h = v_2^2 / (2g) + u^2 / (2g)$ のヘッドが放水口にかかっている。従って失われる水動力は $L_2 = \gamma Q h = \gamma Q (v_2^2 + u^2) / (2g)$ になる。

L_1 と L_2 の比をとると、移動水槽の動力効率 η が得られる。

$$\eta = \rho Q v_2 u / \{ \gamma Q (v_2^2 + u^2) / (2g) \} = \rho Q v_2 u / \{ \rho Q (v_2^2 + u^2) / 2 \} = 2uv_2 / (u^2 + v_2^2)$$

この式を u で微分して零とおけば、最大の動力効率(失われる水動力を最小にする効率)が得られる

$$\begin{aligned} d\eta / du &= (d/du) \{ 2uv_2 / (u^2 + v_2^2) \} = \{ 1 / (u^2 + v_2^2) \} d(2v_2u) / du + (2v_2u) d\{ 1 / (u^2 + v_2^2) \} / du \\ &= 2v_2 / (u^2 + v_2^2) - 4v_2u^2 / (u^2 + v_2^2)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad u = v_2 \end{aligned}$$

即ち、水槽の移動速度 u が放水速度 v_2 と等しくなるととき最大の動力効率を得られる。

2.9 注水時の水槽の重さ (図 2(J))

(1) これもテキスト(3)に載っている例題である。秤の上に水槽を置き鉛直上方から水を落としながら重量を測ると、実際に水槽内にある水の重量より重くなる。その重みの差は？

水の落とし口から水槽の自由表面までを検査体積とし、(h)式を適用する。

$$\begin{aligned} F_s^* &= (p_2^* A_2 \cos \theta_2 + p_1^* A_1 \cos \theta_1 + \rho Q v_2 \cos \theta_2 + \rho Q v_1 \cos \theta_1) i \\ &\quad + (p_2^* A_2 \sin \theta_2 + p_1^* A_1 \sin \theta_1 + \rho Q v_2 \sin \theta_2 + \rho Q v_1 \sin \theta_1) j \end{aligned}$$

図(H)より $\theta_1 = 90^\circ$ 、 $\theta_2 = 90^\circ$ なので

$$F_s^* = (p_2^* A_2 + p_1^* A_1 + \rho Q v_2 + \rho Q v_1) j - g \rho V$$

落とし口を大気圧とすれば、自由表面も大気圧なので $p_2^* = p_1^* = 0$ である。故に

$$F_s^* = (\rho Q v_2 + \rho Q v_1) j - g \rho V$$

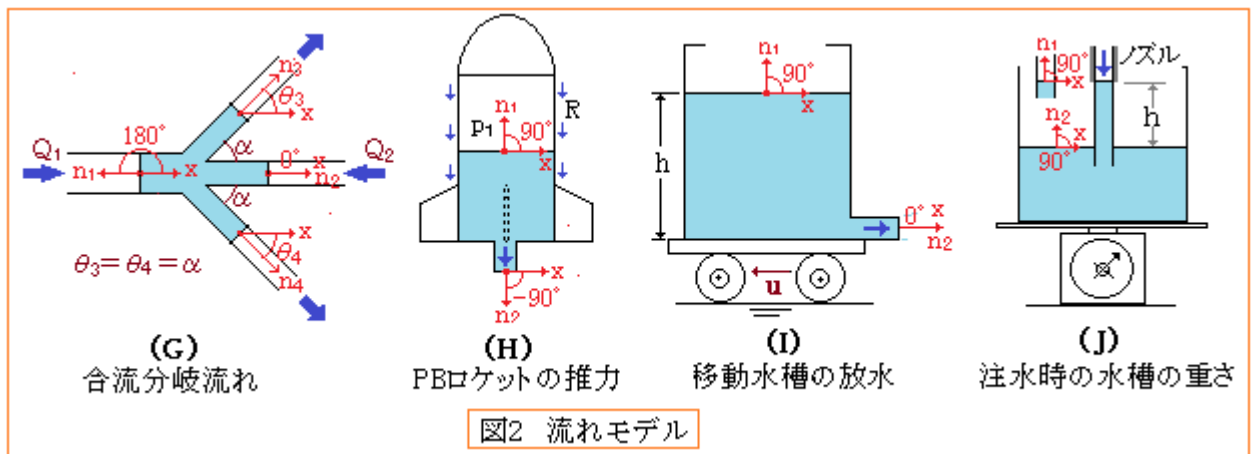
ここでベルヌーイの定理から、 $v_1^2 / 2 + gh = v_2^2 / 2 \rightarrow v_2 = (v_1^2 + 2gh)^{0.5}$ であるから

