

|                    |                                 |                 |
|--------------------|---------------------------------|-----------------|
| 【整番 FE-01-TG-001】  | 流れの各種基礎式に関する情報(その 1)            |                 |
| 分類：流れ(流れ全般)/種別：手引き | 作成年月：H29.08/改訂：Ver.0.0 (H29.10) | 作成者：N. Miyamoto |

## 2分冊その1 (1/2)

全 37 枚

## はじめに

ある流れ構造の特性あるいはその挙動を考えると、流体力学で云う 4 つの基礎式、すなわち

**状態方程式、連続の式、運動方程式、エネルギー式、**

がそのスタート点にくる。状態式は通常、気体に限られるが、残りの 3 つの基礎式は流体全般に適用され、物理現象に係る質量保存則、雲量保存則及びエネルギー保存則をそれぞれのベースに置いて作られている。これらの基礎式はその重要性にもかかわらず、コンピュータ解析(CFD) がルーチン化された現在では単なるお題目程度までに影が薄まっているような気がする。しかし流れ問題を骨格的あるいは近似的にとらえて議論する場合、また単純な 1 次元モデルを検討する場合など、各種保存則(保存式)の引用し運用するのは決して稀れではないように思う。

保存式を含む流れの基礎式は既に、多くの流体力学テキスト/便覧に溢れておりこれをまとめる意義は余りない。しかし工業設備における流れ問題の多様性を考えれば、様々な応用に対応した基礎式を用意しておくのは実務上、有益ではないかと思う。その点、次のテキストにはバラエティに富んだ基礎式が提示されているので、本 TS で補足をまじえてその内容を紹介しておきたい。

**Applied Fluid Dynamics Handbook Chapt.5 Conservation Equation (by R. D. Blevins)**

ただこのテキストは、運動量保存則ベースの運動方程式について個々の流れ構造で議論するものとして特には記述していない。そこで運動方程式については別の TS で要約的に扱ってみたい。

なお本 TS ではワープロの都合で原本の表記が表わせないの以下のように使い分けをしているので注意されたし(わかりにくい所もあるが何卒…)。

|          | テキスト-原文/Table   | 訳文/注記/補足説明  |
|----------|---|---|
| 各種ベクトル   | $\vec{V}, \vec{V}_b, \vec{c}, \vec{g}, \vec{F} \dots$ | $\rightarrow V, \rightarrow V_b \dots v, v_b, c, g, F \dots$ (太字) |
| 単位ベクトル   | $\hat{n}, \hat{i}, \hat{j}$                           | $n, i, j$   |
| 仕事/エネルギー | $\dot{Q}, \dot{W}, \dot{W}_s, \dot{W}_{cs}$           | $Q, W, W_s, W_{cs}$   |
| 検査体積     | $\underline{V}, d\underline{V}$                       | $V, dV$   |

## 1. 流れの基礎式に関する情報

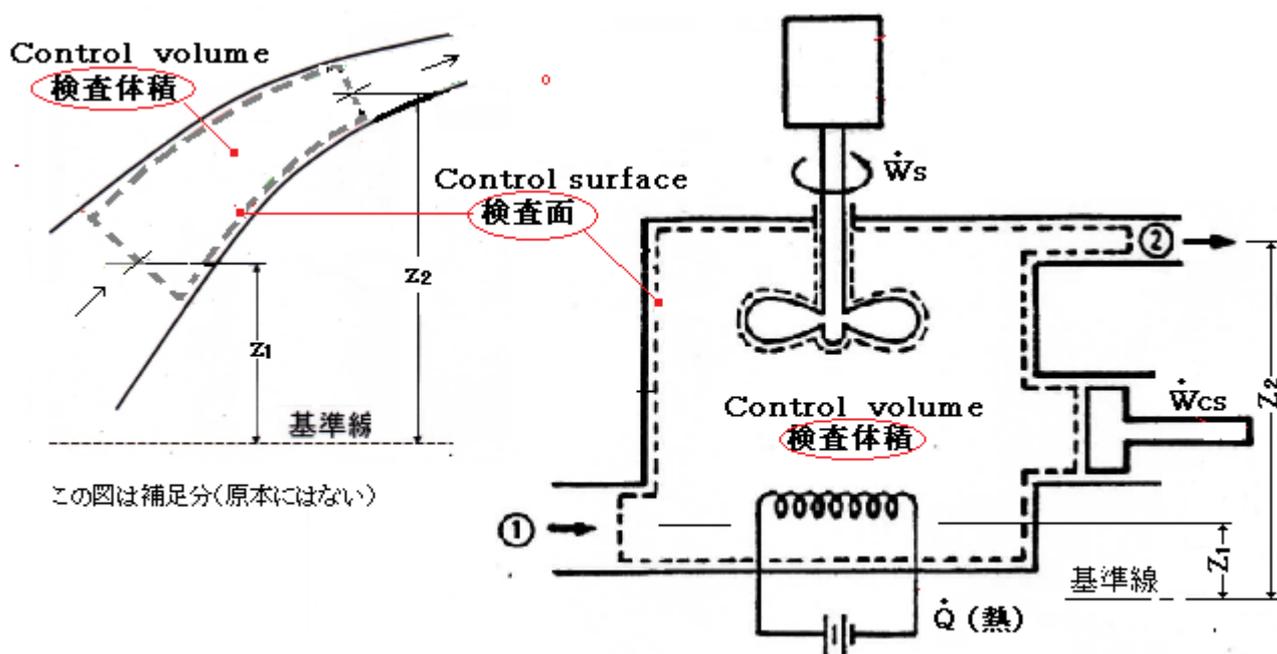
ここでは Blevins テキスト<sup>(1)</sup>の保存式の内容(意識)を若干の注記を加えて以下に紹介する。

### 5.1 インTRODクシヨン

流体力学解析では、積分形態を持った質量、運動量及びエネルギーの保存式とベルヌーイの式は、かけがえのないツールになっている。何故なら内部の挙動が不明であっても系の入力と出力の関係をを用いて系の挙動を記述する為に使用できるからである。これら流れの保存式(基礎方程式)は特定の幾何形状やシステムには結びつかない。これらの式は全般的なツールであって、その有効性は専らその式の応用の仕方如何によっている。実際、本テキストの大半あるいは一般の応用流体力学は特定の流体システムへの基礎方程式の応用にほかならないとみてもいい。

保存則の概念は**検査体積**と呼ばれる領域を完全に囲む空間に**検査面**を設けることで適用できる。検査システムは検査面と検査体積の和になる。流体は検査面を通して流れる。構造物は検査面を介して流体にフォース(力)を与える。

例えば Fig.5-1 に示される 2次元の検査体積を考える。流体は検査面を通して1から検査体積に入り2から出る。プロペラの実質的な効果は、検査体積内の流体に対し  $\dot{W}_s$  の割合で軸仕事をすることで、同様にヒーターの実質的な効果は、流体に  $\dot{Q}$  の割合で熱を供給することである。



この図は補足分(原本にはない)

Fig. 5-1 検査システム(例)

## 5.2 質量の保存

### 5.2.1 質量保存の式

検査体積内の質量保存の概念は、次のようにごく単純な形で表わすことができる。

$$\text{質量の蓄積} = \text{流入質量} - \text{流出質量} \quad \text{-----(5-1)}$$

質量の蓄積は必然的に検査面の拡張あるいは体積内流体の平均密度の増加のいずれかに由る。

$$\text{質量蓄積の割合} = \text{体積} \times \text{平均密度変化率} + \text{平均密度} \times \text{体積増加率} \quad \text{-----(5-2)}$$

$$[\partial(\rho V)/\partial t = V \cdot \partial \rho / \partial t + \rho \cdot \partial V / \partial t] \text{ -補足}$$

