【整番 FE-01-IG-052】 【標題】流体の音速に関する基本的な情報

分類:流れ(流れ全般)/種別:初心手引き | 作成年月: R02.02/改訂: Ver.0.0(R02.3) | 作成者: N. Miyamoto

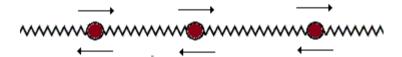
全11枚

(0) 流体中を通過する圧力波即ち音波の伝播速度は、通常、流体の音速と呼ばれている。この流体音速は

- ・高速の圧縮性流体の動的な挙動
- ・弁の切り替えなどによる過渡的な流れで起きる水撃現象
- ・流体振動あるいは往復動機械による定常的な脈動流などで起きる共鳴現象

などの検討/解析では必須のパラメータになっている。流体音速も含めて流体特性データはかなり充実している。音速データについても、既存の便覧やハンドブックに多くの具体的なデータが提供されているので今更、これを云々する必要はないのかも知れない。しかし個々のデータはともかくその基本的な傾向を理解し適正に運用することは大事である。以下、テキスト類を縦断する形で基本的な音速データをまとめてみた。

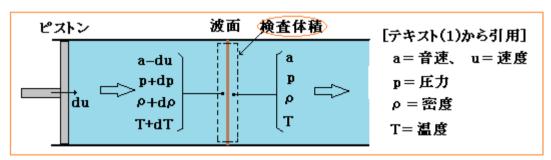
(1) 音波は弾性体(気体/液体/固体)の内部を伝播する弾性波であり物理的には音波の伝播は下図のようにマス・バネ系の単一方向の過渡振動現象とみていいと思うが、流体の音波の伝播は一般に波動論で扱われることが多い。



さて流体流れにおいて波面と共に移動する観察者から流れを観察すると下図のようになる。この場合 連続(質量保存則)の式: ρ a=(ρ +d ρ)(a-du) \rightarrow d ρ / ρ =du/a

運動量 (運動量保存則) の式 : $\{(p+dp)-p\}=\rho \ a\{a-(a-du)\}$ $\rightarrow dp=\rho \ adu$

両式から du を消去すると $\mathbf{a}^2 = \mathrm{dp/d}\,\rho = \partial \mathbf{p}/\partial\,\rho$ $\rightarrow \mathbf{a} = (\partial \mathbf{p}/\partial\,\rho)^{1/2}$ <u>以上、テキスト(1)</u>



音波の通過による流体の状態変化はその速度勾配や温度勾配が非常に軽微であることが多いので、通常は等エントロピ変化(即ち断熱変化)とみなして、 $\mathbf{a} = (\partial \mathbf{p}/\partial \rho)^{1/2} \mid_{\mathbf{π} = \nu} \mathbf{p}/\rho$ で表わす。等エントロピー変化では $\partial \mathbf{p}/\partial \rho = \gamma \mathbf{p}/\rho$ 、体積弾性率 $\mathbf{K}_{s} = \rho \left(\partial \mathbf{p}/\partial \rho\right)$ 、圧縮率 $\beta_{s} = 1/\mathbf{K}_{s}$ であるから、気体の場合

気体音速: $\mathbf{a}=(\gamma\,\mathbf{p}\,/\,\rho\,)^{1/2}=(\gamma\,\mathbf{RT}\,)^{1/2}=(\gamma\,\mathbf{R}_\mathrm{u}\,\mathrm{T}/\mathrm{M}_\mathrm{w})^{1/2}=(\,\mathbf{K}_\mathrm{s}\,/\,\rho\,)^{1/2}=(1/\,\beta\,_\mathrm{s}\,\rho\,)^{1/2}$ ------(a) 液体の場合は \mathbf{K}_s を \mathbf{K} に置き換えて、

液体音速: $\mathbf{a} = (\mathbf{K}/\rho)^{1/2} = \{1/(\beta \rho)\}^{1/2}$ ------(b)

ここで a=音速(m/s)、R=気体定数(J/kg°K)、p=流体圧力(絶対)(N/m²)、T=流体温度(絶対)(°K) $\rho=$ 流体密度(kg/m³)、 $\gamma=$ 比熱比(-)、

