

2分冊その2(2/2)

Table 5-4 ベルヌーイ式(Table 5-3)の成立に要する選択的な前提条件

共通の前提:(1)熱伝達なし、(2)仕事なし、(3)下記の4ケースのいずれか

ケース	密度	粘度(ν)	渦度($\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$)	ポイント1,2の位置
1.	制約なし	$\nu = 0$	制約なし	流体の経路に沿って
2.	制約なし	$\nu = 0$	$\vec{\omega} = 0$ (回転なし)	制約なし ^(b)
3.	制約なし	$\nu = 0$	$(\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot ds = 0$	$\vec{\omega}$ と \vec{v} の両者に接する表面内に1-2の経路あり ^{(b)(c)}
4.	非圧縮性	$\nu = \text{一定}$	$\vec{\omega} = 0$ (回転なし)	制約なし ^(b)

脚注) (b) これらのケースでは Table 5-3のフレーム1, 3の積分 $\int_1^2 (\partial v/\partial t) ds$ は $\int_1^2 (\partial \vec{v}/\partial t) ds$ で置き換えられる。ここで \vec{v} = 速度ベクトル
 ds = ポイント1-2の経路ベクトル要素、 \cdot = ベクトルドット積 (内積)

(c) 2次元流れではフレーム1の適用になる。

5.4.2 ベルヌーイ式の例

ピトー管(ピトー静圧管)。Fig.5-5 にピトー管を示す。この装置の目的は同時に静圧と動圧を測ってその差圧から流速を予測することであり、流量計測用として産業分野で広く使用されている。

非圧縮性定常流れでは、流速が零になるピトー管中央オリフィスの圧力(p_0)は、Table 5-3 のフレーム 2 のベルヌーイ式を用いて、自由流れの圧力(p_1)と速度 V に関係づけられる。

$$p_0 = p_1 + \rho V^2/2 \quad \text{-----(5-25)}$$

ここで ρ = 流体密度である。ピトー管を囲う孔で測られた圧力は、流体流れの静圧(p_1)とピトー管の干渉による流力成分の合計にほぼ等しい。即ち

$$p_2 = p_1 + k \rho V^2/2$$

ここで $k \ll 1$ 、従って ピトー管で計測された 2 つの圧力の差は、

$$p_0 - p_2 = (1 - k) \rho V^2/2 = K \rho V^2/2 \quad \text{-----(5-26)}$$

ここで $K = (1 - k) \approx 1$ 、非乱流の定常非圧縮性流れでは K は非圧縮性流れのレイノルズ数 ($Re = VD/\nu$) の関数である。 K は一般にカリブレーションによるが、よく設計された計器では殆ど 1 に近い。

Fig.5-5 のマンオメータの流体高さの差は、Table 5-3 のフレーム 2 のベルヌーイ式をピトー管の静止界面におけるマンオメータチューブに適用すれば求めることができる。その結果は

$$p_0 - p_2 = \rho_m gh \quad \text{-----(5-27)}$$

ここで、 ρ_m = マンオメータの中の流体密度(通常水あるいは水銀で $\rho_m \gg \rho$)、 g = 重力加速度、 h = Fig.5-5 に示される高さの差、

(5-26)式と(5-27)式を組合わせて流速はマンメータの高さの差 h の関数として表わされる。

$$V = (2\rho_m / K\rho)^{1/2} g^{1/2} h^{1/2} \quad \text{-----(5-28)}$$

この方程式は、流体高さの差を読み取って流速を予測するとき可以使用できる。

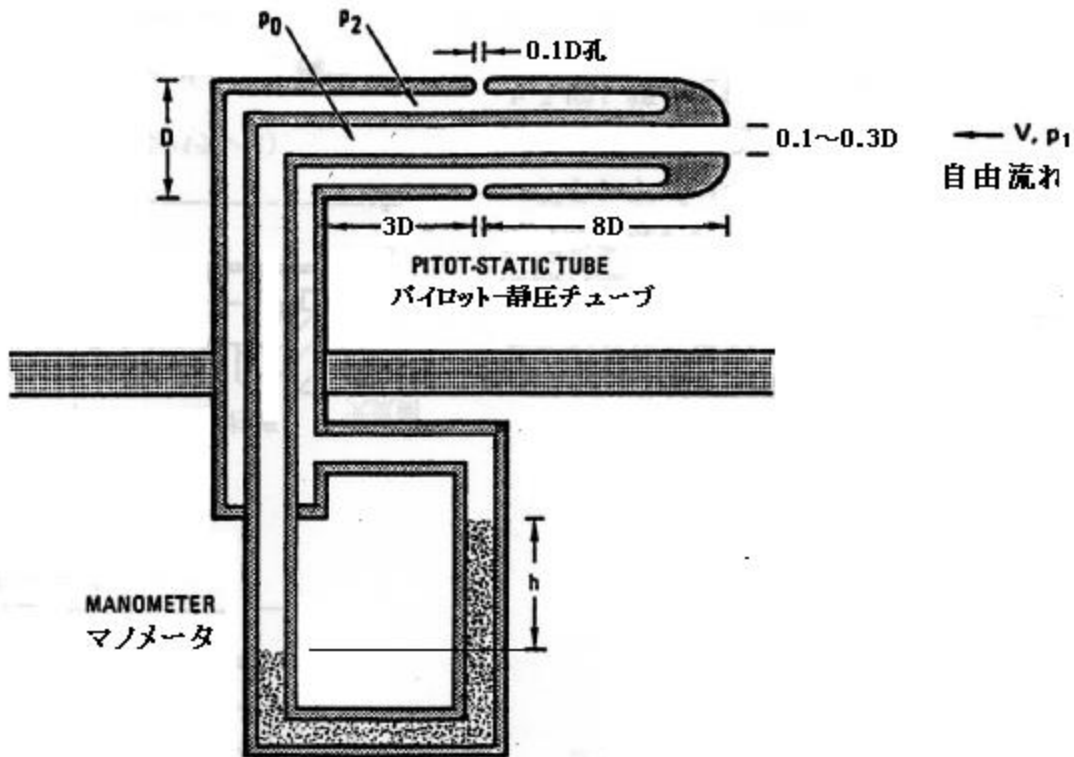


Fig. 5.5 パイロット静圧チューブとマンメータ

【 5.4 節の注記 】 - TS 作成者

(*7) 圧縮性流体のベルヌーイ式は Table5-3 のフレーム 4、即ち

$$\int(dp/\rho) + v_2^2/2 + gz_2 = +v_1^2/2 + gz_1$$

であるが、非圧縮性流体の場合と違って圧力が密度によって変化するので第 1 項は積分形になっている。ベルヌーイ式は熱の出入りを考えず断熱変化(等エントロピ変化)を前提とするのでこの場合、 $dp/p = \gamma d\rho/\rho$ あるいは $p/\rho^\gamma = 1$ 一定の関係が存在する。従って $dp = \gamma(p/\rho)d\rho$ 及び $p/\rho^\gamma = C$ を第 1 項に代入すると、

$$\begin{aligned} \int(dp/\rho) &= \gamma \int(p/\rho^2)d\rho = \gamma C \int \rho^{\gamma-2} d\rho = \gamma C [1/(\gamma-1)] \rho^{\gamma-1} i^2 \\ &= C \{ \gamma / (\gamma-1) \} [(\rho^\gamma/\rho)] i^2 = C \{ \gamma / (\gamma-1) \} [(p/C/\rho)] i^2 = \{ \gamma / (\gamma-1) \} [(p/\rho)] i^2 \\ &= \{ \gamma / (\gamma-1) \} (p_2/\rho_2) - \{ \gamma / (\gamma-1) \} (p_1/\rho_1) \end{aligned}$$

これを上記のフレーム 4 の式に代入するとフレーム 5 の式、即ち

$$v_2^2/2 + \{ \gamma / (\gamma-1) \} (p_2/\rho_2) + gz_2 = v_1^2/2 + \{ \gamma / (\gamma-1) \} (p_1/\rho_1) + gz_1$$

が得られる。

(*8) これらの式は、いずれも次のオリジナル式を運用上の理由で変形したものである。

$$\text{オリジナル式} \rightarrow (v_2^2 - v_1^2)/2 + \{ \gamma / (\gamma-1) \} (p_2/\rho_2 - p_1/\rho_1) + g(z_2 - z_1) = 0$$

ここで第 2 項だけをみると

$$(p_2/\rho_2 - p_1/\rho_1) = -(p_1/\rho_1) \{ 1 - (p_2/p_1)(\rho_1/\rho_2) \}$$

等エントロピ関係 $p_2/\rho_2^\gamma = p_1/\rho_1^\gamma$ を用いて

$$-(p_1/\rho_1)\{1-(p_2/p_1)(\rho_1/\rho_2)\} = -(p_1/\rho_1)\{1-(p_2/p_1)(p_2/p_1)^{-1/\gamma}\} = -(p_1/\rho_1)\{1-(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}\}$$

またこの結果に等エントロピ関係 $p_1/T_1^{\gamma/(\gamma-1)} = p_2/T_2^{\gamma/(\gamma-1)}$ を用いて

$$-(p_1/\rho_1)\{1-(p_2/p_1)(\rho_1/\rho_2)\} = -(p_1/\rho_1)\{1-(T_2/T_1)\}$$

これらの結果を用いると Table 5-3 のフレーム 5 の式が得られる。即ち

$$(v_2^2 - v_1^2)/2 - \{\gamma/(\gamma-1)\}(p_1/\rho_1)\{1-(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}\} + g(z_2 - z_1) = 0$$

$$(v_2^2 - v_1^2)/2 - \{\gamma/(\gamma-1)\}(p_1/\rho_1)\{1-(T_2/T_1)\} + g(z_2 - z_1) = 0$$