もし検査体積内の流体密度が一定で、検査面が固定されているなら、質量の蓄積は不可能である。同様に定常運転状態では質量は蓄積することはない

$$\text{流入質量} = \text{流出質量} \quad \text{-----(5-3)}$$

質量は検査面を横切ることによってのみ検査体積に出入りできる。検査面は動く可能性があるから、その境界を横切って検査体積に入る質量は

$$\text{流入質量} = \text{密度} \times \text{境界に対する相対速度} \times \text{流れ面積} \quad \text{-----(5-4)}$$

これはもし検査境界が拡張するとき、動きのない流体でも検査体積に入ることができることを意味している。

式(5-1)～(5-4)は Table5-1 の中で数学的に表現されている。もし検査体積が Fig.5-1 の検査体積のように空間的に固定されるなら、その検査面は**変形不可**であると云われる。この状態が最もありふれた形態であるが、可動な検査体積を持つこともあり得る。この場合、その検査表面は**変形可能**であると云われる。変形可能な検査面の解析は変形不可の検査面の解析よりも複雑になることが多い。何故ならば検査面を横切る相対流速のみならず検査面自身の流速もまた見逃せないからである。もし境界の速度が零 (Table 5-1 におけるベクトル  $\vec{V}_b=0$ ) に低下するなら変形可能な検査面を表わす式は変形不可の検査面を表わす式に変わる。

検査体積に入る流体は全て検査面を通過しているとみなされるので、式(5-1)～(5-4)には全く源泉(source)項は含まれていない。局所的な流動体廻りに検査面ができて、これを局所的な流体源泉あるいは流体溜り(sink)とみることができる。同様にエネルギーや運動量(モーメント)の源泉や溜りも定義できる。Fig.5-1 では、プロペラはそのまわりの流れ場の詳細を評価することはなく仕事  $\dot{W}_s$  の正味の源泉に結びつけて扱う。

Table 5-1 の保存式は質量の保存則として作られているが、それが、

- (1) 単位質量当りで表すことができる、
- (2) 流体とともに運ばれる(移流される)、
- (3) 不活性で変質や拡散が無視できる

ときには 他のスカラー物理量にもこれらの式を適用できる(☆1)。これはレイノルズの輸送定理の1例である(☆2)。

Table 5-1 質量保存(則)

| 条件(コメント付き)           | 質量保存式<br>(変形可能な検査面に対し)   | 質量保存式<br>(変形不可の検査面に対し)   |
|----------------------|--|--|
| 1. (a) 圧縮性流体<br>(*1) | $\int_S \rho(\vec{V} - \vec{V}_b) \cdot \hat{n} dA = - \frac{dM}{dt}$ <p style="text-align: center;">where</p> $\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{V}_b \cdot \hat{n} dA$ | $\int_S \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = - \frac{dM}{dt}$ <p style="text-align: center;">where</p> $\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ |
| 2. (a) 非圧縮性流体        | $\int_S (\vec{V} - \vec{V}_b) \cdot \hat{n} dA = - \frac{1}{\rho} \frac{dM}{dt}$ <p style="text-align: center;">where</p> $\frac{1}{\rho} \frac{dM}{dt} = \int_S \vec{V}_b \cdot \hat{n} dA$                         | $\int_S \vec{V} \cdot \hat{n} dA = 0$ <p style="text-align: center;">where</p> <p><math>M = \text{constant (一定)}</math></p>                                    |

|   |  |   |
|---|--|---|
| <p>3. (a) 一様流れ<br/>[入口(1) - 出口(2)]</p> <p>(b) 流れ直交断面</p> <p>(c) 流速は出口(2):<br/>外向き/入口(1)<br/>内向きに正</p>   | $\rho_1(V - V_b)_1 A_1 - \rho_2(V - V_b)_2 A_2 = \frac{dM}{dt}$ <p style="text-align: center;">where</p> $\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \rho_2 V_{b2} A_2 - \rho_1 V_{b1} A_1$ <p style="text-align: center;">or</p> $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \rho_1 V_1 A_1 - \rho_2 V_2 A_2$ | $\rho_1 V_1 A_1 - \rho_2 V_2 A_2 = \frac{dM}{dt}$ <p style="text-align: center;">where</p> $\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ |
| <p>4. (a) 一様流れ<br/>[入口(1) - 出口(2)]</p> <p>(b) 流れ直交断面</p> <p>(c) 流速は出口(2):<br/>外向き/入口(1)<br/>内向きに正</p> <p>(d) 定常状態にて<br/><math>dM/dt = 0</math><br/><math>\partial \rho / \partial t = 0</math>.</p> | $\rho_1 V_{b1} A_1 = \rho_2 V_{b2} A_2$ $\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$  | $\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$   |

(\*1)  $(\vec{v} - \vec{v}_b) \rightarrow$  検査面に対する流速ベクトル

記号:

$dA$  = 検査面の微小要素、 $M$  = 検査面に囲われた流体質量、 $V$  = 検査面で囲われた体積、  
 $\hat{n}$  = 検査面に外向きにとった、 $dA$ に直交する単位ベクトル、 $V$  = 流速ベクトルの大きさ、  
 $\vec{V}$  = 流速ベクトル、 $\vec{v}_b$  = 検査面の面積 $dA$ の流速ベクトル、 $S$  = 検査面、 $\rho$  = 流体密度、  
 $\cdot$  = ベクトルドット積、 $\vec{v} \cdot \hat{n} = |\vec{v}| \cos \theta$ 、 $\theta$  =  $\vec{v}$ と $n$ の間の角度、

(注) 全ての流速は内部座標フレームに対して計算される。

### 5.2.2 質量保存の例

(1) 境界レベルの例(\*3)。Fig.5.2のような薄い平板上の流れでは図のように対称形の境界層が発達する。ラインBB'に分布する速度プロファイルは次式で表される。

$$u/U = (|y|/\delta)^{1/n} \quad \text{----- (5-5)}$$

ここで、 $\delta$  = 辺BB'における境界層厚さ(片面)、 $n$  = 指数 ~ 7 (乱流境界層の場合)、

もし流体密度が一定で、AA'に沿って流れが一様速度で流入すれば、ABとA'B'に沿った流出量は質量保存則から計算できる。

検査面ABA'B'は変形せず、流体は非圧縮性なので、システムを通る質量流れはTable5-1のフレーム2の第3コラムの式で表わされる。

$$\int_S \vec{V} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad \text{----- (5-6)}$$

ここで 検査面SはAA',BB',AB,A'B'の合計である。垂直外向き単位ベクトルと流速ベクトルは次のように定義される

$$\hat{n} = \begin{cases} -\hat{i} & \text{on } AA' \\ \hat{i} & \text{on } BB' \\ \hat{j} & \text{on } AB \\ -\hat{j} & \text{on } A'B' \end{cases} \quad \vec{V} = \begin{cases} U_0 \hat{i} & \text{on } AA' \\ u \hat{i} & \text{on } BB' \\ \text{Unknown} & \text{on } AB \text{ and } A'B' \end{cases}$$