 K_s =等エントロピ体積弾性率 (N/m^2) 、 β_s =等エントロピー圧縮率 (m^2/N) 、

K=液体の体積弾性率(N/m²)、 β =液体の圧縮率(m²/N) (表-6, 表-7, 図-10 を参照) [図表のデータを使うときは単位に注意]

文献(5)より引用

4.03

3.15

なお、連続相(液相)の熱容量が大きいときや比較的低周波数の波動のときは、むしろ断熱変化より等温変化に近い $^{(3)}$ 。その場合は $\gamma=1$ とし $\mathbf{a}=(\mathbf{RT})^{1/2}$ で計算すればよい

気体の音速は (a)式 $[a=(\gamma RT)^{1/2}]$ からわかるように温度 T が高くなるほど大きくなる。また分子量が小さく軽い気体は、気体定数 R が高いので音速は大きくなる傾向がある(表 1.1 を参照)。液体の音速も体積弾性率が温度によって変化するので気体と同じ傾向を示す。

温度(と)		$\beta (cm^2/kg) \times 10^{-5}$						
圧力範囲(気圧)	0	10	20	50	100			
1 - 25	5. 08	4. 84	4. 75					
1 - 100	4. 95	4. 67	4. 53	4. 34	4.63			
500 - 600	4. 23	4. 04	3. 91	3.77	4.03			

4.60

3.46

1 - 500

1000 - 1500

表-6 水の圧縮率β

4. 33

3.37

4.20

3.27

表-7 水の体積弾性係数 kの値 (kg/m²) 文献(5)より引用 温度°C 0 10 20 50 圧力(kg/cm²) 1. 909×108 2. 066×108 1 ~ 25 2. 105×108 2. 101 " 25 ~ 50 2. 004 " 2. 169 " 2. 028 . // 2. 183 ii 2. 268 " 50 ~ 75 2. 198 " 2. 283 " $75 \sim 100$ 2. 058 " 2. 481×10 8 2. 309 " 2. 381 " 2. 174 " 100 ~ 500 2. 618 " 2.717 " 2. 825 " $500 \sim 1000$ 2. 481 " 2. 967 " 3.058 # 3.175 " $1000 \sim 1500$ 2. 890 "

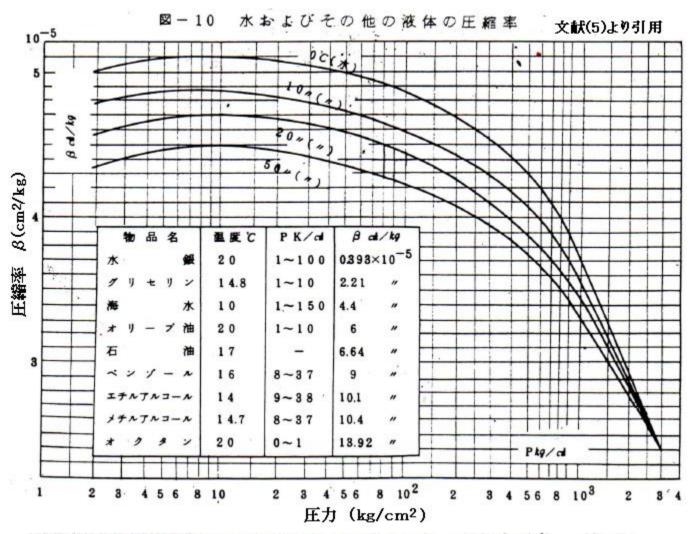


表 1-1 代表的な気体の諸量(比熱比と音速は 100 kPa, 280 K の値)。 テキスト(1)引用

領体 静景	分子記号	原子数	分子量 M	気体定数 R [J/(kg·K)]	比熱比γ	音速 a [m/s]
アルゴン	Ar	1	39.95	208.2	1.670 .	312
ヘリウム	He	1	4.00	2 078	1.667	985
水素	H ₂	3	2.02	4 124	1.408	1 276
窟 表	N ₃	• - 2	28.01	296.7	1.402	341
酸素	O ₂	2	32.00	259.8	1.398	319
乾燥空気	-		28.96	287.1	1,402	336
炭酸ガス	CO ₂	3	44.01	188.9	1.304	261
アンモニア	NH ₃	4	17.03	488.2	1.324	425
メタン	CH ₄	5	16.04	518.3	1314	436
六フッ化硫黄	SFa	7	146.05	56.9	1.095	130