5-5. 運動量の保存

5-5-1 運動量の式

最も単純なフォームでは、運動量(モーメントム)の保存はニュートンの運動の第2法則で表される。

$$\text{作用力の総和} = \text{モーメントムの変化量} \quad \text{----- (5-29)}$$

モーメントムは方向量なので、この式はベクトル方程式である。従って(5-29)式は3次元系の3成分運動量の式か、トルクを用いた角運動量の式で表される。

検査システムに関する運動量には検査面を横切る流れの運動量はもちろんのこと、検査体積内にある流体の運動量も含まれる。これを考えれば、(5-29)式の右辺は次のように改められる。

$$\text{検査システムの運動量の変化量} = \text{検査体積内の運動量の変化量}$$

$$+ \text{流入流体の運動量} - \text{流出流体の運動量}$$

定常運転では検査体積内の運動量は一定で変わらないので当然、運動量の変化量は零(0)である。

検査システムに加わる作用力には、各流体要素の重力による**体積力**、検査面に接する構造物から加えられる**機械力(☆9)**および流入/流出流体の流れによって検査面に加えられる**流体力**の3つある。

後者の流体力は、検査面に垂直な流体力と検査面内に作用する流体力である。すなわち

$$\text{検査面にかかる流体力} = \text{垂直力の合計} + \text{接線力の合計}$$

接線力は専ら粘性せん断応力から生じる。一方、垂直力は圧力と粘性応力によるが、多くの場合、流体圧力に依存する。

保存式全体で見れば、検査システムの運動量保存には機械的な力と流動による力が併存していることがわかる。即ち

$$\text{検査面に働く機械力} + \text{検査体積に働く重力} + \text{検査面に働く流体垂直力}$$

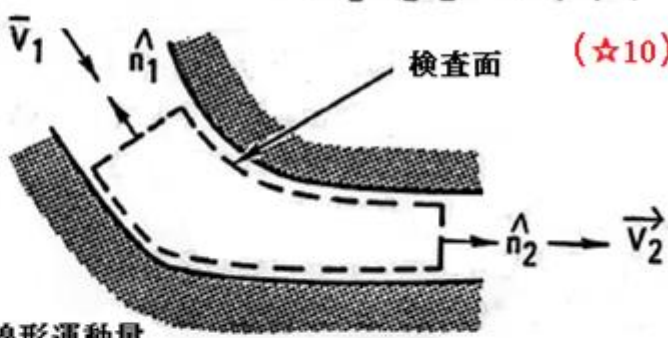
$$+ \text{検査面に働く流体接線力} = \text{検査体積内の運動量変化量}$$

$$+ \text{検査面からの流入による運動量} - \text{検査面からの流出による運動量}$$

$$\text{----- (5-30)}$$

Table 5-5 の式は(5-30)式と(5-29)式を具体的に表現したもので、検査システムの挙動に関していろんな仮定をおいている。これらの式の運用で重要なのは、検査面に働く**機械力が梁/支柱/板等**にかかる**流体荷重に対する機械的な反力**を含んでいることである。

Table 5-5. 運動量(モーメンタム)式

条件(コメント付き)	運動量(モーメンタム)式
1. (a) 変形可能な検査面を持つ コメント(*1)	$\vec{F} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV + \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_b) \cdot \hat{n} dA$ 線形運動量
2. (a) 変形可能な検査面を持つ (b) 検査面に直交する応力は主に圧力による コメント(*2)	$\vec{F}_s + \vec{g} \int_V \rho dV - \int_S p \hat{n} dA + \int_S \vec{\tau} dA$ $= \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV + \int_V \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_b) \cdot \hat{n} dA$ 線形運動量
3. (a) 変形不可の検査面を持つ (b) 定常状態にある	$\vec{F}_s + M\vec{g} - \int_S p \hat{n} dA = \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA - \int_S \vec{\tau} dA$ 線形運動量
4. (a) 変形不可の検査面を持つ (b) 定常状態にある (c) 検査面上の流体せん断応力は無視する($\tau = 0$) (d) 出入口全域で一様な流量と圧力の分布 (e) 流れ直交断面で測った面積 (f) 非圧縮性流れ コメント(*3)	$\vec{F}_s + M\vec{g} = p_2 A_2 \hat{n}_2 + p_1 A_1 \hat{n}_1 + \rho v_2^2 A_2 \hat{n}_2 + \rho v_1^2 A_1 \hat{n}_1$  線形運動量
5. (a) 変形可能な検査面を持つ コメント(*4)	$\vec{T} = \frac{d}{dt} \int_V \rho (\vec{r} \times \vec{v}) dV + \int_S \rho (\vec{r} \times \vec{v}) (\vec{v} - \vec{v}_b) \cdot \hat{n} dA$ 角運動量タイプ
6. (a) 変形不可の検査面を持つ (b) 定常状態にある (*5)	$T = \int_S \rho r v_\theta \vec{v} \cdot \hat{n} dA$ 角運動量タイプ

- (*1) この式は非定常状態に適用する。検査体積に作用する全ての表面力/体積力を含む。
- (*2) この式は非定常状態に適用する。この式は作用する力がはっきり示されている点でフレーム1と違っている。
- (*3) \hat{n}_1 と \hat{n}_2 は検査面外向きの単位直交ベクトル 即ち $\vec{V}_1 = -V_1 \hat{n}_1$, $\vec{V}_2 = V_2 \hat{n}_2$.
- (*4) この式は軸 $\vec{r} = 0$ 周りの非定常の角運動量保存式
- (*5) この式は軸 $\vec{r} = 0$ 周りの角運動量保存式。 V_θ は半径に垂直な速度成分で、
 V_θ と T は軸 $r = 0$ 周りと同じように正になる。

【 記号説明 】

\vec{F} = 検査体積に作用する力ベクトル、	\vec{T} = S上に作用する流体トルクとは別の固定軸廻りのトルクベクトル、あるいは軸トルク
\vec{F}_s = S全面に作用する流体力とは別の検査体積に作用する力ベクトルあるいは軸力	T = 固定軸廻りのトルク、 t = 時間、
\vec{g} = 重力に由る加速度ベクトル、	\vec{V} = 流速ベクトル、 dA = 検査面の小要素、
M_s = 検査面で囲われた流体質量、	\vec{V}_s = 検査面要素 dA の速度ベクトル、
\hat{n} = 検査面から外向きで dA に垂直な単位ベクトル	\vec{V}_θ = 固定軸 $r = 0$ に関する円周速度ベクトル
p = 流体静圧(絶対)、 r = 固定軸からの半径、	V = 検査面で囲われた体積、 ρ = 流体密度、
\vec{r} = 固定軸からの半径ベクトル、 S = 検査面、	$\vec{\tau}$ = dA 面内に作用するせん断応力ベクトル、
\cdot = ドット積ベクトル、 \times = 外積ベクトル	

(注) 全ての速度は慣性座標軸に関して計算される。

5.5.2 運動量の保存の例

(1) パイプ流れ。一様なパイプを通る非圧縮性流体の定常流れは Fig.5-4 で示すように Table 5-5 のフレーム 3 の運動量の式で表される。軸力 F_s はこの検査体積では零(0)で、重力の効果は重力による加速度 g を零(0)にセットすることで無視される。これら条件のもとで Table 5-5 のフレーム 3 の運動量の式は次のようになる。

$$\int_S \vec{\tau} dA = \int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA + \int_S p \hat{n} dA. \quad \text{----- (5-31)}$$

せん断応力ベクトル $[\rightarrow \tau]$ は流れに逆らってパイプ内面に作用する。従って径 D 長さ L の円管の場合、次のようになる。

$$\int_S \vec{\tau} dA = -\pi D L \tau \hat{i}. \quad \text{----- (5-32)}$$

なお \hat{i} は流れ方向の単位ベクトル。

一様な直管を通る非圧縮性流れでは、流れ面積当たりの平均流出入速度は等しく $V_1 = V_2 = U$ で (5-31) 式の右辺第 1 項は全く零(0)になる。即ち、

$$\int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA = \frac{\pi D^2}{4} (V^2 - V^2) = 0 \quad \text{----- (5-33)}$$

流体の運動量の正味の変化は全くない。

(5-31) 式の静圧 p の積分は、圧力が断面一様であるなら、検査体積の入口～出口の間に限り

零ではない。即ち、

$$\int_s p \hat{n} dA = \frac{\pi D^2}{4} (p_2 - p_1) \hat{i}, \quad \text{----- (5-34)}$$