ここで  $\hat{i}$  と  $\hat{j}$  は +x方向と+y方向の単位ベクトルである。

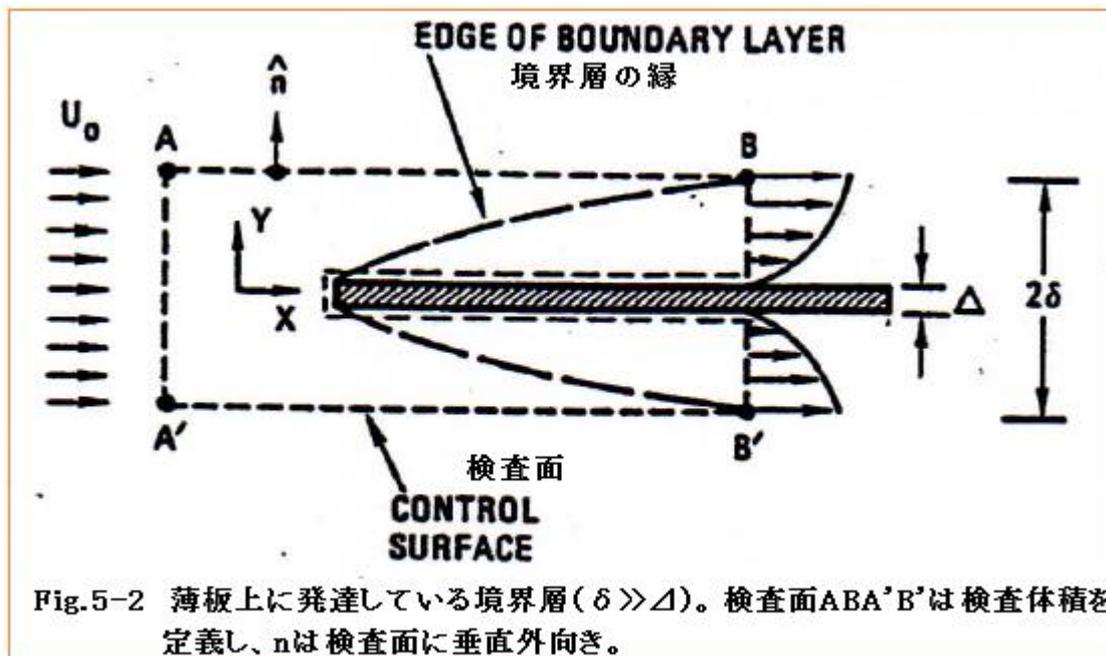
以上の置換えを行いシステムが板周りに対称であることに考えれば、(5-6)式は次のようになる。

$$-2 U_0 \delta + 2 \int_A^B \vec{V} \cdot \hat{j} dx + 2 U_0 \delta \int_0^1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} d\left(\frac{y}{\delta}\right) = 0$$

積分すると、ABまたはA'B'を通る体積流量は次のようになることがわかる。

$$\text{単位深さ(奥行)当りのAB越し体積流量} = \int_A^B \vec{V} \cdot \hat{j} dx = \frac{U_0 \delta}{1+n} \quad \text{----- (5-7)}$$

検査体積に流入する流量のおよそ 1/8 程度の乱流境界層(n=7)が境界層の上にある自由流れに混ざって垂直に入れ替わる。



(2) ピストンシリンダの例。Fig.5-3のようなシリンダにガスを内蔵したピストンを考える。

ピストンが動くときシリンダ空洞に定義された検査体積内のガスが膨脹し圧縮する。流体は圧縮性ガスで検査面は変形可能であるから、この系の質量保存は Table5-1 のフレーム 1 の第 2 コラムの式で表される。

シリンダからのガスのリークが皆無であれば、系のトータル質量 M は一定で  $dM/dt=0$  である。このとき保存式は次のように書くことができる。

$$0 = \int_s \rho \bar{V}_b \cdot \hat{n} dA + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad \text{----- (5-8)}$$

空洞の容積は  $V=AX$  である。ここで  $A$  はシリンダの断面積、 $x$  は空洞中のピストンの位置を表している。この場合、

$$\bar{V}_b \cdot \hat{n} = \frac{dx}{dt} \quad \text{----- (5-9)}$$

ここで  $[\rightarrow V_b]$  はピストン運動の速度ベクトルで、他の全ての境界は静止した状態にある。もし空洞のガス密度が一様なら  $\partial \rho / \partial t = d\rho / dt$  で、(5.9) を組み込むと(5-8)式は次のようになる。

$$0 = \rho A(dx/dt) + Ax(d\rho/dt)$$

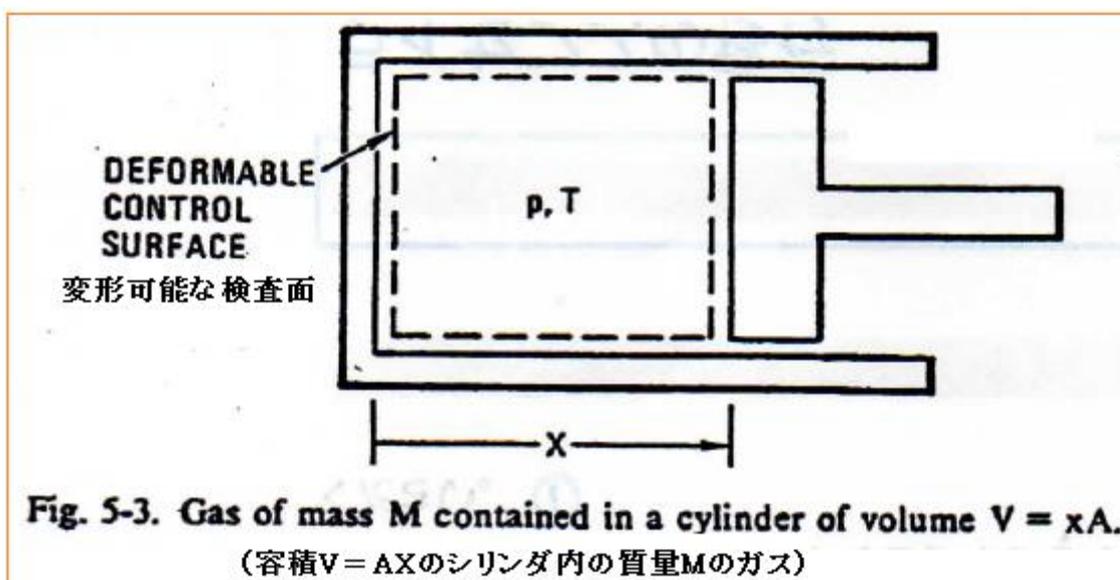
従って  $d\rho/\rho = -dx/x \rightarrow \ln(\rho/\rho_0) = -\ln(x/x_0)$

あるいは密度はピストン位置に反比例する。即ち

$$\rho = \rho_0(x_0/x) \quad \text{----- (5-10)}$$

ここで、 $\rho_0$  はピストンが  $x=x_0$  にある時の流体密度である。

式(5-10)は、ガス密度はシリンダの位置のみに依存しガスに有効な体積が減少するにつれて増加するという周知の事実を確認するもの。



【 5.2 節の注記 】 TS 作成者

- (☆1) 5.2.1 節は Table 5-1 の内容を平易に説明しているが、Table 5-1 はオリジナルとしての広義の連続式において物理量(スカラー量)として密度  $\rho$  を選んでにして得られたものである。ここでは他のスカラー物理量( $q$ )であっても、ここで示される(1)~(3)の条件が満たされるなら Table 5-1 がそのまま利用できること、あるいは適用拡大できることを云っている。

即ち、(1)の条件ではスカラー量  $q$  は  $q=q_0\rho$  ということになる(但し  $q_0$  は単位質量( $\rho=1$ )当りのスカラー量)。また(2)の条件ではスカラー量  $q$  は速度  $v$  によって移流し検査体積当たりの増加量( $\partial q / \partial t$ )と検査体積当たりの流出量( $J$ )の和は零ということになる。また(3)の条件では(1)で云う  $q_0$  は必然的に増加量/流出量においても一定ということになる。そこで(1)~(3)から

$$\partial q / \partial t + J = \partial(q_0\rho) / \partial t + q_0\rho v = q_0(\partial\rho / \partial t + \rho v) = 0 \rightarrow (\partial\rho / \partial t + \rho v) = 0$$