[注] 気体定数は一般ガス定数8315を分子量で除した値

参考として、いろいろの文献からピックアップした単相流体の音速データ(図表)を次頁以下に記す。

大気圧における空気音速、化学薬品/液化ガスなどの音速 種々の液体の音速、高圧エチレンガスの音速

Table 14-* 大気圧における空気音速 (Blevinsテキストよりピックアップ)

温度 Temp., T (°C)	Speed of Sound, c 音速(m/s)	温度 Temp.,T (°C)	Speed of Sound, c 音速(m/s)	温度 Temp.,T (°C)	Speed of Sound, c 音速(m/s)
-50	299.7	50	360.3	280	468.3
-40 -30	306.2 312.7	60 70	365.7 371.2	300	476.3
-20	319.1	80	376.6	350	495.6
-10	325.3	90	381.7	400 450	514.1
0	331.4	100	386.9	500	548.8
10	334.4	120	396.9 406.6	600	580.8
15	340.4	160	416.5	700	611.4
20	343.3	180	425.5	900	640.3
25	346.3	200	434.5	1000	694.8
30	349.1 351.9	220	443.1 451.8		
40	354.7	260	460.0	1 - 1	

表* 化学製品/液化ガスなどの音速(常圧)

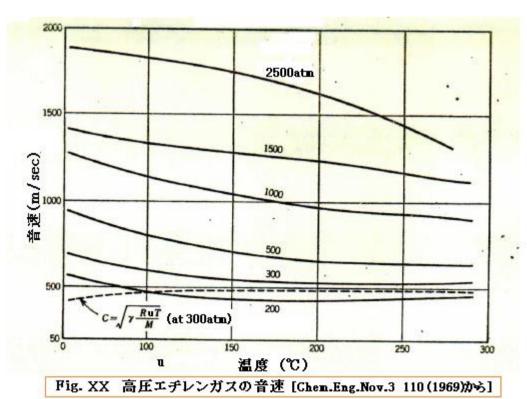
薬品名	温度℃	音速(m/s)	薬品名	温度℃	音速(m/s)
アセトン アンモニア*	20 -77 -33	1 192 { 2 000 1 715	ニトロペンゼン ・ノナノール 1-ノナン	20 20 20	1 470 1 390 1 220
アニリン	20	1 660	オクタノール	.20	1 360
ベンゼン n-ブタン	20 20	1 326 893	1-オクタン フェノール	100	1 180 1 270
n-ブタノール i-ブタノール	20 20	1 265 1 220	プロパンプロピレン	-58	672 1 259
i-ブテン* o-フレゾール	20	866 1 540		-38 -9	1 122 934
m-フレゾ -ル	20	1 500	スチレン	+8.5 —	826 1 318
クノン シクロヘキサン	20 20	1 342 1 280	イオウ	160 200	1 280 1 230
シクロヘキサノール ジエチレングリコール	30 20	1 450 1 600	トルエン	20	1 330
エチルペンゼンエチレングリコール	20 20	1 338 1 670	トリクロロエチレン トリノチルベンゼン	20	1 050 1 360
エタノール	20	1 170		20 20	1 370 1 370
- ヘブテン - プロパノール	20	1 130	∩f校ヒニル 水	20 20	1 150 1 430
メタン メタノール	-160 20	1 320 1 123	0-キシレン	70	1 360
ナフタリン	100	1 250	m-キシレン p-キシレン	20 20	1 340 1 330

(注)以上の値は圧力ととも<u>に</u>増加し、温度上昇に伴って減少する傾向あり。また管壁の有効弾性によって低下する。 (化工関係便覧より引用)

Table 14-++ 種々の液体の音速 (Blevins テキストよりピックアップ)