ここで p_1, p_2 = 検査体積の入口, 出口における圧力

(5-33)、(5-34)式を(5-31)式に代入して、圧力降下量を用いて管壁上のせん断応力を表わすことができる。即ち、

$$\tau = (p_1 - p_2)(D/4L)$$

ここで、 $(p_1 - p_2) = (1/2)\rho U^2 f L/D$ であるから、これを用いてせん断応力を摩擦係数 f で表わすことができる。即ち、

$$\tau = (1/8)\rho U^2 f$$

従って管壁のせん断応力は摩擦係数あるいはパイプに沿う圧力勾配に比例する。

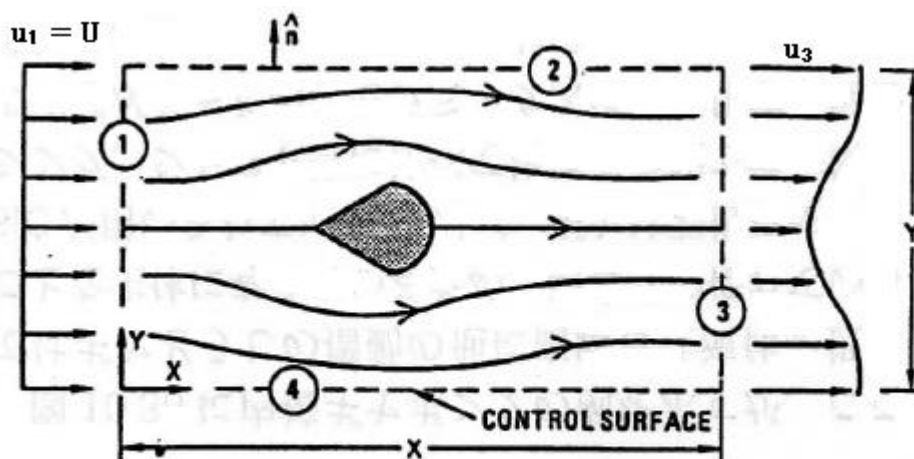


Fig. 5-6. Control surface surrounding a two-dimensional structure in a flow.
流れに置かれた2次元構造物を囲む検査面

(2) ドラッグ(抗力)の見積りのための運動量の積分(☆11)。定常2次元の非圧縮性流れの中に置かれた Fig.5-6 のような構造物を考える。Fig.5-6 に示されるこの流量と検査体積に対する質量保存則は Table 5-1 のフレーム 1 の 3 番目のコラムから与えられる。

$$\int_0^Y (u_1 - u_3) dy = \int_0^X (v_2 - v_4) dx. \quad \text{----- (5-35)}$$

ここで u は x 方向、 v は y 方向の速度である。添字 1~4 は検査体積の辺を表わしている。この流れにおける運動量の保存は Table 5-5 のフレーム 3 で与えられる。即ち

$$\vec{F}_s = \int_s p \hat{n} dA + \int_s \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA - \int \vec{\tau} dA \quad \text{----- (5-36)}$$

x 方向の運動量では $[\rightarrow F_s]$ の x 成分はドラッグの負成分なのでこの式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 -F_x = \text{Drag} = & \int_0^Y (p_1 - p_3) dy + \int_0^Y (\rho u_1^2 - \rho u_3^2) dy \\
 & + \int_0^X (\rho u_4 v_4 - \rho u_2 v_2) dx + 2x(\text{辺2} \sim \text{4に沿うせん断応力})
 \end{aligned}
 \tag{5-37}$$

ここで添字は検査体積の辺を表わしている。もし辺 2, 4 に沿う x 方向流速が自由流れの流速に近づいて $u_2 = u_4 = U$ となるなら、(5-35)式を用いて、

$$\rho \int_0^X (u_4 v_4 - u_2 v_2) dx = \rho U \int_0^X (v_4 - v_2) dx = \rho U \int_0^Y (u_3 - u_1) dy
 \tag{5-38}$$

これを(5-37)式に代入すると構造物廻りの流れによってドラッグが生じる。即ち、

$$\begin{aligned}
 \text{Drag} = & \int_0^Y (p_1 - p_3) dy - \rho U^2 \int_0^Y \frac{u_1}{U} \left(1 - \frac{u_1}{U} \right) dy + \rho U^2 \int_0^Y \frac{u_3}{U} \left(1 - \frac{u_3}{U} \right) dy \\
 & + 2x(\text{辺2と4に沿うせん断応力})
 \end{aligned}
 \tag{5-39}$$

この式は構造物廻りの流量計測から 2次元構造物のドラッグを見積もるときに使用できる。

もし構造物が大気のような大きな開放流れ場の中に置かれるなら、X 方向/Y 方向とも広がって u_1 は平均流速 U に近づき、辺 2 と辺 4 のせん断応力は無視でき、 p_1 は殆ど自由流れの圧力のときの p_∞ になる。即ち、

$$\text{Drag} = \int_0^Y (p_\infty - p_3) dy + \rho U^2 \int_0^Y \frac{u_3}{U} \left(1 - \frac{u_3}{U} \right) dy.
 \tag{5-40}$$

さらに辺が広がって u_3 と p_3 も自由流れの値に近づく。実験では u_3 はかなりゆっくりと自由流れの U に近づき、 p_3 は p_∞ に漸近して、(5-40)式は次のようになる。

$$\text{Drag} = \rho U^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_3}{U} \left(1 - \frac{u_3}{U} \right) dy.
 \tag{5-41}$$

この式は 2次元構造物の単位深さ当りのドラッグを後流のウエーキの速度欠損に関係付けている(なおこの計測における圧縮性の効果は関連文献による)。

【 5.5 節の注記 】 - TS 作成者

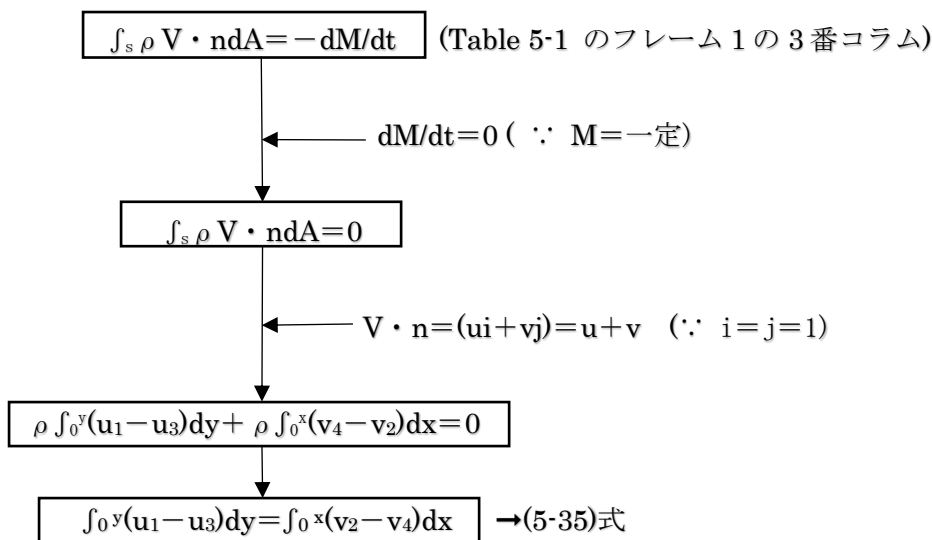
(☆9) ここで云う機械力はプレス/ピストンによる圧縮力のようなものがあるが、通常の流れではドラッグのような流体荷重に対する反力(流体反力)を考えればよい。流体反力は流れのセキ止めによって派生する。

(☆10) 法線ベクトル \mathbf{n} は流れ方向に外向きの場合+1、流れ方向に内向きの場合-1であるから
フレーム 4 の挿絵から、

$$\mathbf{F}_s + \mathbf{M}_g = p_2 \mathbf{A}_2 \mathbf{n}_2 + p_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{n}_1 + \rho v_2^2 \mathbf{A}_2 \mathbf{n}_2 + \rho v_1^2 \mathbf{A}_1 \mathbf{n}_1 = p_2 \mathbf{A}_2 - p_1 \mathbf{A}_1 + \rho v_2^2 \mathbf{A}_2 - \rho v_1^2 \mathbf{A}_1$$

これを变形して、 $\mathbf{F}_s + \mathbf{M}_g + p_1 \mathbf{A}_1 - p_2 \mathbf{A}_2 = \rho v_2^2 \mathbf{A}_2 - \rho v_1^2 \mathbf{A}_1$ となる。

(☆11) ここで示される保存例は少しわかりにくいので補足しておく。質量保存式(3-35)式は以下の
ように導かれる。



ここで運動量保存式として次の Table 5-5 のフレーム 3 の式を用いる。

$$\mathbf{F}_s + \mathbf{M}_g - \int_s p \mathbf{n} dA = \int_s \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA - \int_s \boldsymbol{\tau} dA$$

\mathbf{F}_s は機械力、 $\mathbf{M} \cdot \mathbf{g}$ は体積力。ここでは水平配置であるから $g = 0$ として

$$\mathbf{F}_s = \int_s p \mathbf{n} dA + \int_s \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA - \int_s \boldsymbol{\tau} dA$$

検査システムの中にある構造物は流れをせき止めるので、機械力 \mathbf{F}_s の負の x 方向成分が
ドラッグ(抗力)としてカウントされる。

$$\text{ドラッグ} = -F_x = [-\int_s p \mathbf{n} dA - \int_s \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA + \int_s \boldsymbol{\tau} dA]_x$$

右辺第 1 項は $[\int_s p \mathbf{n} dA]_x \rightarrow \int_0^y (p_3 - p_1) dy$ になる。また第 2 項は、

$$\text{辺 1,3; } \int_s \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_s \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_s \rho u^2 \cos \theta dA = \int_0^y (\rho u_3^2 - \rho u_1^2) dy$$

$$\text{辺 2,4; } \int_s \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_s \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_s \rho v \cos \theta dA = \int_0^x (\rho u_2 v_2 - \rho u_4 v_4) dx$$

また第 3 項は辺 2,4 について、 $\int_s \boldsymbol{\tau} dA = 2 \tau x$ になる。従って

$$\text{ドラッグ} = \int_0^y (p_1 - p_3) dy + \int_0^y (\rho u_3^2 - \rho u_1^2) dy + \int_0^x (\rho u_4 v_4 - \rho u_2 v_2) dx + 2 \tau x$$

流れ幅 Y を大きくとると辺 2,4 の流速は自由流れの流速 U に近づく。その場合、 $u_1 = u_3 = U$
として、前述の(5-35)式を用いると

$$\int_0^x (\rho u_4 v_4 - \rho u_2 v_2) dx = \rho U \int_0^x (v_4 - v_2) dx = \rho U \int_0^y (u_3 - u_1) dy$$