が得られる。更に検査体積/検査面という領域(V,S)と方向性(n)及び単位検査面(dA)を考えると

$$\int_V (\partial \rho / \partial t) dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \rightarrow \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = - \int_V (\partial \rho / \partial t) dV$$

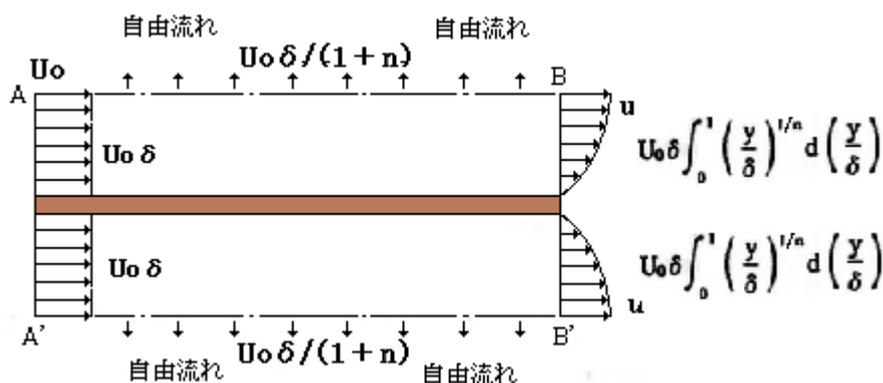
この場合、圧縮性/変形不可検査面を前提としているので、この結果を Table 5-1 のフレーム 1 のコラム 3 の質量保存式と比較すると全く同じであることがわかる。

(☆2) レイノルズの輸送定理は、連続体力学で用いられる定理で、空間積分と時間微分を変換する公式<sup>⑩</sup>である。例えば

$$(D/Dt) \int \theta(x,t) dv = \int_{kt} (D\theta/Dt + \theta \operatorname{div}.v) dv$$

ここで(D/Dt)=物質時間微分、 $\theta$  = 物理量、kt=変形形状、div.=発散 (→流体力学テキスト参照) 流れの質量保存式などでは、その導入過程でレイノルズの輸送定理が用いられている。

(☆3) 下図のように一様な流れの中に置かれた薄い平板の両側に AA'BB' の検査体積をセットしたもの。均一な流速  $U_0$  で流入した流れは平板上を通過する際に板面の摩擦抵抗を受け次第に境界層が発達して放物線状の速度分布で流出するので、流れ方向に流量が均衡せず上下辺 AB/A'B' へのリークが予想される。実際は複雑な流動になると思われるが、ここでは上下辺の外側にある自由流れへの放出を仮定して片面のリーク量を求めている。



## 5.3 エネルギーの保存

### 5.3.1 流体エネルギーのフォーム

流体エネルギーの主な形態は通常、単位質量(specific→比)当りで表され、以下のようなになる。

$u$  = 比内部エネルギーで、平衡点廻りの原子の動きに伴うエネルギー。熱によって最も容易に内部エネルギーの痕跡は識別される。

$p/\rho$  = 比圧力。P は圧力、 $\rho$  は流体密度。 $P/\rho$  は流体の圧縮で蓄えられるポテンシャルエネルギー。なお比エンタルピは  $u$  と組み合わせて  $[h = u + P/\rho]$  で定義される。

$V^2/2$  = 比運動エネルギーで流体運動にともなうもの。

$gz$  = 比ポテンシャルエネルギーで、大きさ  $g$  を持った加速度場の作用にともなうもの。一般には  $g$  は重力加速度を指すが、任意に働く定常的な加速度にも適用される。 $z$  は加速度  $g$  に抵抗する距離をいう。

### 5.3.2 エネルギーの保存式

最もシンプルな形としてエネルギーの発生/消滅のない検査体積におけるエネルギー保存式は次のように表わされる。

$$\text{エネルギーの蓄積} = \text{流入するエネルギー} - \text{流出するエネルギー} \quad \text{-----}(5-11)$$

この方程式はそのままでは適用するのが難しい。何故ならエネルギーは様々な形がとれるのでどんなエネルギーであれ無制限に検査面を通過させてしまうわけにはいかないからである。

流体は検査面に接しているの、仕事をしてそのエネルギーを変えることができる。検査体積内の流体もシャフト(軸)など検査面を貫通する装置(device)を介して仕事を為すことができるし、検査体積に熱を加えたり熱を除去することもできる。これらの事実を配慮すれば、(5-11)式は次のように拡張できる。

$$\begin{aligned} \text{流入熱量}(\dot{Q}) + \text{内部軸仕事}(\dot{W}_s) = \text{エネルギー蓄積量} \\ + \text{流出エネルギー量} - \text{流入エネルギー量} - \text{検査面の仕事量}(\dot{W}_{cs}) \quad \text{-----}(5-12) \end{aligned}$$

検査体積によってなされる仕事を内部でなされる仕事量(軸仕事  $\dot{W}_s$ )と検査面でなされる仕事量( $\dot{W}_{cs}$ )に振り分けるのはやや恣意的ではあるが、有益な措置である。

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{W}_{cs} \quad \text{-----}(5-13)$$

Fig.5-1の検査面では内部の軸仕事はプロペラで行われる。多くの場合、内部仕事は検査面で行われる仕事とは区別されるのでこの2つの項を分離するのは有益である。

検査面においてシステムによってされる仕事量は、

$$\dot{W}_{cs} = - \int_S \vec{F} \cdot \vec{V} dA \quad \text{-----}(5-14)$$

ここで $[\rightarrow F]$ は検査面の要素  $dA$  に作用する流体応力ベクトル(単位面積当たりの力)で、 $[\rightarrow V]$ は流速ベクトルである。流体応力は  $dA$  に直交する成分と  $dA$  の面内成分に別けることができる。

$$\vec{F} = \vec{s}_n + \vec{\tau}$$

ここで $[\rightarrow s_n]$ は  $dA$  に直交する成分、 $[\rightarrow \tau]$ は  $dA$  の面内成分。一方、検査面の絶対流速は、

$$\vec{V} = (\vec{V} - \vec{V}_b) + \vec{V}_b \quad (\text{ここで } \vec{V}_b = \text{検査面要素}dA\text{の流速})$$

これらを考慮すれば、 $\dot{W}_{cs}$ は次のように拡張することができる。

$$\begin{aligned} \dot{W}_{cs} &= - \int_S \vec{\tau} \cdot \vec{V} dA - \int_S \vec{s}_n \cdot \vec{V} dA \\ &= - \int_S \vec{\tau} \cdot \vec{V} dA - \int_S \vec{s}_n \cdot (\vec{V} - \vec{V}_b) dA - \int_S \vec{s}_n \cdot \vec{V}_b dA \quad \text{-----}(5-15) \end{aligned}$$

流体せん断応力 $[\rightarrow \tau]$ は粘度だけで生じ、垂直応力 $[\rightarrow s_n]$ は圧力と粘度から生じる。しかし高レイノルズ数ではたいていの場合、 $[\rightarrow s_n]$ では流体圧力による圧縮応力(下記)が支配的である。

$$\vec{s}_n = -p \hat{n}$$

ここで  $p$  は流体静圧(絶対)。そのとき検査面の仕事量は次の通り。

$$\dot{W}_{cs} = - \int_S \vec{\tau} \cdot \vec{V} dA + \int_S p (\vec{V} - \vec{V}_b) \cdot \hat{n} dA + \int_S p \vec{V}_b \cdot \hat{n} dA \quad \text{----}(5-16)$$