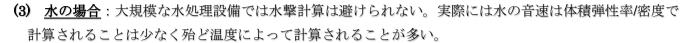
常圧にて

	-	(Dictins) 4 ×1 & /C J/) J/					πμκι	
液体		温度 (℃)	音速 (m/s)	液体		温度(℃)	音速 (m/s)	
Air		-188		Kerosene		20	1450	
Acetic acid	C2H4O2	20	1164	Nitrogen	N ₂	-195	894	
Acetone	C3H60	20	1189	Mercury	Hg .	20	1451	
Alcohol, ethyl	C2H60	20	1159	Methane	сн4	-163	1380	
Alcohol, butyl	C4H100	20	1263	Oil, castor		20	1540	
Alcohol, methyl	CH40	20	1120	0il, crude (比重86)		20	1326	
Alcohol, isopropyl	C3H80	20	1170	0il, SAE 30		20	1290	
Benzene	C6H6	16	1324	Naphthalene	C10H8	90		
Carbon dioxide	co2 .	20	856	Octane	C8H18	20	1197	
Carbon disulfide	CS ₂	0	1157	Oxygen	02	-183	115	
Ether, ethyl	C4H100	20	1006	Sodium	Na	225	246	
Glycerol(b)	C3H8O3	20	1895	Turpentine		20	1330	
Gasoline (グリセリン)		20	1395	Vinyl acetate	C4H6O2	20	115	
Helium	Не	-269	181	Water, fresh	H20	20	148	
Hydrogen	Н2 .	-253	1100	Water, sea		15	150	
Hydrogen chloride	HC1	15.5	1518					



(注) 高圧ガス/超高圧ガスは完全ガス則から逸脱し $c=(\gamma ZRT)^{1/2}=(\gamma ZRuT/M)^{1/2}$ に近づく。ここで Z= 圧縮性係数、Ru=一般ガス定数、M=分子量

単相流体で物性が確定した流体の場合、上記の式で流体音速を精度よく見積ることができる。しかし 実際には<u>物性の不完全さあるいは他の成分や外部的な影響</u>が加わって見積の精度は低下するので、以下 (3)(4)のように流体や流れの状態を考慮して適切な式を使用する必要がある。



。**Blevin** テキストでは下記の Wilson の式が示されている。

純水の音速式:
$$\mathbf{a} = 1403 + 5 \, \mathbf{t} - 0.06 \, \mathbf{t}^2 + 0.0003 \, \mathbf{t}^3$$
 -------(c)

海水の音速式:a=1449+4.6 t-0.055 $t^2+0.00024$ $t^3+(1.39-0.012$ t)(S-35)+0.017d ----(d) ここで a=実際の音速(m/s)、t=温度($\mathbb C$)、S=塩度(\sim /1000)(ティピカルな海水の場合 S=35)、d=水面下の深さ(m)

機械工学便覧では下記の Tait の状態式をベースにした式が示されている。

$$a = a_0 \{(p+B)/(p_0+B)\}^{(n-1)/2n}$$
 $(B \cup B) = (\rho_0 a_0^2/n) - p_0$ -----(e)

ここで、a=実際の音速(m/s)、p=実際の絶対圧力(kPa)、a_o=基準流速(=1472 m/s)、

 p_0 =基準圧力(=101.3 kPa)、 ρ_0 =基準密度(=999.1 kg/m³)、n=指数(=7.15)

なお基準は 15℃大気圧。通常の圧力変化の範囲(<104kPa)では水の音速は殆ど一定と云われる(1)。

(4) <u>気泡が混入した液体の場合</u>:液体中に気泡が混入していると一般に音速(圧力波伝播速度)は低下する。 機械工学便覧では気泡流(均質流)のように気泡が分散して混入している場合の音速式として、次の 横山-宮代の式が採られている(☆1)。

$$\mathbf{a} = [\rho \{(1-\alpha)/\mathbf{K}_{\ell} + \alpha/p\}]^{-1/2}$$
 但し $\rho = \alpha \rho_{g} + (1-\alpha)\rho_{\ell}$ ------(f) ここで $\mathbf{a} =$ 実際の音速(m/s)、 $\rho =$ 気泡含有液体の密度(kg/m³)、 $\rho_{g} =$ 気泡(気体)密度(kg/m³)、