であるから、これを上式に代入して变形すると

$$\text{ドラッグ} = \int_0^y (p_1 - p_3) dy + \int_0^y (\rho u_1^2 - \rho u_3^2) dy + \rho U \int_0^y (u_3 - u_1) dy + 2 \tau x$$

$$= \int_0^y (p_1 - p_3) dy - \rho \int_0^y (U u_1 - u_1^2) dy + \rho \int_0^y (U u_3 - u_3^2) dy + 2 \tau x$$

$$= \int_0^y (p_1 - p_3) dy - \rho U^2 \int_0^y (u_1/U) (1 - u_1/U) dy + \rho U^2 \int_0^y (u_3/U) (1 - u_3/U) dy + 2 \tau x$$

即ち(5-39)式が得られる。流れの中にある構造物の廻りの流速を計測してドラッグ(抗力)を
見積もる時にこの式は利用できる。以下、原本の記述の通り。

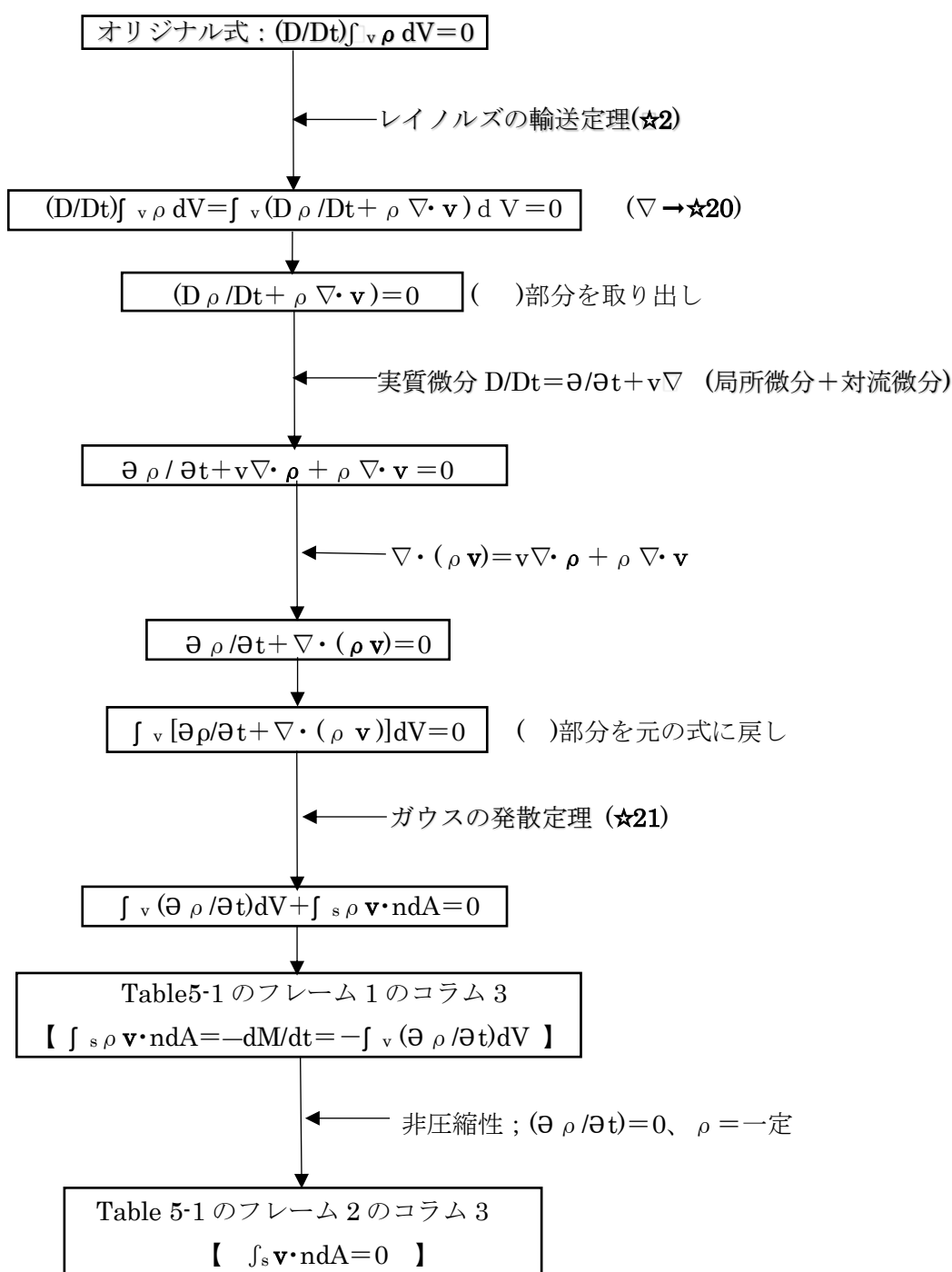
2. Blevins テキストの補足説明⁽³⁾⁻⁽⁸⁾

Blevins のテキストは初心者向けによく書かれていると思うがそれでも十分に説明できていない所もあるような気がする。そこで TS 作成者の方で、敢えて以下のような重複的な/補足的な説明を試みた。なおベクトル/単位ベクトル/体積などの表示が、前章と多少異なるので注意のこと。

2.1 質量保存則について

(1) 連続体力学で云う広義の連続の式は、任意の物理量に対し(蓄積量+流出入量+湧き出し量)=0 とおくもので、特に質量という物理量を対象にする場合を質量保存式と呼び、流れ問題を解く場合ほかの基礎式(例えばベルヌーイ式)と組み合わせて使用されている。

この式の成り立ちをみるために、ごく一般的な圧縮性ないし非圧縮性流れにおける変形不可のケースについて、その導入過程を追ってみると下記のようなになる。



注記：(☆20) $\nabla = i(\partial/\partial x) + j(\partial/\partial y) + k(\partial/\partial z)$ ベクトル場の発散を表わす。

(☆21) 下記のように 3 軸ベクトルの発散を流れの面積分に置き換えるもので

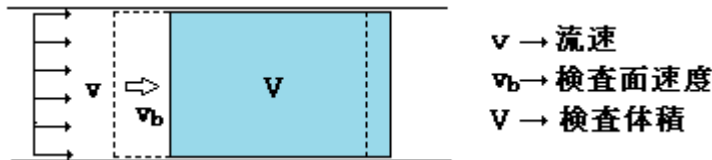
$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA \rightarrow \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (\mathbf{F} = \rho \mathbf{v})$$

(なお上記のチャートは全微分を用いラグランジュ的に導出したもの。オイラー的に導出しても同じ保存式が得られる。ラグランジュ的とは物質即ち流れを基点にした考えを指し、オイラー的とは固定された空間を基点にした考えを指す。後者は流れの外から流れを観察している状態で水力学/水理学の多くは然り。詳しくは流体力学テキストを参照のこと。)

(2) 上述の導入過程は検査面が変形不可という前提によっている。例えば下図のように検査体積のフェース(前端)が v_b の速度で後退すると、領域に流入する速度 v は相対的に $(v - v_b)$ に減少する。一方では検査体積に滞留する質量は[体積変化に伴う密度の変化]と[検査面前端の後退による滞留分の減少]によって変化する。実際は閉曲面である検査面全域に変化が起きるので

$$\int_V \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} dA + \int_V (\partial \rho / \partial t) dV + \int_V \rho \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

になる。これは [Table 5-1 のフレーム 1 のコラム 2] と一致する。非圧縮性流体では $(\partial \rho / \partial t) = 0$ なので [Table 5-1 のフレーム 2 のコラム 2] になる。



(3) 一様流れ(管路のような一方向流れ)では更に単純化される。[Table 5-1 のフレーム 3, 4] 然り。

2.2 エネルギー保存則について

(1) 流体流れの持つエネルギーには、内部エネルギー、圧力、運動エネルギー及び位置エネルギー(ポテンシャルエネルギー)の 4 つがある。これらは単位質量当りのエネルギー(Nm/kg)として扱われるので“比”を付て

比内部エネルギー、比圧力、比運動エネルギー、比位置エネルギー

と呼ぶべき所であるが、実際は比は省略されていることが多い。単位としては何れも位置エネルギーの単位(m/s²)m、実質的に[加速度 x 長さ \rightarrow m²/s²] になっている。

まず、比内部エネルギー(u)は分子の運動エネルギーを指し一般には $u = \int du = \int C_v dT = C_v T$ で完全気体では温度のみに依存する。単位的には[(J/kgK)K = J/kg = Nm/kg]である。

比圧力(p/ρ)は流体の圧縮によるポテンシャルエネルギーで $pv = p/\rho = p/(\gamma g)$ である。この場合 ρ = 密度、v = 比容積、γ = 比重量および g は重力加速度。単位的には[(N/m²)/(kg/m³) \rightarrow Nm/kg]。