この検査面でなされる流体仕事の式(5-16)については、その右辺第2項の積分項を 検査面通過

の流体エネルギーをカウントする表面積分項の中に組み入れることができる。即ち

$$\int p(\mathbf{v}-\mathbf{v}_b)\cdot\mathbf{n}dA + \int \rho(u+V^2/2+gz)(\mathbf{v}-\mathbf{v}_b)\cdot\mathbf{n}dA$$

$$\rightarrow \int \rho(u+p/\rho+V^2/2+gz)(\mathbf{v}-\mathbf{v}_b)\cdot\mathbf{n}dA$$

もし検査面が静止しているなら、そのとき $[\rightarrow\mathbf{V}_b]=0$ であって検査面で圧力仕事が行われることはなく(5-16)式右辺第3項の積分は同様に0になる。もし検査面の流速が0であるか、検査面の流速が検査面に垂直であるように検査面が選択されるならば( $\tau$ は常に検査面の面内に横たわるので)、せん断仕事 $[\rightarrow\tau]\cdot[\rightarrow\mathbf{V}]$ は0になる(☆4)。

これらの条件が保たれ $[\rightarrow\tau]\cdot[\rightarrow\mathbf{V}]=0$ であるなら、検査面によってなされる仕事は零で、(5-16)式の右辺第1項の積分は零である。このようにエネルギー式の適用は、任意の検査面通過流れに垂直な静止検査面を組み入れることでかなり単純化される。

Table 5-2 の式や(5-11)(5-12)式は熱力学第1法則(☆5)を提示するもの。それらは流体システムに対して必要な条件であるが十分な条件ではない。周知のように、熱力学第1法則は、全ての流体挙動は可逆的であって熱は常に仕事に転換でき仕事は熱に転換できるという思い込みを与えるがこれは事実ではない。多くの流体现象は摩擦や熱流の方向性によって非可逆的である。

熱力学の第2法則(☆5)は前提とされるプロセスが実際に進展するかどうかをテストする。詳しくは熱力学テキストなど参照されたし。

Table 5-2 エネルギー式 (1/2)

| 条件(コメント付き)  | エネルギー式   |
|---|--|
| 1. (a) 変形可能な検査面を持つ。<br>(b) $\dot{W}$ は検査体積内でなされる仕事と検査面における仕事を含む。<br>( $\vec{V}-\vec{V}_b$ は検査面に対する流速) | $\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) dV$ $+ \int_S \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) (\vec{V} - \vec{V}_b) \cdot \hat{n} dA$   |
| 2. (a) 変形可能な検査面を持つ。<br>(b) 移動検査面に直交する応力は専ら圧力に由る。<br>コメント(*1)  | $\dot{Q} - \dot{W}_S = \frac{d}{dt} \int_V \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) dV$ $+ \int_S \rho \left( u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) (\vec{V} - \vec{V}_b) \cdot \hat{n} dA$ $+ \int_S p \vec{V}_b \cdot \hat{n} dA - \int_S \vec{\tau} \cdot \vec{V} dA$ |
| 3. (a) 変形可能な検査面を持つ。<br>(b) 移動検査面に直交する応力は専ら圧力に由る。<br>(c) 定常状態(全ての量は時間平均したもの)。<br>コメント(*2)              | $\dot{Q} - \dot{W}_S = \int_S \rho \left( u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) (\vec{V} - \vec{V}_b) \cdot \hat{n} dA$ $+ \int_S p \vec{V}_b \cdot \hat{n} dA - \int_S \vec{\tau} \cdot \vec{V} dA$   |

|   |   |
|---|---|
| <p>4. (a) 変形不可の検査面を持つ。<br/>         (b) 検査面のせん断仕事は無視できる。</p>  | $\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{d}{dt} \int_{\underline{V}} \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho d\underline{V}$ $+ \int_S \rho \left( u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \vec{V} \cdot \hat{n} dA$ |
| <p>5. (a) 変形不可の検査面を持つ。<br/>         (b) 検査面のせん断仕事は無視できる。<br/>         (c) 定常状態である。<br/>         (検査面のせん断仕事は無視できる)</p>   | $\dot{Q} - \dot{W}_s = \int_S \rho \left( u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \vec{V} \cdot \hat{n} dA$   |
| <p>6. (a) 変形不可の検査面を持つ。<br/>         (b) 定常状態である。<br/>         (c) 入口(1)～出口(2) 一様流れ<br/>         (d) 面積は流れ直角にとったもの<br/>         (e) 流速は出口(2)外向きに正、<br/>         入口(1)内向きに正</p> | $\dot{Q} - \dot{W}_s = \left( u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) \rho_2 V_2 A_2$ $- \left( u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right) \rho_1 V_1 A_1$                         |

Table 5-2 エネルギー式 (2/2)

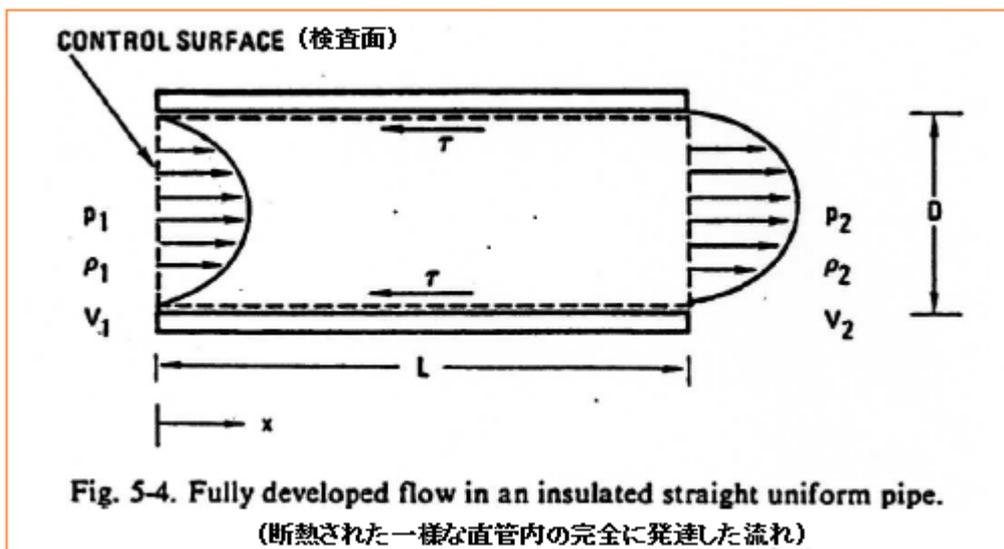
| 条件(コメント付き)   | エネルギー式   |
|--|--|
| <p>7. (a) 座標フレームは一定の角速度<math>\omega</math>で回転する。<math>r</math>は回転の固定軸からの距離である。<br/>         (b) 変形可能な検査面を持つ。<br/>         (c) 移動検査面に直交する応力は専ら圧力に由る。<br/>         コメント(*3)</p>                      | $\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{d}{dt} \int_{\underline{V}} \left( u + \frac{V^2}{2} + gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} \right) \rho d\underline{V}$ $+ \int_S \rho \left( u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} \right) (\vec{V} - \vec{V}_b) \cdot \hat{n} dA$ $+ \int_S p \vec{V}_b \cdot \hat{n} dA - \int_S \vec{\tau} \cdot \vec{V} dA$ |
| <p>8. (a) 座標フレームは一定の角速度<math>\omega</math>で回転する。<math>r</math>は回転の固定軸からの距離である。<br/>         (b) 変形不可の検査面を持つ。<br/>         (c) 検査面のせん断仕事は無視できる。<br/>         (d) 定常状態である。<br/>         コメント(*4)</p> | $\dot{Q} - \dot{W}_s = \int_S \rho \left( u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} \right) \vec{V} \cdot \hat{n} dA$   |