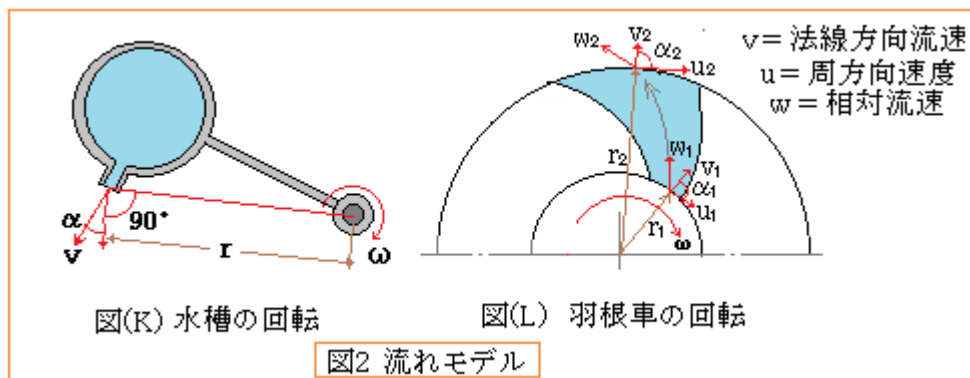
$$F_s^* = \rho Q \{ (v_1^2 + 2gh)^{0.5} + v_1 \} j - g \rho V$$

重力加速度 g は下向きなので

$$F_s^* = \rho Q \{ (v_1^2 + 2gh)^{0.5} + v_1 \} + g \rho V = \rho Q \{ (v_1^2 + 2gh)^{0.5} + v_1 \} + W$$

従って、秤の目盛りは実際の水重量 W よりも、 $\rho Q \{ (v_1^2 + 2gh)^{0.5} + v_1 \}$ だけ多くなる。





2.10 角運動量に関する例 (図 2(K) (L))

(1) まず、図(K)について。これもテキスト(3)に載っている例題である。回転支点からのレバーの先に取り付けられた水槽から流体が噴き出すと推力に槽は支点廻りに回転する。この場合の発生動力とその発生効率を求める。

水槽から放水がある時の推力は図(H)~(J)と同様、 $F_s^* = \rho Qv$ で与えられる。従って支点廻りの回転トルク T_s (→角運動量)は F_t に レバー長さ $r \cos \alpha$ を乗じたもので、動力 L_1 はこの T_s に角速度 ω をかけた形になる。即ち、

$$T_s = F_s^* r \cos \alpha = \rho Qv r \cos \alpha \rightarrow L_1 = T_s \omega = \omega \rho Qv r \cos \alpha,$$

なお、槽内の全水頭は 前 2.8 の(2)と同じように

$$h = (v_2^2 + u^2)/(2g) = \{v^2 + (\omega r)^2\}/(2g) \quad \text{但し回転速度 } u = \omega r$$

なので、このときの水放出による水槽が失う水動力 L_2 は、

$$L_2 = \gamma Qh = \gamma Q\{v^2 + (\omega r)^2\}/(2g)$$

動力効率 η は L_1 と L_2 の比をとって、

$$\eta = L_1/L_2 = \omega \rho Qv r \cos \alpha / [\gamma Q\{v^2 + (\omega r)^2\}/(2g)] = \frac{2\omega v r \cos \alpha}{\{v^2 + (\omega r)^2\}}$$

η の最大値は、 η の微分 $d\eta/d\omega$ から得られ、 $\eta_{\max} = \cos \alpha$ になる。

(2) 次に図(L)の例について。羽根車の中から羽根車を通して外に抜ける流れを考える。この場合遠心力によって流体は初め v の速度で円周法線方向に流れるが、羽根車の周速度 u によってゆがめられ w の速度で羽根通路を通過する。経過時間 Δt の間に羽根を通過する流量は $\rho Q \Delta t$ であってこの間に、運動量 $\rho Qv_1 \cdot \Delta t$ と角運動量 $\rho Qv_1 \cdot r_1 \cos \alpha_1 \cdot \Delta t$ を失い、運動量 $\rho Qv_2 \cdot \Delta t$ と角運動量 $\rho Qv_2 \cdot r_2 \cos \alpha_2 \cdot \Delta t$ を得ることになる。従って、角運動量の時間変化率(→固定軸廻りトルク)は、

$$T = (\rho Qv_2 \cdot r_2 \cos \alpha_2 \cdot \Delta t - \rho Qv_1 \cdot r_1 \cos \alpha_1 \cdot \Delta t) / \Delta t = \rho Q(v_2 \cdot r_2 \cos \alpha_2 - v_1 \cdot r_1 \cos \alpha_1)$$

になる。法線方向の流速 v のみがトルクに関係する。圧力項は無視している。

以上

引用文献テキスト)

- (1) R. D. Blevins “Applied Fluid Dynamics Handbook” 6.4.7 Force on Bend
- (2) J.M.Kay “An Introduction to Fluid mechanics and Heat Transfer “(井上訳本)
- (3) 太田英一「水力学および流体力学演習」(学献社)
- (4) JSME 機械工学便覧—水力学および流体力学
- (5) 流体力学関連ネット情報など