比運動エネルギー(v²/2)はニュートンの第 2 法則から次のように導かれる。下図(a)参照。

$$\boxed{\text{ニュートン第2法則: } ma=F \rightarrow m(dv/dt)=F \rightarrow m(dv/dt)dr=Fdr} \quad (a=\text{加速度}, r=\text{距離})$$

$$dr=vdv \quad (v=dr/dt)$$

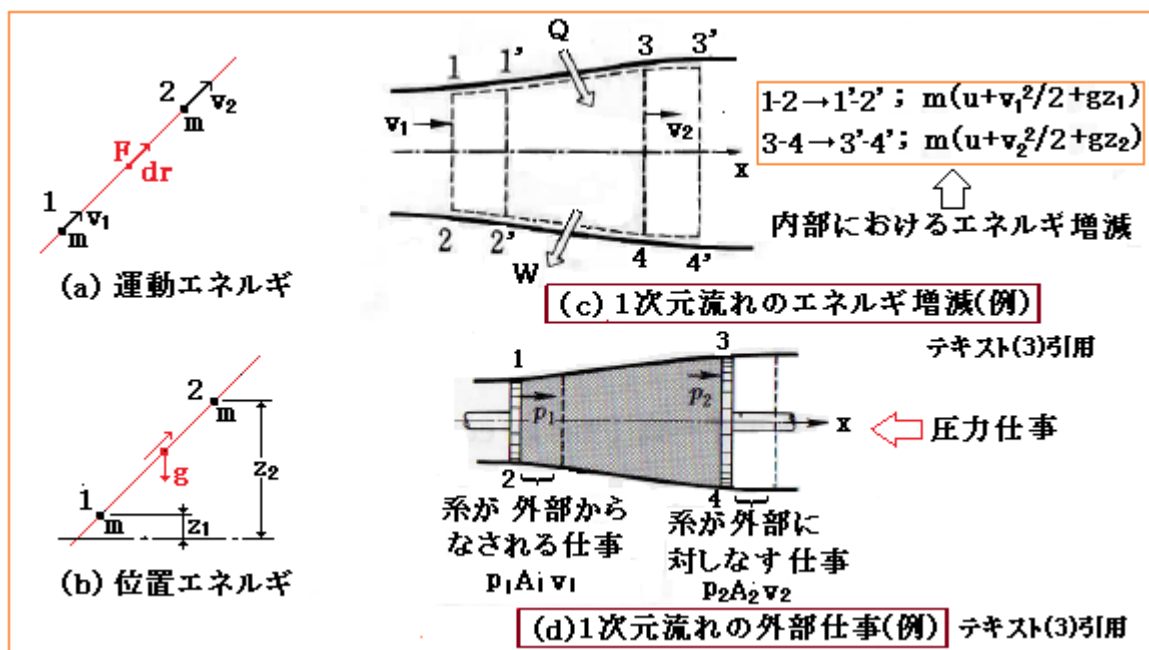
$$mv dv = F dr$$

$$\boxed{m \int v dv = \int F dr \rightarrow [mv^2/2]_1^2 = W \rightarrow (1/2)mv_2^2 - (1/2)mv_1^2 = W}$$

$(1/2)mv^2$ が運動エネルギーで、1→2までの運動エネルギーの変化を与えるものが仕事W。比運動エネルギー $v^2/2$ は運動エネルギーを質量mで除したものである。単位的に $[m^2/s^2 \rightarrow Nm/kg]$ になる。

比位置エネルギー(gz)も第2法則から次のように導かれる。下図(b)参照。

$mg=F \rightarrow mgdz=Fdz \rightarrow$ 積分して $m \int g dz = \int F dz \rightarrow m[gz]_1^2 = m(g_2z_2 - g_1z_1) = W$
 mgz が位置エネルギーで、1→2までの位置エネルギーの変化を与えるものが仕事W。比位置エネルギー gz は位置エネルギーを質量mで除したものである。単位的に $[m^2/s^2 \rightarrow Nm/kg]$ になる。



(2) 上図(c)(d)のような1次元流れ(1様流れ)で検査面の变形がないケースについてエネルギー式を導入してみる⁽⁹⁾。通常、エネルギーバランスは以下のようにになっている。

$$\begin{aligned} & \text{外部から系に加えられる熱量 } Q - \text{系内で消費される内部仕事 } W \\ & = \text{内部におけるエネルギー増加 } X + \text{外部になす仕事 } W_{cs} \end{aligned}$$

まず内部におけるエネルギーの増加Xは全微分の定義に従い次のようになる。

$$X = (D/Dt) \int \rho A (u + v^2/2 + gz) dx = (\partial/\partial t) \int \rho A (u + v^2/2 + gz) dx + v (\partial/\partial x) \int \rho A (u + v^2/2 + gz) dx$$

ここで $v (\partial/\partial x) \int \rho A (u + v^2/2 + gz) dx = [\rho v A (u + v^2/2 + gz)]_1^2$ 、また

$$(\partial/\partial t) \int \rho A (u + v^2/2 + gz) dx = (\partial/\partial t) \int_V (u + v^2/2) \rho dV \text{ であるから、}$$

$$X=(\partial/\partial t)\int_V (u+v^2/2)\rho dV + [\rho_2 v_2 A_2 (u_2 + v_2^2/2)] - [\rho_1 v_1 A_1 (u_1 + v_1^2/2)]$$

次に外部になす仕事 (Blevins テキストで云う検査面でなされる仕事) は次のようになる。

$$W_{cs} = p_2 A_2 v_2 - p_1 A_1 v_1 = \rho_2 v_2 A_2 (p_2/\rho_2) - \rho_1 v_1 A_1 (p_1/\rho_1) \quad (\text{但しせん断応力は無視})$$

従って、1次元流れのエネルギーバランス $Q-W=X+W_{cs}$ は、次のようになる。

$$Q-W = (\partial/\partial t)\int_{1^2} \rho A (u+v^2/2) dx + [\rho_2 v_2 A_2 (u_2 + p_2/\rho_2 + v_2^2/2 + gz_2)] \\ - [\rho_1 v_1 A_1 (u_1 + p_1/\rho_1 + v_1^2/2 + gz_1)]$$

定常流れを仮定すれば、第1項は無視できるので

$$Q-W = [\rho_2 v_2 A_2 (u_2 + p_2/\rho_2 + v_2^2/2 + gz_2)] - [\rho_1 v_1 A_1 (u_1 + p_1/\rho_1 + v_1^2/2 + gz_1)]$$

この式は Blevins テキストの Table5-2 のフレーム 6 に該当する。

上式は1次元流れ用なので、これを3次元的一般表示に変更することを考えてみる。ここで検査面の辺1,2を3次元的に全曲面(閉曲面)に拡張すれば、

$$[\rho_2 v_2 A_2 (u_2 + p_2/\rho_2 + v_2^2/2 + gz_2)] - [\rho_1 v_1 A_1 (u_1 + p_1/\rho_1 + v_1^2/2 + gz_1)] \\ \rightarrow \int_S \rho (u + p/\rho + v^2/2 + gz) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$$

であるから、一般式としては

$$Q-W = (\partial/\partial t)\int_V \rho (u + v^2/2 + gz) dV + \int_S \rho (u + p/\rho + v^2/2 + gz) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$$

この式は Blevins テキスト Table5-2 のフレーム 4 に該当する。定常流れ($\partial/\partial t=0$)を仮定すれば

$$Q-W = \int_S \rho (u + p/\rho + v^2/2 + gz) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$$

この式は Blevins テキスト Table5-2 のフレーム 5 に該当する。

- (3) 以上は検査体積/検査面が変形不可の場合である。検査面が \mathbf{v}_b で移動する場合は、内部におけるエネルギー増加が $\int_S \rho (u + p/\rho + v^2/2 + gz)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} dA$ 、これとともに検査面がなす外部仕事 $\int_S p \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} dA$ になるので

$$Q-W = (\partial/\partial t)\int_V \rho (u + v^2/2 + gz) dV + \int_S \rho (e + p/\rho + v^2/2 + gz)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} dA + \int_S p \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} dA$$

さらに構造体との界面で逆向きに発生する摩擦力 $-\int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} dA$ を有効とすれば、

$$Q-W = (\partial/\partial t)\int_V \rho (e + v^2/2 + gz) dV + \int_S \rho (e + p/\rho + v^2/2 + gz)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} dA + \int_S p \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} dA - \int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} dA$$

この式は Blevins テキストの Table5-2 のフレーム 2 に該当する。定常流れを仮定すれば、

$$Q-W = \int_S \rho (e + p/\rho + v^2/2 + gz)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} dA + \int_S p \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} dA - \int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} dA$$

この式は Blevins テキストの Table5-2 のフレーム 3 に該当する。

- (4) もしも検査体積内に渦が発生すると負の運動エネルギーが発生してエネルギーは失われる。渦の回転速度は $\mathbf{v} = \mathbf{w} \mathbf{r}$ (ここで \mathbf{w} = 渦の角速度、 \mathbf{r} = 回転アーム)なので、その運動エネルギーは $[-\mathbf{w}^2 \mathbf{r}^2/2]$ で与えられる。これを前項の2つの式に代入すれば、Table 5-2 のフレーム 7, 8 が得られる。

2.3 ベルヌーイ式について

- (1) ベルヌーイ式は連続の式と組み合わせて定常流れ問題で最もよく使われる便利なツールである。エネルギー式の積分を実行し整理すると得られるため、エネルギー保存式と等価といわれるが、ただ

- ・熱伝達の影響及び内部エネルギー変化の影響が無視できる流れ、また
- ・また検査面が変形しない検査システムとして固定された流れ、

に適用が限られる。なお、上記の前提があるのでオイラーの運動方程式を積分してもベルヌーイ

式を求めることができる。

(2) まずエネルギー式→ベルヌーイ式の導出過程を考える。例えば Table5-2 のフレーム 4 では

$$Q - W = (d/dt) \int_V (u + v^2/2 + gz) \rho dV + \int_S \rho (u + p/\rho + v^2/2 + gz) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$$

前項でも述べたようにベルヌーイ式では外部/内部仕事は考えないのでこの式の左辺は零になり、

$$(d/dt) \int_V (u + v^2/2 + gz) \rho dV + \int_S \rho (p/\rho + v^2/2 + gz) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

