

【整番】 FE-01-TG-005	【標題】 ベルヌーイ式の運用例
分類：流れ(非圧縮性流れ)／種別：技術手引き	作成年月：H20.3／改訂：Ver0.0 (H20.3) 作成者：N.Miyamoto

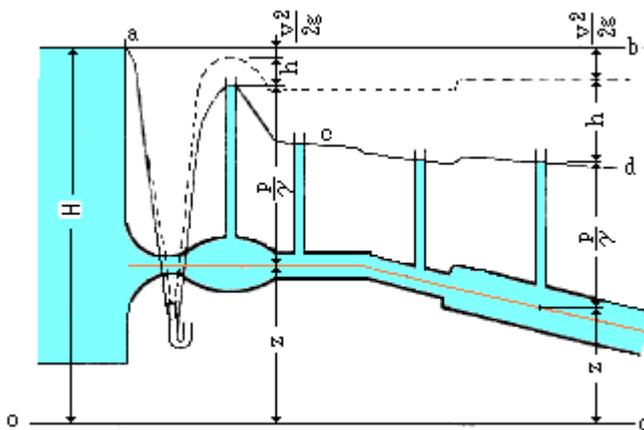
全6枚

ベルヌーイの式は、圧縮性と粘性を考えない理想流体についてエネルギー式から導かれたもの。普通、一本の流線に沿って成立するので流線の式とも云う(基本的には流線が異なれば成立しない)。実用式として次式が用いられる。

$$\text{定常流： } p/\gamma + v^2/(2g) + z + h = H \text{ (定数) } , \text{ または} \\ p + (1/2) \rho v^2 + \gamma z + \gamma h = H \text{ (定数) }$$

$$\text{非定常流： } p/\gamma + v^2/(2g) + z + h + \int_s (\partial v/\partial t) ds = \text{定数} , \text{ または} \\ p + (1/2) \rho v^2 + \gamma z + \gamma h + \gamma \int_s (\partial v/\partial t) ds = \text{定数}$$

ここで、 p = 静圧(kg/m²)、 v = 流速(m/s)、 z = 位置ヘッド(m)、 h = 損失ヘッド(m) { $=kv^2/(2g)$ }
 γ = 比重量(kg/m³)、 g = 重力加速度(m/s²)、 ρ = 密度(kg s²/m⁴)、 t = 時間、 s = 流線に沿う長さ
 k = 圧力損失係数



第19図 各ヘッドの関係と水力勾配線

以上は、機械工学便覧第8編の記述によっている。ベルヌーイ式はたいへん効能のある式で、連続の式と組み合わせると、大半の管路の問題は解ける。

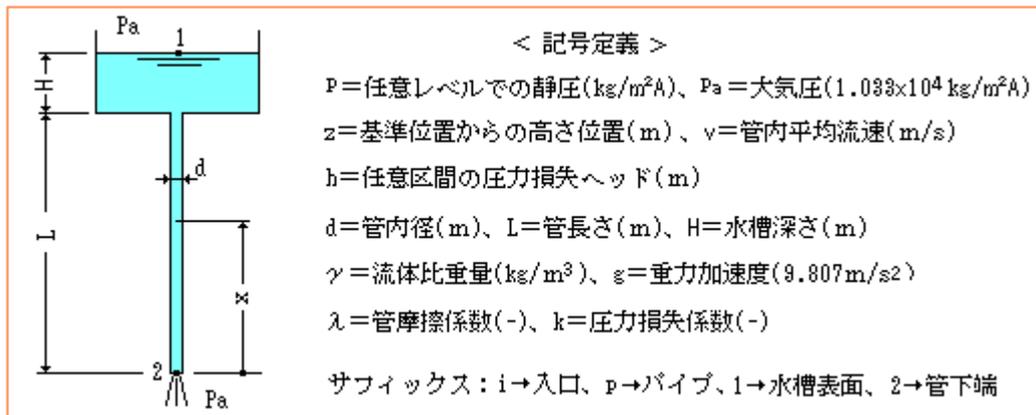
以下、定常のベルヌーイ式の運用例について5ケース、例示する。なお今回は1ケースのみ、残余は逐次。