## 【コメント】

- (\*1) 比エンタルピー  $h = u + p/\rho$   
せん断仕事  $\tau \cdot \vec{v} = 0$  但し  $dA$  上で  $\vec{v} = 0$  か、あるいは  $\vec{v}$  は  $dA$  に直交  
 $\dot{W}_s =$  検査体積で内部的になされる軸仕事  
当該式では「仕事」が軸仕事と検査面でなされる仕事に拡張されている点で  
フレーム1と違っている(5-13式~5-16式)。
- (\*2) 検査面内のエネルギーは1サイクルの始めと終わりで同一とする。  
もし  $dA$  上で  $\vec{v} = 0$  であるか、 $\vec{v}$  が  $dA$  に直交するなら 剪断仕事  $\tau \cdot \vec{v} = 0$  である。
- (\*3)  $(\omega^2 r^2/2)$  は回転における特有のポテンシャルエネルギーである。  
速度は全て回転座標フレームに対して計測される。
- (\*4) 流速は全て回転座標フレームに対して計測される。
- (注) 全ての流速はフレーム7,8を除いて内部座標フレームに対して計測される。

## 【記号説明】

$dA$  = 検査面  $S$  の微少要素、 $g$  = 重力による加速度(定常的に加わる他の加速度も含め)  
 $h$  = 比エンタルピー( $= u + (1/2)p/\rho$ )、 $\hat{n}$  = 表面要素  $dA$  に外向き直角な単位ベクトル、  
 $p$  = 静圧、 $Q$  = 検査体積への入熱量、 $S$  = 体積  $V$  を内包する検査面積、 $V$  = 流速  $\vec{v}$  の大きさ、  
 $u$  = 単位質量当りの内部エネルギー、 $\vec{v}$  = 流速ベクトル、 $\underline{V}$  = 検査面に内包された体積  
 $\vec{v}_s$  = 検査面要素  $dA$  の速度ベクトル、 $\dot{W}$  = 検査体積でなされる仕事量、 $t$  = 時間、  
 $\dot{W}_s$  = 軸仕事、この場合、検査面でなされた仕事を除いた検査体積内の仕事  
 $z$  = 作用加速場  $g$  に対抗する距離、 $\vec{\tau}$  = 検査面要素  $dA$  の面内で測られた流体せん断応力  
 $\rho$  = 流体密度、 $\cdot$  = ベクトルドット積(内積)



## 5.3.3 エネルギー保存則の例

(1) パイプ流れの例。Fig.5-4 のような直線的で一様なパイプを通る非圧縮性亜音速流体の定常流れを考える。もしパイプ内外に伝熱が生じないようにパイプが断熱され、パイプ壁を伝う熱伝導が無視できるなら、Fig.5-4 の変形不可の検査体積を記述するエネルギー式は Table 5-2 のフレーム5で与えられる。ここで熱伝導  $\dot{Q}$  と軸仕事  $\dot{W}_s$  は零で  $\dot{Q} = \dot{W}_s = 0$  とおくと、

$$0 = \int_S \rho \left( u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \nabla \cdot \hat{n} \, dA. \quad \text{-----(5-17)}$$

ここで、 $\rho$  = 流体密度、 $p$  = 静圧、 $[\rightarrow V]$  = 流速ベクトル、 $u$  = 比内部エネルギー、 $g$  = 重力加速度、 $S$  = 検査面

もし  $u$ 、 $\rho$  および  $p$  がおおむね全断面で均一なら、(5-17)式の表面積分は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha_2 \rho V_2^2 + p_2 + \rho g z_2 - \left( \frac{1}{2} \alpha_1 \rho V_1^2 + p_1 + \rho g z_1 \right) \\ = \rho(u_1 - u_2). \quad \text{-----(5-18)} \end{aligned}$$

添字 1,2 付きは、パイプスパンに沿うポイント 1,2 のパイプ断面で平均化された値を示している。従って  $V_1$  と  $V_2$  はそれぞれ入口と出口における平均流速である。平均流速の 2 乗は一般に 2 乗化された流速を平均化したものと同じではない。それ故に無次元ファクタ  $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  を(5-18)式の運動エネルギー項に乘じなければならない。この流れ形状係数  $\alpha$  の例を以下に示す。

| 流れ形状(プロ・フィル)  | $\alpha$  |
|---------------|-----------|
| 全断面で一樣な流速     | 1         |
| 円管内の完全に発達した層流 | 4/3       |
| 円管内の完全に発達した乱流 | 1.01~1.05 |

乱流では、ベルヌーイ式として同じフォームの一つの式で扱えるので、近似値  $\alpha = 1$  がよく用いられている(→Table 5-3)。

内部エネルギー変化は通常、無次元不可逆損失係数(=圧損係数) $K$  を用いてモデル化されている。

$$\rho(u_1 - u_2) = \frac{1}{2} \rho V^2 K \quad \text{-----(5-19)}$$

内部エネルギーに伴う損失は、それらが通常の流体装置では逆走できない運動エネルギーから熱エネルギーへの変換という意味では不可逆である( $K$  の値は圧損係数として便覧等で与えられる)。

乱流に対し  $\alpha = 1$  と(5-19)式を(5-18)式に代入して、非圧縮性乱流の管路流れに対する支配方程式が得られる。即ち

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 - \left( p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 \right) = K \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g(z_2 - z_1) \quad \text{-----(5-20)}$$

ここで  $\rho g(z_1 - z_2)$  はエレベーションに関する水力的な圧力変化である。

もし Fig.5-4 に示されるように出入口の面積が等しいなら、非圧縮性流れの質量保存から  $V_1 = V_2 = V$  なので全圧の変化は静圧の変化に等しいことになる。即ち

$$p_1 - p_2 = K \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g (z_2 - z_1).$$

しかし、もしある入口、出口、ノズルあるいはデフューザで面積変化があれば、動圧の変化によって静圧の変化が起きる。即ち

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (V_2^2 - V_1^2) + K \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g (z_1 - z_2) \quad \text{---- (5-21)}$$

この場合、静圧の変化は、速度変化に伴う可逆損失、内部エネルギーの変化に伴う不可逆損失および水力的圧力変化の和になる。

(2) **ピストンシリンダの例(☆6)**。Fig.5-3 に示されるピストンシリンダを考える。もしシリンダが熱の出入りがないように断熱され、検査体積内の流速が零近くになるようにゆっくりと動くなら  $V^2$  としてはおよそ零(0)で、シリンダ空洞内のガス物性は殆ど一様とみていい。

この変形可能な検査体積のエネルギー保存式は、Table 5-2 のフレーム 2 で、 $\dot{Q} = \dot{W}_s = z = V^2 = 0$  とおいて

$$0 = \frac{d}{dt} \int_S \rho u \, dV + \int_S \rho \left( u + \frac{p}{\rho} \right) (\vec{V} - \vec{V}_b) \cdot \hat{n} \, dA \\ + \int_S p \vec{V}_b \cdot \hat{n} \, dA - \int_S \vec{\tau} \cdot \vec{V} \, dA. \quad \text{----- (5-22)}$$

流体は検査体積内から流出しないので、流速 $[\rightarrow V]$ は移動するピストン前面の境界速度 $[\rightarrow V_b]$ に等しく、固定されたシリンダ壁で $[\rightarrow V] = [\rightarrow V_b] = 0$ になる。従って、全体の検査面  $S$  で $[\rightarrow V] - [\rightarrow V_b] = 0$ になり、(5-22)式の第2項は消える。ピストン前面(但し $[\rightarrow V] = [\rightarrow V_b]$ )を除く検査面  $S$  で $[\rightarrow V] = 0$ になり、 $[\rightarrow V]$ はピストン面に直交しせん断応力 $\rightarrow \tau$ に直交するので、 $S$ 上にある $[\rightarrow \tau] \cdot [\rightarrow V]$ は零(0)になり、(5-22)式右辺の最後の積分は消える。その結果、(5-22)式は

$$0 = \frac{d}{dt} \int_S \rho u \, dV + \int_S p \vec{V}_b \cdot \hat{n} \, dA.$$