この式の第1項は検査体積内のエネルギーの変動量、第2項は検査面からのエネルギーの出入り量をカウントしている。1次元流れでは通路/流線の側面からのエネルギーの出入りはないので、検査面の入口1-2と出口3-4からのエネルギーの出入りのみを考えると、定常項である第2項は、

$$\int_S \rho (u + p/\rho + v^2/2 + gz) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = (p_2/\rho + v_2^2/2 + gz_2) \rho v_2 A_2 - (p_1/\rho + v_1^2/2 + gz_1) \rho v_1 A_1$$

A_1, A_2 は流れ面積で、[流速 $v \times$ 流れ面積 A]は流量 Q_f であって $v_2 A_2 = v_1 A_1 = Q_f$ になるので、

$$\int_S \rho (u + p/\rho + v^2/2 + gz) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \{(p_2/\rho + v_2^2/2 + gz_2) - (p_1/\rho + v_1^2/2 + gz_1)\} \rho Q_f$$

となる。一方、非定常項である第1項は内部エネルギー u と位置エネルギー gz の時間変化がないので

$$(d/dt) \int_V (u + v^2/2 + gz) \rho dV = \int_V [d(v^2/2)/dt] \rho dV = \int_V [v(\partial v/\partial t)] \rho dV = \int_V [(\partial v/\partial t)] \rho v dV$$

ここで $\rho v dV = \rho v A ds = \rho Q_f ds$ であるから、上式は

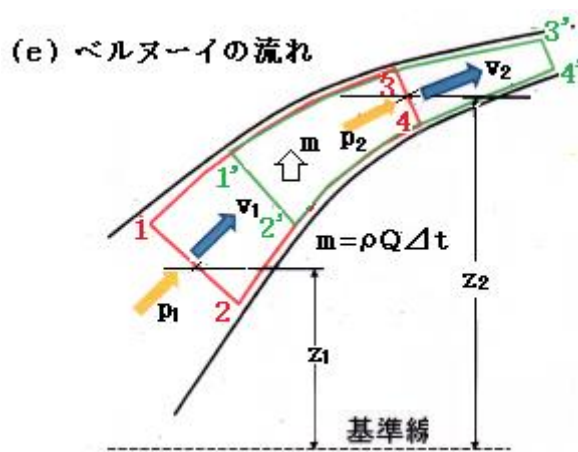
$$(d/dt) \int_V (u + v^2/2 + gz) \rho dV = \left\{ \int (\partial v/\partial t) ds \right\} \rho Q_f$$

第1項と第2項の結果の和をとると、Table5-2のフレーム4のエネルギー式は、

$$\int (\partial v/\partial t) ds + \{(p_2/\rho + v_2^2/2 + gz_2) - (p_1/\rho + v_1^2/2 + gz_1)\} = 0$$

となって、Table 5-3 のフレーム 1 の非圧縮性流体&定常流れのベルヌーイ式が得られる。

もともとベルヌーイの式は流量 $Q_f = \text{一定}$ という条件のもとで成立していることに注意すべきである。即ち出入口2ポイント間では連続の条件(→質量保存則)が満たされなければならない。連続の条件が成立するのは単一流れの通路あるいは流線であるから、2ポイントは必ず流れの通路や流線の上になければならない。



(3) ただ、このような定常流れのベルヌーイ式の導出過程は多分に抽象的で判りにくいかもしれない。次のような比較的わかり易い導出過程の説明もある⁽⁸⁾ので一応紹介しておく。

上図(e)のような流線モデルを考える。検査領域は1-2-3-4(赤色)で囲われているが、微小時間 Δt ではわずかに1'-2'-3'-4'(緑色)に移動する。

その場合、トータルの運動エネルギーは次のように表わされる。

$$(1/2)mv^2 = (1/2)(\rho Q \Delta t)v^2 = (1/2)(\rho Q)v^2 \Delta t \quad (\text{但し } m = \text{移動質量}, Q = \text{体積流量})$$

このとき微小時間における出入口の運動エネルギーの差分は次のようになる。

$$(1/2)(\rho Q)v_2^2 \Delta t - (1/2)(\rho Q)v_1^2 \Delta t = (1/2)(\rho Q)(v_2^2 - v_1^2) \Delta t \quad \text{-----}(a)$$

またトータルの位置エネルギーは $mgz = (\rho Q \Delta t) gz = \rho Q gz \Delta t$ で表わされる。このとき微小時間における出入口の位置エネルギーの差分は次のようになる。

$$\rho Q gz_2 \Delta t - \rho Q gz_1 \Delta t = \rho Q g(z_2 - z_1) \Delta t \quad \text{-----}(b)$$

次に圧力による仕事量(いわゆる圧縮膨脹仕事)は $pAd_s = pAvdt$ で表される。このとき微小時間における出入口の圧力による仕事量の差分は次のようになる。

$$p_1 A_1 v_1 dt - p_2 A_2 v_2 dt = (p_1 A_1 v_1 - p_2 A_2 v_2) dt = (p_1 Q - p_2 Q) dt = Q(p_1 - p_2) dt \quad \text{-----}(c)$$

仕事量はエネルギー変化に見合うので、(a)+(b)=(c)になる。即ち

$$(1/2)(\rho Q)(v_2^2 - v_1^2) \Delta t + \rho Q g(z_2 - z_1) \Delta t = Q(p_1 - p_2) dt$$

この式を変形すると前項の結果と同様に次式が得られ、Table 5-3 のフレーム 2と一致する。

$$(p_2 / \rho + v_2^2 / 2 + gz_2) - (p_1 / \rho + v_1^2 / 2 + gz_1) = 0$$

- (4) ベルヌーイ式は 18 世紀半ばのベルヌーイの著作によるもので非常に古く、もともと流体の圧縮性や粘性を無視し対象を非圧縮性/非粘性の完全流体の定常流れに絞るとともに流れの通路/流線上の前後 2 ポイントにおいて成立している。

その後、流体力学的な考察から条件付きで、式の適用が

非定常流れ、圧縮性流れ、粘性流体、渦流、適用ポイント

に拡がり式の一部の拡張も行われている。Blevins テキストの Table 5-3 にはこの非定常流れ/圧縮流れへの適用拡大も含まれているが、更に **Table 5-4 [ベルヌーイ式の成立に関する選択的な前提条件]**には粘性流体/渦流/任意適用ポイントなど適用拡大の条件も与えられている。

Table 5-4 は、White のテキスト[Viscous Fluid flow] ⁽⁶⁾などをベースに作成されているようであるが、流体力学によるものでその背景を説明するのが難しい。以下、White テキストに対する TS 作成者の理解内容を示しておく。

オリジナルのベルヌーイの定理は、完全流体を対象としてオイラーの運動方程式を展開しこれを連続条件(→流れの通路/流線に沿う 2 ポイント)のもとで解いたものと等しく、かなり限定である。

非粘性のオイラ式に対して粘性流体の運動方程式(ナービエ・ストークス式→NS 式)の場合はどうなのか? White によれば、NS 式は密度 ρ と粘度 μ が一定のとき、

$$\rho D\mathbf{v}/Dt = -\nabla p - \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\text{但し } \mathbf{k} = \text{単位ベクトル, } \mu = \text{粘度})$$

と書ける。更にベクトル公式を用いて

$$\rho (\partial \mathbf{v} / \partial t) + \nabla (p + \rho v^2 / 2 + \rho gz) = \rho \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \mu \text{curl } \boldsymbol{\omega} \quad \text{-----}(x)$$

ここで $\boldsymbol{\omega}$ は微小流体部分の回転速度、 $\text{curl } \boldsymbol{\omega}$ は渦度である (Table 5-4 では $\text{curl } \boldsymbol{\omega}$ は $\boldsymbol{\omega}$ で表示されているので注意!)。渦度 $\text{curl } \boldsymbol{\omega}$ が零であれば、同時に $\boldsymbol{\omega} = 0$ になり流れは非回転になるので、

$$\text{速度ベクトル: } \mathbf{v} = \nabla \Phi \quad \& \quad \text{運動式: } \rho (\partial \mathbf{v} / \partial t) + \nabla [p + \rho v^2 / 2 + \rho gz]_s = 0$$

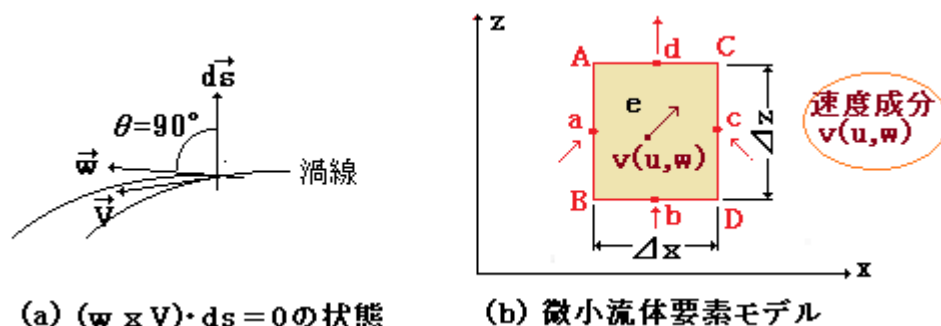
ここで Φ は速度ポテンシャルである。この 2 つの式から

$$\boxed{(\partial \Phi / \partial t) + p / \rho + v^2 / 2 + gz = \text{const(一定)}} \quad \text{-----}(y)$$

が得られる。これはベルヌーイ式と同じフォームをとる。即ち粘性流体流れであっても渦度が零であれば、即ちベルヌーイ式が成立する。これが Table 5-4 のケース 4の背景と考えられる。このケースでは 2 ポイントは必ずしも連続である必要はない(→制約なし)。もちろんこの渦度零のとき