ここで \mathbf{a} =美除の音速(\mathbf{m} / \mathbf{s})、 ρ =気泡含有液体の密度($\mathbf{k}\mathbf{g}$ / \mathbf{m})、 ρ _{\mathbf{g}}=気泡(気体)密度($\mathbf{k}\mathbf{g}$ / \mathbf{m})、 ρ _{\mathbf{g}}=液体密度($\mathbf{k}\mathbf{g}$ / \mathbf{m})、 ρ _{\mathbf{g}}=液体密度($\mathbf{k}\mathbf{g}$ / \mathbf{m})、 ρ _{\mathbf{g}}=液体の体積弾性率(\mathbf{p} a)

気液2相流技術ハンドブックによれば、均質気泡流の音速式は次式で与えられる。

$$\mathbf{a}_{h} = [\{\alpha^{2} + \alpha(1-\alpha)(\rho_{g}/\rho_{g})\} + \{(1-\alpha)^{2} + \alpha(1-\alpha)(\rho_{g}/\rho_{g})\}(\mathbf{a}_{g}/\mathbf{a}_{g})^{2}]^{-1/2}\mathbf{a}_{g} \qquad \cdots (g)$$

ここで a_h =均質流の音速(m/s)、 a_g =気体中の音速(m/s)[=(γ p/ ρ g)1/2]、

 $a\ell = 液体中の音速(m/s)[=(K_{\ell}/\rho_{\ell})^{1/2}]$ 、 他の記号定義は(f)式に同じ。

この式は**中低圧域**ではρgが小さいので次のように単純化できる⁽³⁾(☆2)。

等エントロピー変化の場合:
$$\mathbf{a_h} = \left[\gamma \, \mathbf{p} / \left\{ \alpha \, (1 - \alpha) \, \rho_{\alpha} \right\} \right]^{1/2}$$
 ------(h)

等温変化の場合:
$$\mathbf{a_h} = [\mathbf{p}/\{\alpha(1-\alpha)\rho_{\ell}\}]^{1/2}$$
 ------(i)

(i)式は(j)の γ を 1 とおいたものである。(h)(i)式をグラフ化し計測データをプロットしたものを図 5.1 (引用図)に示す。同種のグラフになるが、参考に機械工学便覧の図 10.1 も示しておく。気泡混入の増加とともに急激に音速が低下しているのがわかる。(h)(i)式は次のように適用できるとされる⁽³⁾。

(h)式→比較的高周波数の波動のように断熱等エントロピー変化が仮定できる場合

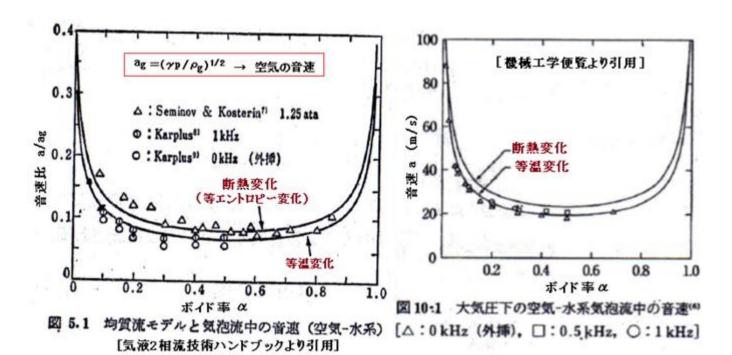
(i)式→連続相(液相)の熱容量が大きい場合や比較的低周波数の波動の場合

実際運用としては機械工学便覧の記述に準じ、全てのケースで(f)式を、中低圧で気泡混入率(ボイド率)が1%を越えるケースでは液体の圧縮性が殆ど影響しないので、(i)を適用すればよいと思う。

以上の議論は例えば空気泡混入の水のような**2成分流体にフィット**している。水-水蒸気のような一成分**2相流体**では相間の質量移動もあるので下記の"熱力的に平衡状態にある音速"がフィットする。

$$a_{he} = (\gamma r / T) [(\partial T/\partial s)_{\rho}]^{1/2}$$

ここで a_{he} =平衡音速、r=気化潜熱、s=エントロピ、 γ =比熱比、T=絶対温度水・水蒸気系について平衡音速を $\mathbf Z$ 5.3 に示す。



(5) 気液 2 相流の場合: 気液二相流技術ハンドブック(5 章)から、各フローパターンにつき要点をピックアップして以下に示す。

気泡流:前項の"気泡が混入した液体の場合"と基本的には同じであるが、流動に際して<u>液相に対する</u> <u>気泡の滑り運動/膨脹-収縮の体積変形運動による効果</u>が顕著になり、前項より多少複雑になる。 Crespo によれば、気泡流の音速は次のようになる。