- Ex.1 高架水槽からの流下—鉛直重力流れ
- Ex.2 未定
- Ex.3 未定
- Ex.4 未定
- Ex.5 未定

なお流体力学的に定義されるベルヌーイ式に関し、Blevinsのテキストから抜粋したものを末尾に添付する(参照されたし)。

Ex.1 高架水槽からの流下—鉛直重力流れ

Q. 図1のように高所にある開放水槽から垂直に水が流下して大気に放出されている。流下管の平均流速と圧力水頭分布を求めよ。但し、水槽深さ 1m、流下管内径 0.2m x 長さ 8m、管入口圧損係数 0.5、管摩擦損失係数 0.02 とする。



A. 水槽内流速の流速を無視する。水槽表面と管下端の間にベルヌーイ式を適用して

$$p_1/\gamma + z_1 = p_2/\gamma + z_2 + v^2/(2g) + h_i + h_p$$

ここで、 $p_1/\gamma = p_2/\gamma = p_a/\gamma$ 、 $z_1 = (L+H)$ 、 $z_2 = 0$ 、 $h_i = k v^2/(2g)$ 、 $h_p = \lambda (L/d) v^2/(2g)$ であるから、

$$(L+H) = v^2/(2g) + k v^2/(2g) + \lambda (L/d) v^2/(2g)$$

これより流速 v をもとめると、

$$v = [2g(L+H)/(1+k+\lambda L/d)]^{0.5} \text{ -----(a)}$$

管内の圧力分布を求めるため、管下端より上方に x をとり、その点と管下端の間にベルヌーイ式を適用する。なお

$$p/\gamma + x + v^2/(2g) = p_2/\gamma + v^2/(2g) + \lambda (L/d) v^2/(2g)$$

ここで $P_2 = P_a$ とおき、式を変形して

$$p/\gamma = p_a/\gamma + \lambda (L/d) v^2/(2g) - x \text{ -----(b)}$$

x が大きくなり管上端に近づくにつれて、静圧 p は減少する。管上端手前では、 $x \doteq L$ として

$$p/\gamma \doteq p_a/\gamma + \lambda (L/d) v^2/(2g) - L$$

管入口には $h_i = k v^2/(2g)$ なる圧力損失がある。また水槽底面 ($x=L$) の管入口近くには近寄り流れがあり実際には零流速ではないが、総体的にみて $x=L$ をやや上回る位置では $v=0$ と見なせる。故に水槽底面付近と管下端との間にベルヌーイ式を適用して、

$$p/\gamma + L \doteq p_2/\gamma + v^2/(2g) + k v^2/(2g) + \lambda (L/d) v^2/(2g)$$



$$p/\gamma \doteq p_a/\gamma + \{1 + \lambda (L/d) + k\} v^2/(2g) - L$$

上記の流速 v に、(a) 式の v を用いて、

$$\begin{aligned} p/\gamma &= p_a/\gamma + \{1 + \lambda (L/d) + k\} \{2g(L+H)/(1+k+\lambda L/d)\}/(2g) - L \\ &= p_a/\gamma + H \text{ -----(c)} \end{aligned}$$

一方、水槽の表面と水槽底面付近の間にベルヌーイ式を適用して、

$$p_a/\gamma + H = p/\gamma$$

であるから $p/\gamma = p_a/\gamma + H$ 、これは(c)式に同じ。即ち、水槽表面からベルヌーイ式を適用しても管の下端からベルヌーイ式を適用しても、静圧ヘッド p/γ は同じである(当然ながら然り)。

以上より まとめれば

$$\begin{aligned} 0 < x < L : & \quad p/\gamma = p_a/\gamma + \lambda (L/d)v^2/(2g) - x \\ L \leq x \leq (H+L) : & \quad p/\gamma = p_a/\gamma + (H+L-x) \end{aligned}$$

ここで $H=1\text{m}$ 、 $L=8\text{m}$ 、 $k=0.5$ 、 $\lambda=0.02$ 、 $d=0.2\text{m}$ 、 $p_a=1.033 \times 10^4 \text{ kg/m}^2$ 、 $\gamma=1000 \text{ kg/m}^3$
この場合、管内平均流速 v は、

$$v = [2g(L+H)/(1+k+\lambda L/d)]^{0.5} = [2 \times 9.807 \times (8+1)/(1+0.5+0.02 \times 8/0.2)]^{0.5} = 8.76 \text{ (m/s)}$$