のベルヌーイ式は粘度なし($\mu=0$ 、Table では $\nu=0$)のときも成立し Table 5-4 のケース 2 の背景になっている。粘度なしであって渦度が零でないケースでは $\omega \neq 0$ なので、上記(x)式の右辺は零にならない。ただ 2 ポイント間の連続条件が成立するときはエネルギー保存によって渦度の有る無しによらずベルヌーイ式は成立する(→前(2)項)。これは Table 5-4 のケース 1 の背景になっている。

ただ Table 5-4 のケース 3 については、経路ベクトル \mathbf{ds} が下図(a)のように外積 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ に直交するので、2つのポイントは渦線に直角な \mathbf{ds} 上に並ぶことになる。多分に特異なケースではないか? と思う。



(a) $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{ds} = 0$ の状態

(b) 微小流体要素モデル

- (5) 以上は White のテキストに基づいて説明した。多分に抽象的でわかりにくいと思うので 2次元問題で上記の(y)式を導入してみる⁽⁸⁾。

上図(b)のような 2次元の微小流体要素モデルにおいて、

辺 AB からの運動量の流入量: $\rho w_a u_a \Delta z \Delta t$ 、辺 CD からの運動量の流入量: $\rho w_c u_c \Delta z \Delta t$

辺 BD からの運動量の流入量: $\rho w_b w_b \Delta x \Delta t$ 、辺 AC からの運動量の流出量: $\rho w_a w_a \Delta x \Delta t$

力積(ポテンシャル): $(p_b - p_a - \rho g \Delta z) \Delta x \Delta t$

内部の運動量の増加: $\{\rho w_e(t + \Delta t) - \rho w_e t\} \Delta x \Delta z$

運動量の流出入量+力積=内部の運動量の増加である所から、これらを合算等置し微分をとると次の運動量方程式が得られる。

$$\partial(\rho w)/\partial t + \partial(\rho w u)/\partial x + \partial(\rho w w)/\partial z = -\partial p/\partial z - \rho g$$

この式を偏微分すると、

$$\rho \partial w/\partial t + \rho u(\partial w/\partial x) + \rho w(\partial w/\partial z) + \rho w(\partial u/\partial x + \partial w/\partial z) = -\partial p/\partial z - \rho g$$

連続式は $\partial u/\partial x + \partial w/\partial z = 0$ であるから、次のオイラーの運動方程式が得られる。

$$\rho \partial w/\partial t + \rho u(\partial w/\partial x) + \rho w(\partial w/\partial z) = -\partial p/\partial z - \rho g$$

渦無しの条件より $\partial w/\partial x = \partial u/\partial z$ であるから

$$\partial w/\partial t + u(\partial u/\partial z) + w(\partial w/\partial z) = -(1/\rho)(\partial p/\partial z) - g$$

$w = \partial \Phi/\partial z$ (但し $\Phi =$ 速度ポテンシャル)、 $u = \partial(u^2/2)/\partial u$ 及び $w = \partial(w^2/2)/\partial w$ であるから

$$\partial/\partial t(\partial \Phi/\partial z) + \partial(u^2/2)/\partial u(\partial u/\partial z) + \partial(w^2/2)/\partial w(\partial w/\partial z) = -(1/\rho)(\partial p/\partial z) - g$$

整理すると $\partial/\partial z(\partial \Phi/\partial t + u^2/2 + w^2/2 + p/\rho + gz) = 0$ になり、次の式が得られる。

$$\partial \Phi/\partial t + (u^2/2 + w^2/2 + p/\rho + gz) = \text{const}$$

1次元流れでは $v = (u^2 + w^2)^{0.5}$ なので、

$$\partial \Phi/\partial t + v^2/2 + p/\rho + gz = \text{const(一定)} \quad \rightarrow \text{(y) 式}$$

- (6) Table 5-4 の選択的前提条件のケース 2 及び 4 は回転なし流れで成立する。回転なし流れの例に自由渦流れがある⁽⁶⁾。その場合、自由渦のベルヌーイ式は次式で与えられる。

$$p/\rho + v^2/2 + gz = p_0/\rho + gz_0 = 1 \text{ 定}$$

ここで p_0 = 自由表面圧、 z_0 = 基準位置からの Max. 自由表面高さ

自由渦では任意の高さに対し角運動量 vr = 一定であって流速 v は渦半径 r に反比例するほかは連続式の制約を受けないので、渦流のどの部分で 2 ポイントを設定してもベルヌーイ式が成立することになる(即ちポイント 1 と 2 の位置の制約なし)。

強制渦流れのときは渦度が存在し回転ありになる。強制渦のベルヌーイ式は次式で与えられる。

$$p/\rho + v^2/2 + gz = p_0/\rho + r^2\Omega^2 + gz_0 \quad (\text{ここで } \Omega = \text{微少要素の回転速度})$$

この式から全圧($p/\rho + v^2/2 + gz$)は渦半径 r に依存して変化することがわかる。従って自由渦と違って、半径 r が同じ渦線の並び(渦管子午線)に沿ってポイント 1, 2 があるときに限りベルヌーイ式が成立することになる。恐らく強制渦流れは Table 5-4 のケース 3 に引き当たるのではないかとと思われる。

(Table 5-4 の意味/背景についてはまだ読み切れない所もあるので今後とも調べる。)

(7) 実際の設計では、更に圧力損失の扱いを加えて拡張されたベルヌーイ式が用いられている。

非圧縮性流体の定常 1 次元流れでは Table 5-3 のフレーム 2 のベルヌーイ式(下記)が成立するが、

$$v_2^2/2 + P_2/\rho + gz_2 = v_1^2/2 + P_1/\rho + gz_1$$

実際の管路流れには粘性と渦があつてポイント 1 → ポイント 2 の過程で圧力損失が起きて p_1 から p_2 に圧力が降下するので流れ断面積の如何によらず v_1 より v_2 が大きくなる。連続の条件を考えればこれは理に合わない。この不合理はエネルギー保存則による内部エネルギーの変化即ち圧損に見合う内部エネルギーの増分を無視することで起きる。内部エネルギーを含めたベルヌーイ式は

$$u_2 + v_2^2/2 + p_2/\rho + gz_2 = u_1 + v_1^2/2 + p_1/\rho + gz_1 \rightarrow p_1/\rho + v_1^2/2 + gz_1 = p_2/\rho + v_2^2/2 + (u_2 - u_1) + gz_2$$

内部エネルギーの変化($u_2 - u_1$)は見掛け上の運動エネルギーの変化($Kv^2/2$)でカウントされているので、実際の管路流れのベルヌーイ式は次式で与えられる。

$$p_1/\rho + v_1^2/2 + gz_1 = p_2/\rho + v_2^2/2 + (Kv^2/2) + gz_2$$

K は圧損係数。粘性摩擦と渦損失によって静圧降下が起き、その反動として内部エネルギーの増加が起きる。上記の式は Blevins テキストの(5-20)式に同じ。圧損によるエネルギー増分は Table 5-3 のフレーム式全てに追加できる。

2.4 運動量保存則について

(1) 運動量保存則は流体の運動方程式のベースとして流力解析に最も深くリンクしている。この保存則は「運動量の時間的変化は外力の総和に等しい」とするもので、ニュートンの運動の第 2 法則によっている。即ち、

$$F = m\alpha = m(dv/dt) = d(mv)/dt \quad (\text{ここで } \alpha = \text{加速度、} v = \text{流速})$$

ここで F は外力で通常の流れではつぎの 3 つのタイプになる。

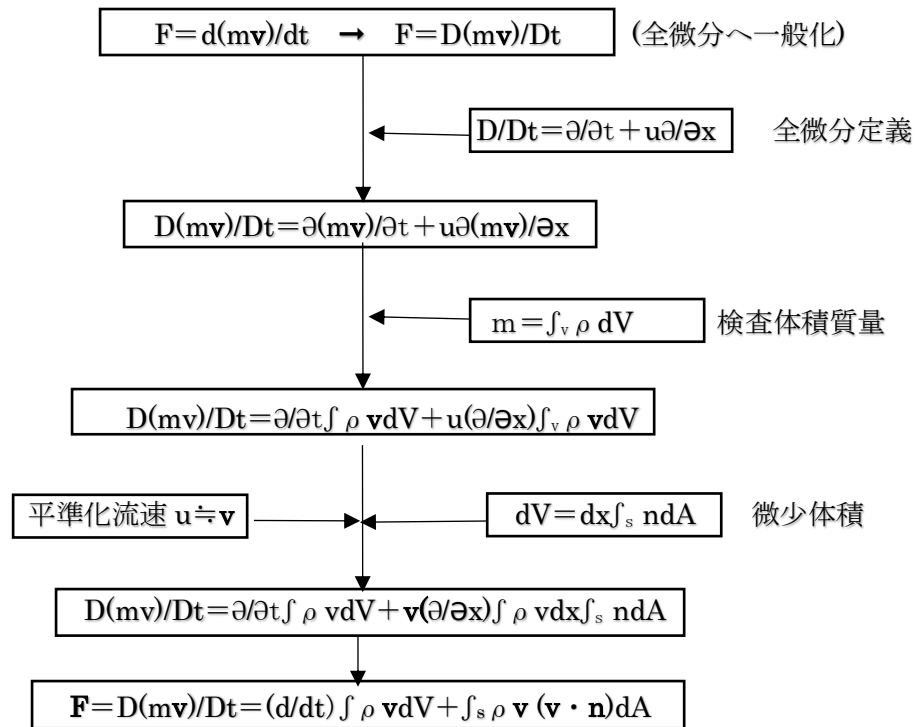
機械力 → 構造物のセキ止めなどから生じる流体反力(例えばドラッグ)