ここで R=気泡半径(m)、 $(\nu_{\ell}/\omega_{\ell}R)$ =粘性効果に対する代表長さ(m)、S=スリップ比(-) $(B/\omega_{\ell}R)$ =熱拡散に関する代表長さ(m)、B=パラメータ (m^2/s) $(=\lambda_{\ell}/\rho_{\ell}C_p)$ 、 λ_{g} =気体の熱伝導率 $(W/m^{\circ}K)$ 、 ρ_{g} =気体密度 (kg/m^3) 、 C_p =気体定圧比熱 $(J/kg^{\circ}K)$ ω =波動の角振動数(rad/s)(= $2\pi f$)、f=波動周期数(c/s)、 ν_{ℓ} =動粘度 (m^2/s) a.p. α , ρ =(f)式に同じ

噴霧流:気相に対する液滴の滑り運動と熱伝達による効果が考えられる。環状噴霧流については**図 5.6** のデータがある。この図では伝播速度(音速)はボイド率によらずほぼ一定で、乾き蒸気中の音速にほぼ等しく音波は管中央の気相を伝播する。

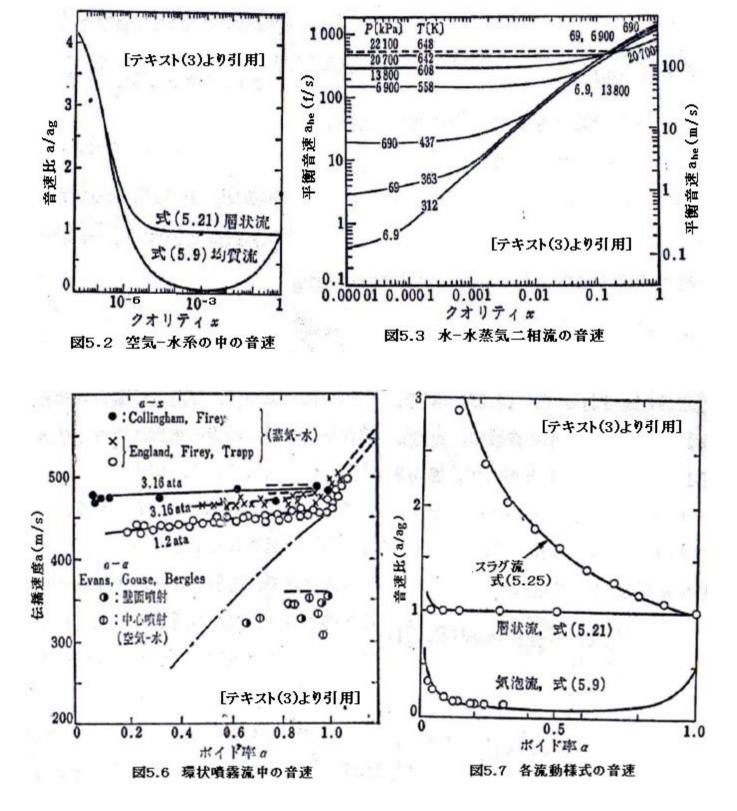
層状流:各相を伝播する波が存在するが液相中の波動が急減衰し1次元的な波動伝播がみられる。即ち $\mathbf{a} = [1 + \{ \rho_{g} / \rho_{g} \} (1 - \alpha) / \alpha \}]^{1/2} [\gamma_{g} / \rho_{g}]^{1/2}$ ------(k)

ここで、記号は(f)式に同じ。 図 5.2 及び図 5.7 参照。

スラグ流: イメージ的には気相と液相が伝播方向に交互する形になる。音速は各相の音波の伝播時間の 和の逆数から与えられる。即ち

ここで $\alpha, a_g, a_\ell = (g)$ 式の記号と同じ

ただ検出される音波にはズレがありマッチングは悪いとされる。



(6) 管路構造の影響を考慮する場合:以上のデータは専ら流体側の事情によってのみ得られたもので

あるが、流体を導く管路構造では管路の変形やその支持方法の影響が加わる。この場合、

 $\mathbf{a} = \{\mathbf{a_n}^{-2} + \rho \ \mathbf{c_1D/(eE)}\}^{-1/2}$ ------(m) [テキスト(4)とその付録参照]