かなり速い(速すぎて問題)。静圧 p は、

$$\begin{aligned} 0 < x < 8 : & \quad p = p_a + \gamma \{ \lambda (L/d)v^2/(2g) - x \} = 1.033 \times 10^4 + 1000x \{ 0.02 \times (8/0.2) \times 8.76^2 / (2 \times 9.807) \} - X \\ & \quad = 1.033 \times 10^4 + 10^3 x (3.13 - x) \end{aligned}$$

$$8 \leq x \leq 9 : \quad p = p_a + \gamma (H+L-x) = 1.033 \times 10^4 + 10^3 x (9-x)$$

管上端近く $x=7.8\text{m}$ では、 $p=1.033 \times 10^4 - 4.67 \times 10^3 = 0.566 \times 10^4 \text{ kg/m}^2 \text{A} = 0.566 \text{ kg/cm}^2 \text{A}$

水槽底面 $x=8\text{m}$ では、 $p=1.033 \times 10^4 + 1 \times 10^3 = 1.133 \times 10^4 \text{ kg/m}^2 \text{A} = 1.133 \text{ kg/cm}^2 \text{A}$

であるから、管入口付近で、ドラスチックに静圧変化を起こすことがわかる。

水槽からの出口付近で負圧になることは設備計画上、注意を要する。

【 末尾添付 】

Applied Fluid Dynamics Handbook Chapt.5 Conservation Equation (by R. D. Blevins) 抜粋

5.4 ベルヌーイの式

5.4.1 式の提示

Table 5-3 に示されるベルヌーイ式は、同時刻における流体容積の2つの離れた位置における流れの動的な特性を関係づけるものである。これらの式は前節のエネルギー式の形をとる。これらベルヌーイ式は次の仮定のもとで流れの2つのポイントのエネルギー式を積分することで得られる。

1. 流体に対し何の仕事もなされない、あるいは流体によって何の仕事もなされない。流体の境界が固定されるかぎり常に然り。
2. 境界越しのあるいは流体内の熱伝達は無視できる。
3. **Table 5-4** にリストされた代替制限に示されるように、粘度や渦度あるいは2つのポイントの位置についてある種の制限が加わる。

渦度は流体要素の回転の尺度である。粘性せん断や外力によって渦が起ると粘度による減衰があってもなかなか消えない傾向がある。

従ってベルヌーイ式の適用(Table 5-3)において、Table 5-4 のフレーム 1 の粘度零(0)の仮定は Table 5-4 のフレーム 2 及び 4 の渦度零(0)の仮定に比べて一般に制限の少ない (ルーズな)仮定といえる。

それ故にベルヌーイ式は、一般に Table 5-4 のフレーム 1 に示されるような仮定の下で、定常流れにおけるパスラインや流線に沿った 2 ポイントに適用される。

場合によっては Table 5-3 のベルヌーイ式と Table 5-2 のエネルギー式が同時に適用されることもある。例えば、定常非圧縮性流れでは、Table 5-2 のフレーム 6 のエネルギー式は流線の両端のエネルギーを関係づけるために使用できる。

$$u_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1.$$

ここで u =特定の内部エネルギー、 p =流体静圧(絶対)、 ρ =密度、 V =流速の大きさ、 g =重力加速度、 z =エレベーション(高さ位置)、

これに引き当たるベルヌーイ式が Table 5-3 のフレーム 2 で与えられている。

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1.$$

両方の式が同時に適用される時、これら 2 つの式の比較から、容易に内部エネルギーが一定即ち $u_1 = u_2 = \text{一定}$ でなければならないことがわかる。これは、粘性がないとき、定常の非圧縮性流れの温度が流線上で一定であることを意味している。

対照的に、圧縮性流体の場合は、流管の端部の圧縮性ガスの定常断熱流れを表現するエネルギー式(→Table 5-2 のフレーム 6)において、 $\dot{Q} = \dot{W}_s = 0$ とおくと次式が得られる。

$$u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1$$

しかし、これに相当するベルヌーイ式は $p_2/\rho_2 + V_2^2/2 + gz_2 = p_1/\rho_1 + V_1^2/2 + gz_1$ ではなく次式 (→Table 5-3 のフレーム 5) のようになる(☆7)。

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1$$

ここで γ = 比熱比(= C_p/C_v)