もしピストンが比較的ゆっくりと動くなら、空洞の流体物性は殆ど一様で、境界速度も単純に下記のようにピストン速度( $dx/dt$ )になる。これを用いて上記の積分から次の式が得られる。

$$\text{ピストン速度 } \vec{V}_b \cdot \hat{n} = dx/dt \rightarrow M \frac{du}{dt} + \rho A \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{---- (5-23)}$$

$M = \rho V$  は空洞内のガスの質量、 $A$  は位置  $x$  でのピストン前面の面積、 $u$  は

内部エネルギー :  $du = C_v dT$

ここで、 $C_v$  は定容比熱で完全ガスの温度に依存しない。

空洞の中の絶対温度は完全ガス則(状態式)を用いて表わすことができる。即ち

$$T=pV/(MR)$$

ここで  $V=Ax$  は空洞の容積で、 $R$  は対象ガスのガス定数である。この式を用いると内部エネルギーの変化は次のようになる。

$$du=C_v dT=C_v(pdV+Vdp)/(MR)$$

これを(5-23)式に代入して

$$C_v(p dV+V dp)+p R dV=0 \quad \text{-----} \quad (5-24)$$

ここで  $dV=Adx$  である。上記の式は圧力差  $dp$  と容積差  $dV$  を用いて書き直すことができる。

$$\{(C_v+R)/C_v\} (dV/V)=-dp/p$$

完全ガスに対して  $C_p=C_v+R$ 、 $\gamma=C_p/C_v$  とおけるので、(5-24)式を積分して空洞における圧力と容積の関係が得られる。即ち

$$\log_e \frac{p_0}{p} = \log_e \left( \frac{V}{V_0} \right)^\gamma$$

これは、断熱変化の式  $PV^\gamma=一定$  に相当し、断熱されたシリンダ空洞の圧力  $p$  が瞬間的な空洞容積  $V$  に関係することを示している。

#### 【 5.3 節の注記 】 TS 作成者

(☆4) ベクトル内積は  $(\rightarrow \tau) \cdot (\rightarrow V) = \tau V \cos \theta$  で与えられる。検査面に平行する流速が 0 なら必然的に流体のせん断応力  $\tau$  は 0 なのでこのベクトル内積は 0 になる。また流速  $V$  の方向が検査面に直交して  $\theta$  が 90 度になるときにベクトル内積は 0 になる。後者は少しわかり難いが、直交方向に流れるときは検査面に沿う流速は 0 なので検査面がたとえ固定壁でなくとも検査面に沿う流体せん断応力  $\tau$  は発生しないと風に理解しておけばいいと思う。

(☆5) テキストによれば熱力学の法則は次の 4 つからなる。

第 1 法則：物体の外部から加わった仕事と熱量の和は内部エネルギーの増加に等しい。

第 2 法則：熱は高温から低温に移動しその逆は起きない。または孤立系のエントロピーは不可逆変化によって増大する。

第 3 法則：絶対温度ではどんな物質のエントロピーも零になる。

第 4 法則：物体 A と B が熱平衡にあり物体 B と C も熱平衡にあるならば A と C は熱平衡の状態にある。

(☆6) この例では式の変形過程が多くてわかりにくくなっている。重複になるがその過程を以下に確認しておく。

この例でフィットするのは Table 5-2 のフレーム 2 である。即ち

$$\begin{aligned} \dot{Q}-\dot{W} &= (d/dt) \int_v \rho (u+v^2/2+gz) dV + \int_s \rho (u+p/\rho +v^2/2+gz)(\mathbf{v}-\mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} dA \\ &\quad + \int_s p \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} dA - \int_s \tau \cdot \mathbf{v} dA \end{aligned}$$

外部からのエネルギー流入や内部仕事を考えなければ、左辺=零(0)。気体では通常位置ポテンシャルは無視できるので  $z=0$ 。また内部の流速  $v$  は小さいのでその 2 乗  $v^2$  は無視できる。故に

$$0 = (d/dt) \int_V \rho u dV + \int_S \rho (u + p/\rho)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_b) \cdot n dA + \int_S p \mathbf{v}_b \cdot n dA - \int \tau \cdot \mathbf{v} dA$$

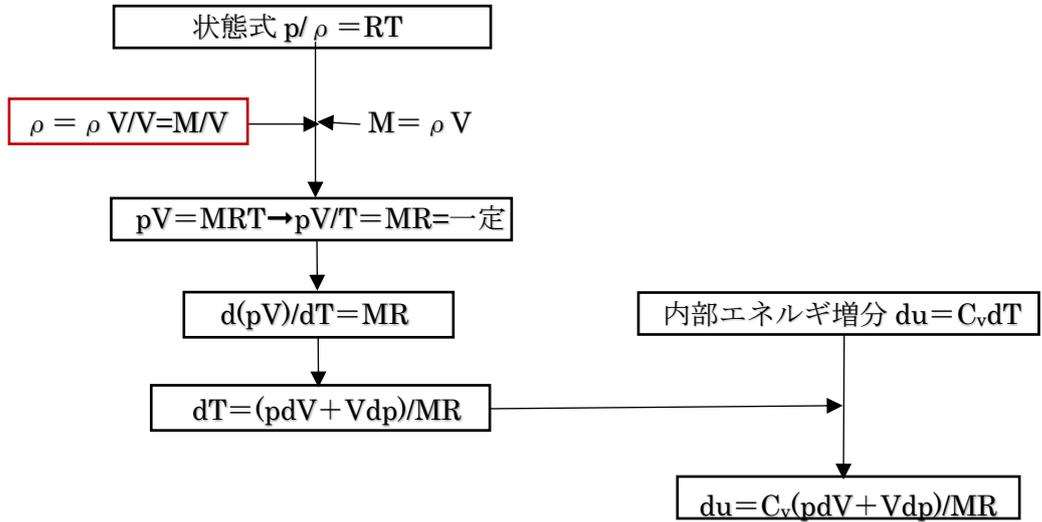
また、ピストン速度ベクトル  $\mathbf{v}_b$  と内部流速ベクトル  $\mathbf{v}$  はほぼ同じなので  $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_b) = 0$ 、また壁面の摩擦は小さく  $\tau \cdot \mathbf{v} \approx 0$  なので、右辺の第2項と第3項は消去され

$$0 = (d/dt) \int_V \rho u dV + \int_S p \mathbf{v}_b \cdot n dA$$

ここで  $(d/dt) \int_V \rho u dV = (\int_V \rho dV) (du/dt) = M(du/dt)$  に、 $\int_S p \mathbf{v}_b \cdot n dA = (\int_S p n dA) \mathbf{v}_b = +pA(dx/dt)$  であるから、上式は次のように書ける。

$$M(du/dt) + pA(dx/dt) = 0 \quad (\text{但し } dx/dt = \text{時間当たりのピストン変位} = v_b)$$

さて内部エネルギー増分  $du$  は、熱力学の公式を以下のように操ることで得られる。



この結果を  $M(du/dt) + pA(dx/dt) = 0$  に代入して変形すれば、次式が得られる。

$$\{(C_v + R)/C_v\} (dV/V) = -(dp/p)$$

ここで  $C_p - C_v = R$ 、 $C_p/C_v = \gamma$  であるから  $\gamma (dV/V) = -(dp/p)$ 、この式を 1~2 区間で積分して

$$\ln(V_2/V_1)^\gamma = -\ln(p_2/p_1) = \ln(p_1/p_2) \rightarrow (V_2/V_1)^\gamma = (p_1/p_2) \rightarrow pV^\gamma = \text{一定}$$