ここで a_n =管路の影響を考慮しない場合の音速(m/s) $[\rightarrow (a) \sim (a)$ 式や音速データによる] c_1 =管の支持方法と管材料のポアソン比によって決まる定数(下記)(* 3)

- ① 1 端固定-他端自由: $c_1=1-(1/2)v_p$
- ② 両端固定: $c_1 = 1 v_p^2$
- ③ 両端固定(途中に伸縮継手): c₁=1

 ν_p =管材のポアソン比(-)、D=管内径(m)、e=管の肉厚(m)(<0.1D)

 $E=管材の縦弾性係数(N/m²)、 <math>\rho=$ 流体密度(kg/m³)

管路の影響によって音速は少し早くなる。特に液体の場合然り。気体の場合は流体密度が低いので一般には無視しても大きな誤差にはならないと思われる。一般の配管がどの c₁ に該当するかは判断が難しい。筆者の印象では、一般のアンカ to アンカ配管系においては、

熱膨張が多い場合 → ③、 熱膨脹が少ない配管 → ②

何故なら、運転温度が高く熱膨脹が大きい配管ではフレキシビリティが大きくとられ軸力が少なくなるので③に近づくと思う。一方、常温配管では熱膨張量が少なく軸方向の剛性が高くなり②に近づくと思う。①については相対的なものではないかと思われる。

FRP 管やゴム管のように柔らかい管材では、縦弾性係数 E の影響が顕著になるので注意を要す。更に高速流体では、流速の影響が大きくなるので注意する(加算減算で補正する必要がある)。

横山「水撃入門」に(m)式の運用例がグラフ化されているのでこれを下記に転記する。図 1.2 は鋼管製管路(配管)を通過する水の音速を示している。図 1.3 は鋳鉄管製管路(配管)を通過する水の音速である。 農業/土木設備などに用いられるコンクリート管については、下記の式で鋼管に等価な肉厚 e'を算定し これを図 1.2 の e の代りに用いて音速が推定できるとしている。

$$e'=e/20+\{\pi d^2/(4t)\}$$
(n)

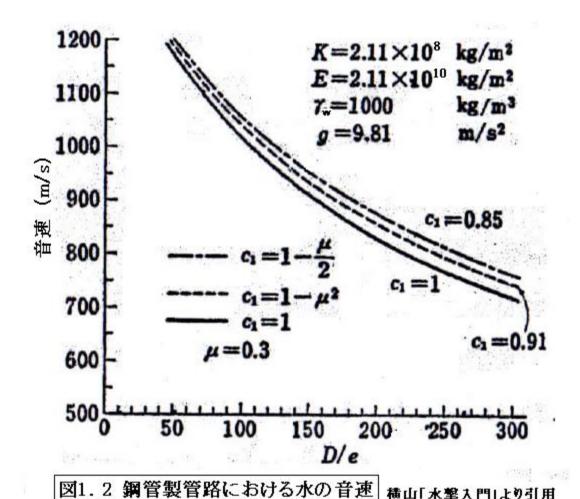
ここで e'=等価肉厚(m)、e=コンクリート管肉厚(m)、d=鉄筋の径(m)、t=鉄筋ピッチ(m)