体積力 → 流体体積に重力や加速度が働いて生じる力(通常、液体重量)

流体力 → 流体圧力や流体粘性から生じる流体抵抗(通常、圧力仕事による)

また運動量の変化は、検査体積内の運動量の変化と流入/流出による運動量量の変化になる。前者は過渡的/周期的な変動であつて非定常な流れ状態で発生する。定常状態では後者のみが存在する。

(2) Blevins テキスト Table 5-5 のフレーム 1,2,3 は何れもニュートン第 2 則から派生している。即ち



検査面が可動の場合は運動量 mv の流速ベクトル \mathbf{v} は $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_b)$ になるので上記の結果は、

$$F = d/dt \int_V \rho v dV + \int_s \rho v (\mathbf{v} - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} dA$$

になり Table 5-5 のフレーム 1 の式が得られる。

外力 F は前述の如く機械力 F_s と体積力 F_g と流体力 F_f の和で与えられる。ここで体積力 F_g は垂直方向に $F_g = \rho g \int_V v dV = g \int_V \rho v dV$ である。また流体力は

$$\text{検査面垂直に作用する流体圧力による推力相当} \rightarrow -\int_s p n dA$$

$$\text{検査面平行に作用する流体摩擦によるせん断力} \rightarrow +\int_s \tau dA$$

の和であるから、 $F = F_s + F_g + F_f = F_s + g \int_V \rho v dV - \int_s p n dA + \int_s \tau dA$ 、従って、

$$F_s + g \int_V \rho v dV - \int_s p n dA + \int_s \tau dA = d/dt \int_V \rho v dV + \int_s \rho v (\mathbf{v} - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} dA$$

即ち Table 5-5 のフレーム 2 が得られる。

更に定常状態では非定常項が消え、検査面が変形不可の場合、 $\mathbf{v}_b = 0$ になる。従って

$$F_s + Mg - \int_s p n dA = \int_s \rho v (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA - \int_s \tau dA \quad (\text{但し } M = \int_V \rho dV)$$

即ち Table 5-5 のフレーム 3 が得られる。

(3) 以上は多少抽象的でわかり難い。特に 定常項 $\int_s \rho v (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$ を取り上げて、下図のような非圧縮性流体の定常 1 次元流れの場合、どうなるか検討してみる。

まず体積 v のブロック $abcd$ が dt 時間後に x 方向に移動し体積 v' のブロック $a'b'c'd'$ に変化したたとすると、その間の運動量の変化は

$$d(mv)/dt = \int_{v'} \rho u dV' - \int_v \rho u dV$$

になる。この場合、2つのブロックの共通部分(a'b'cd)はこの差し引きによって消去されるので、実質の運動量の変化はcdc'd'とaba'b'の運動量の差になる。従って

$$\text{cdc'd'部分} \rightarrow dV = v_2 dA dt \rightarrow dt \text{ 当り } dV = v_2 dA$$

$$\text{aba'b'部分} \rightarrow dV = v_1 dA dt \rightarrow dt \text{ 当り } dV = v_1 dA$$

また、u は v_1, v_2 と見なされるので、運動量の変化は次のようになる。

$$d(mv)/dt = \int_s \rho uv_2 dA - \int_s \rho uv_1 dA = \rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1$$

次に外力 F についてみる。流体力 F_f は、せん断力成分 $\int_s \tau dA$ を無視すると

$$\text{垂直力} : -\int_s p n dA = p_1 A_1 - p_2 A_2$$

であるから $F = F_s + Mg + F_f = F_s + Mg + p_1 A_1 - p_2 A_2$ 。従って運動量保存式は、

$$F_s + Mg + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1$$

となるが、これは Table 5-5 のフレーム 4 の(☆10)で補完される式と一致する。

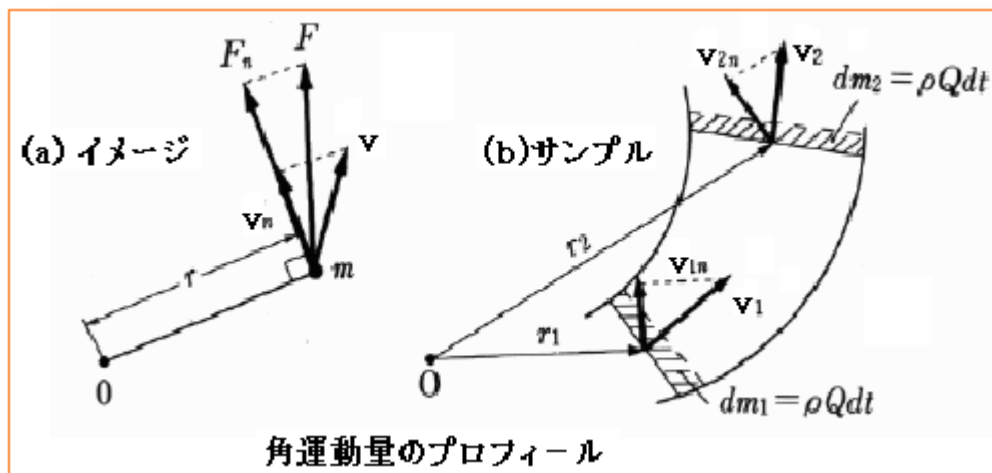
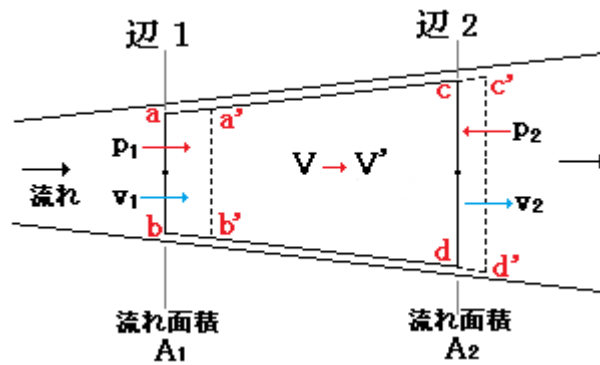
なお、この場合、機械力 F_s は示されていない。下図において機械力は傾斜壁面で派生する。即ち、傾斜面に圧力がかかり x 方向に次のような推力(→機械力)が発生する。

$$F_s = \int p dA = p_a (A_2 - A_1) \doteq \{(p_1 + p_2)/2\} (A_2 - A_1) \quad (p_a \rightarrow \text{傾斜面の平均圧力})$$

従って、水平流線($Mg \doteq 0$)の運動方程式は次のようになる。

$$p_1 A_1 + \rho v_1^2 A_1 + p_a (A_2 - A_1) = p_2 A_2 + \rho v_2^2 A_2$$

推力は構造物側の流体抵抗であって、流れ構造の多くでその影響は無視できないので注意して扱い見逃さないようにする !!



(4) ポンプなどの流体機械では角運動量の保存則が使われることが多い。これは上図(a)のように

回転半径 r の前端に運動量 mv が作用している状態で、一般にベクトル外積 ($\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$) を角運動量と呼ぶ。この時間変化は

$$d(\mathbf{r} \times m\mathbf{v})/dt = (dr/dt)m\mathbf{v} + r \times d(m\mathbf{v})/dt$$

任意位置の r は定数なので $(dr/dt)m\mathbf{v} = 0$ になり

$$\underline{d(\mathbf{r} \times m\mathbf{v})/dt = r \times d(m\mathbf{v})/dt = r \times \mathbf{F} = \mathbf{T}}$$

ここで \mathbf{T} はトルクであり角運動量の時間変化を示す。これをスカラー量で表すと

$$\mathbf{T} = d(rm\mathbf{v})/dt = rd(mv_n)/dt = rF_n \quad (v_n, F_n \text{ は } v, F \text{ の余弦})$$

ある中心軸 O 廻りに流線が拡がるとき、運動量の変化は下図(b)の上流・下流の斜線域の差になる。

$dm = \rho Q dt$ であるので

$$\mathbf{T} = \rho Q dt (r_2 v_{2n} - r_1 v_{1n}) / dt = \rho Q (r_2 v_{2n} - r_1 v_{1n})$$

ここで $\rho Q = \rho v_{2n} A_2 = \rho v_{1n} A_1$ なので

$$\mathbf{T} = r_2 (\rho v_{2n}^2 A_2) - r_1 (\rho v_{1n}^2 A_1) \quad (\text{スカラ表示})$$

さて前述の角運動量の時間変化を全微分へ一般化すると

$$\mathbf{T} = D(\mathbf{r} \times m\mathbf{v})/Dt = (d/dt) \int \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dV + \int_s \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

検査面が速度 \mathbf{v}_b で変形する場合は、

$$\mathbf{T} = D(\mathbf{r} \times m\mathbf{v})/Dt = (d/dt) \int \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dV + \int_s \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} dA$$

となって Table 5-5 のフレーム 5 が得られる。

以上

引用文献・テキスト)

- (1) R. D. Blevins “Applied Fluid Dynamics Handbook” Chapt.5 Conservation Equation
- (2) Hansen, A.G “Fluid Mechanics” Jhon Wiley, New York P110
- (3) 松尾「圧縮性流体力学」3章 1次元流れの基礎式
- (4) J.M.Kay “An Introduction to Fluid mechanics and Heat Trasfer “ (井上訳本)
- (5) White, F.M. “Viscous Fluid Flow “ McGraw-hill New York 1974
- (6) 日本流体力学学会編「流体力学ハンドブック」(丸善)
- (7) JSME 機械工学便覧－水力学および流体力学
- (8) 流体力学関連ネット情報など