これら 2 つの式を引き算し、流線に沿ってその結果を微分し、完全ガス則 $dp = RTd\rho + \rho RdT$ を取り込んで次の結果が得られる。

$$du = \frac{1}{\gamma - 1} R dT$$

更に $\gamma = C_p/C_v$ 、 $C_p - C_v = R$ であるから、完全ガスの内部エネルギーは温度のみの函数として次のように表わすことができる。

$$u = C_v T$$

これは14章の(14-4)式に合致する。このようにベルヌーイ式は非粘性完全ガスのエネルギー保存式と一致している(矛盾していない)。

定常非圧縮性流れのベルヌーイ式 (Table 5-3 のフレーム 2) は、流体力学において最も古い式の一つではあるが、流力分野では最もパワフルな結果をもたらす。

水銀気圧計のイタリア人発明家トリチェリは、タンクの開口からの水の流速が開口部より上の水面の高さの平方根に比例するのを証明する際にその式がひらめいた。数学者 Daniel Bernoulli はこれを一般化した式を著書の Hydrodynamica(1738)に記述したので彼の名前をとりベルヌーイの式と呼ばれている。

Table 5-3 ベルヌーイ式

条件(コメント付き) (a)	ベルヌーイ式
1. (a) 非圧縮性流体 (b) 非定常流れに適用	$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1$ <p>(注) 積分はある瞬間にて実行する (脚注(b)参照)</p>
2. (a) 非圧縮性流体 (b) 定常流れに適用	$\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1$
3. (a) 圧縮性流体 (密度は圧力のみ関数) (b) 非定常流れに適用	$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 = \frac{v_1^2}{2} + gz_1$ <p>(注) 積分はある瞬間にて実行する</p>
4. (a) 圧縮性流体 (密度は圧力のみ関数) (b) 定常流れに適用	$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 = \frac{v_1^2}{2} + gz_1$

5. (a) 圧縮性流体
 (b) 完全ガスの断熱流れ
 $P/\rho^\gamma = \text{一定} (*1)$
 (c) 定常流れに適用
 (d) 衝撃波の介在無し

$$\frac{V_2^2}{2} + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{P_2}{\rho_2} + gz_2 = \frac{V_1^2}{2} + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{P_1}{\rho_1} + gz_1 \quad (\star 7)$$

あるいは

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} - \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{P_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] + g(z_2 - z_1) = 0 \quad (\star 8)$$

あるいは

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} - \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{P_1}{\rho_1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) + g(z_2 - z_1) = 0 \quad (\star 8)$$

(注記) これらの式から、淀みゾーン(流速零)の圧力(p_0)は次のようになる。

$$P_0 = P_1 + \frac{1}{2} \rho_1 V_1^2 \left(1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2-\gamma}{24} M^4 + \dots \right)$$

ここで $M = V_1/C = \text{マッハ数}$ 、 $C = \text{音速}$ 、
 $\rho_1 = \text{流速 } V_1 \text{ における流体圧力}$

【 Table 5-3 記号説明 】

$g = \text{重力による加速度または任意の一樣/定常力場による加速度}$ 、 $P = \text{流体静圧(abs)}$
 $P_0 = \text{淀み点の流体圧力}$ 、 $ds = \text{流体進路に沿う要素}$ 、 $T = \text{絶対温度}$ 、 $t = \text{時間}$ 、 $\rho = \text{流体密度}$ 、
 $V = \text{内部座標フレームで測られた流速の大きさ}$ 、 $z = g \text{ に対抗する距離}$ 、
 $\gamma = \text{比熱比(=定圧比熱/定容比熱)}$ 、

流体に対する仕事はない、また熱の伝達もないものとする。添え字1,2は ある瞬間の流れの2ポイントを表わす。流体は粘度を持たずポイント1,2は Table 5-4 の代替条件に由る場合を除いて 流体の通路(定常流れの流線)に沿うものでなければならない。

【 注記 】

(*1) $[P/\rho^\gamma = \text{一定}]$ は可逆断熱(等エントロピ)プロセス、即ち粘性拡散や伝熱のないプロセスにおいて理想ガスに対し保持される。

脚注 (a) 假定条件についての詳細な議論は Table 5-4 と本文参照のこと

(b) この式は流体中の任意点で $\partial\Phi/\partial t + V^2/2 + gz + P/\rho = F(t)$ に相当する。この場合 Φ は速度ポテンシャルで $F(t)$ は流体中の全てのポイントに作用する。添付 C 参照。