即ちよく知られた断熱変化の状態式が得られる。勿論シリンダは断熱されているのでエネルギー保存則は  $pV^\gamma = \text{一定}$  に帰着する。

## 5.4 ベルヌーイの式

### 5.4.1 式の提示

**Table 5-3** に示されるベルヌーイ式は、同時刻における流体容積の2つの離れた位置における流れの動的な特性を関係づけるものである。これらの式は前節のエネルギー式の形をとる。これらベルヌーイ式は次の仮定のもとで流れの2つのポイントのエネルギー式を積分することで得られる。

1. 流体に対し何の仕事もなされない、あるいは流体によって何の仕事もなされない。流体の境界が固定されるかぎり常に然り。
2. 境界越しのあるいは流体内の熱伝達は無視できる。
3. **Table 5-4** にリストされた代替制限に示されるように、粘度や渦度あるいは2つのポイントの位置についてある種の制限が加わる。

渦度は流体要素の回転の尺度である。粘性せん断や外力によって渦が起きると粘度による減衰があってもなかなか消えない傾向がある。

従ってベルヌーイ式の適用(Table 5-3)において、Table 5-4 のフレーム 1 の粘度零(0)の仮定は Table 5-4 のフレーム 2 及び 4 の渦度零(0)の仮定に比べて一般に制限の少ない (ルーズな)仮定といえる。

それ故にベルヌーイ式は、一般に Table 5-4 のフレーム 1 に示されるような仮定の下で、定常流れにおけるパスラインや流線に沿った 2 ポイントに適用される。

場合によっては Table 5-3 のベルヌーイ式と Table 5-2 のエネルギー式が同時に適用されることもある。例えば、定常非圧縮性流れでは、Table 5-2 のフレーム 6 のエネルギー式は流線の両端のエネルギーを関係づけるために使用できる。

$$u_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1.$$

ここで  $u$ =特定の内部エネルギー、 $p$ =流体静圧(絶対)、 $\rho$ =密度、 $V$ =流速の大きさ、 $g$ =重力加速度、 $z$ =エレベーション(高さ位置)、

これに引き当たるベルヌーイ式が Table 5-3 のフレーム 2 で与えられている。

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1.$$

両方の式が同時に適用される時、これら 2 つの式の比較から、容易に内部エネルギーが一定即ち  $u_1 = u_2 = \text{一定}$  でなければならないことがわかる。これは、粘性がないとき、定常の非圧縮性流れの温度が流線上で一定であることを意味している。

対照的に、圧縮性流体の場合は、流管の端部の圧縮性ガスの定常断熱流れを表現するエネルギー式(→Table 5-2 のフレーム 6)において、 $\dot{Q} = \dot{W}_s = 0$  とおくと次式が得られる。

$$u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1$$

しかし、これに相当するベルヌーイ式は  $p_2/\rho_2 + V_2^2/2 + gz_2 = p_1/\rho_1 + V_1^2/2 + gz_1$  ではなく次式 (→Table 5-3 のフレーム 5) のようになる(☆7)。

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1$$

ここで  $\gamma$  = 比熱比(=  $C_p/C_v$ )

これら 2 つの式を引き算し、流線に沿ってその結果を微分し、完全ガス則  $dp = RTd\rho + \rho RdT$  を取り込んで次の結果が得られる。

$$du = \frac{1}{\gamma - 1} R dT$$

更に  $\gamma = C_p/C_v$ 、 $C_p - C_v = R$  であるから、完全ガスの内部エネルギーは温度のみの関数として次のように表わすことができる。

$$u = C_v T$$

これは 14 章の(14-4)式に合致する。このようにベルヌーイ式は非粘性完全ガスのエネルギー保存式と一致している(矛盾していない)。

定常非圧縮性流れのベルヌーイ式 (Table 5-3 のフレーム 2)は、流体力学において最も古い式の一つではあるが、流力分野では最もパワフルな結果をもたらす。

水銀気圧計のイタリア人発明家トリチェリは、タンクの開口からの水の流速が開口部より上の水面の高さの平方根に比例するのを証明する際にその式がひらめいた。数学者 Daniel Bernoulli はこれを一般化した式を著書の Hydrodynamica(1738)に記述したので彼の名前をとりベルヌーイの式と呼ばれている。

Table 5-3 ベルヌーイ式

| 条件(コメント付き) (a)                              | ベルヌーイ式   |
|---|--|
| 1. (a) 非圧縮性流体<br>(b) 非定常流れに適用               | $\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + gz_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gz_1$ <p>(注) 積分はある瞬間にて実行する (脚注(b)参照)</p> |
| 2. (a) 非圧縮性流体<br>(b) 定常流れに適用                | $\frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + gz_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gz_1$  |
| 3. (a) 圧縮性流体<br>(密度は圧力のみ関数)<br>(b) 非定常流れに適用 | $\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = \frac{V_1^2}{2} + gz_1$ <p>(注) 積分はある瞬間にて実行する</p>                      |
| 4. (a) 圧縮性流体<br>(密度は圧力のみ関数)<br>(b) 定常流れに適用  | $\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = \frac{V_1^2}{2} + gz_1$   |

5. (a) 圧縮性流体  
 (b) 完全ガスの断熱流れ  
 $P/\rho^\gamma = \text{一定} (*1)$   
 (c) 定常流れに適用  
 (d) 衝撃波の介在無し

$$\frac{V_2^2}{2} + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{P_2}{\rho_2} + gz_2 = \frac{V_1^2}{2} + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{P_1}{\rho_1} + gz_1 \quad (\star 7)$$

あるいは

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} - \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{P_1}{\rho_1} \left[ 1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] + g(z_2 - z_1) = 0 \quad (\star 8)$$

あるいは

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} - \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{P_1}{\rho_1} \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) + g(z_2 - z_1) = 0 \quad (\star 8)$$

(注記) これらの式から、淀みゾーン(流速零)の圧力( $p_0$ )は次のようになる。

$$P_0 = P_1 + \frac{1}{2} \rho_1 V_1^2 \left( 1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2-\gamma}{24} M^4 + \dots \right)$$

ここで  $M = V_1/C = \text{マッハ数}$ 、 $C = \text{音速}$ 、  
 $P_1 = \text{流速 } V_1 \text{ における流体圧力}$

### 【 Table 5-3 記号説明 】

$g = \text{重力による加速度または任意の一樣/定常力場による加速度}$ 、 $P = \text{流体静圧(abs)}$   
 $P_0 = \text{淀み点の流体圧力}$ 、 $ds = \text{流体進路に沿う要素}$ 、 $T = \text{絶対温度}$ 、 $t = \text{時間}$ 、 $\rho = \text{流体密度}$ 、  
 $V = \text{内部座標フレームで測られた流速の大きさ}$ 、 $z = g \text{ に対抗する距離}$ 、  
 $\gamma = \text{比熱比(=定圧比熱/定容比熱)}$ 、

流体に対する仕事はない、また熱の伝達もないものとする。添え字1,2は ある瞬間の流れの2ポイントを表わす。流体は粘度を持たずポイント1,2は Table 5-4 の代替条件に由る場合を除いて 流体の通路(定常流れの流線) に沿うものでなければならない。

### 【 注記 】

(\*1) [ $p/\rho^\gamma = \text{一定}$ ] は可逆断熱(等エントロピ)プロセス、即ち粘性拡散や伝熱のないプロセスにおいて理想ガスに対し保持される。

脚注 (a) 仮定条件についての詳細な議論は Table 5-4 と本文参照のこと

(b) この式は流体中の任意点で  $\partial\phi/\partial t + V^2/2 + gz + p/\rho = F(t)$  に相当する。この場合  $\phi$  は速度ポテンシャルで  $F(t)$  は流体中の全てのポイントに作用する。添付 C 参照。