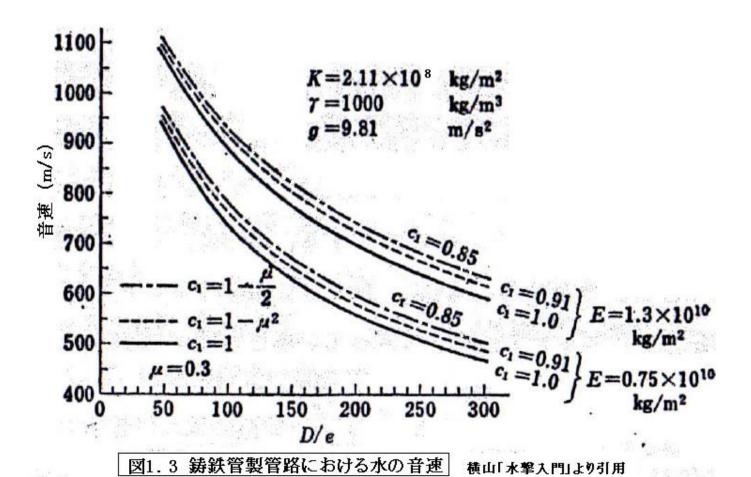
概していえば、配管ダクト系では流体の種類を問わず(m)式の適用が望ましい。

(7) 全長にわたり管径と厚さが一様ではない管路の場合:横山「水撃入門」によれば $\mathbf{a} = \mathbf{L}/\Sigma(\mathbf{L_i}/\mathbf{a_i})$ あるいは $\mathbf{a} = (\mathbf{1}/\mathbf{L})\Sigma(\mathbf{a_i}\mathbf{L_i})$ ------(o)

ここで a=管路全長にわたる音速(m/s)、L=管路全長(m)、 $a_i=$ 管路区間iの音速(m/s) $L_i=$ 同一の管径x肉厚をもった管路区間iの長さ(m) $(=L_1,L_2,L_3\cdots L_i\cdots)$

(8) 固気 2 相流については調査中、追って。





[補注]

(★1) 気液 2 相流技術ハンドブックの(5.9)式

$$\begin{split} a_{h}/a_{g} = & \{\{\alpha^{2} + \alpha\,(1-\alpha\,)(\,\rho_{\,\,\ell}/\,\rho_{\,\,g})\} + (1-\alpha\,)\{(1-\alpha\,) + \alpha\,(\,\rho_{\,\,g}/\,\rho_{\,\,\ell})\}(a_{g}/a_{\ell})^{2}\}^{-1/2} \\ \text{において、} & (a_{g}/a_{\ell})^{2} = & [(\,\gamma\,p/\,\rho_{\,\,g})/(K_{\ell}/\,\rho_{\,\,\ell})] = & (\,\gamma\,p/K_{\ell})(\,\rho_{\,\,\ell}/\,\rho_{\,\,g}), \quad \rho = \alpha\,\,\rho_{\,\,g} + (1-\alpha\,)\,\rho_{\,\,\ell} \quad \text{であるから} \\ & a_{h/Aag} = & [\,\rho\,\{(\,\alpha\,/\,\rho_{\,\,g}) + (\,\gamma\,p/K_{\ell})(1-\alpha\,)/\,\rho_{\,\,g}\}]^{-1/2} \end{split}$$

ここで、 $a_g=(\gamma p/\rho_g)^{1/2}$ であるから

 $a_h = [\rho \{(\alpha / \rho g) + (\gamma g/K_e)(1-\alpha)/\rho_g\}]^{-1/2} (\rho g/\gamma p)^{-1/2} = [\rho \{(\alpha / \gamma p) + (1-\alpha)/K_e\}]^{-1/2}$ 気泡の等温変化を仮定し $\gamma = 1$ とすると、 $[\rho \{(1-\alpha)/K_e + \alpha/p\}]^{-1/2}$

(☆2) 気液 2 相流技術ハンドブックの(5.9)式

 $a_h/a_g = [\{\alpha^2 + \alpha(1-\alpha)(\rho_0/\rho_g)\} + (1-\alpha)\{(1-\alpha) + \alpha(\rho_g/\rho_0)\}(a_g/a_0)^2]^{-1/2}$ a_h は均質モデルの音速の意。中低圧では $(a_g/a_0)^2 \ll 1$ で右辺第 2 項は無視できるので $a_h/a_g = [\{\alpha^2 + \alpha(1-\alpha)(\rho_0/\rho_g)\}]^{-1/2}$

 $\Rightarrow a_h = [\{\alpha^2 + \alpha(1-\alpha)(\rho \not | \rho g)\}(\rho g / \gamma p)]^{-1/2} = [\alpha^2(\rho g / \gamma p) + \alpha(1-\alpha)(\rho \not | \gamma p)]^{-1/2}$ 第 1 項は無視できるので、 $a_h = [\alpha(1-\alpha)(\rho \not | \gamma p)]^{-1/2} = [\gamma p / \{\alpha(1-\alpha)\rho g\}]^{1/2}$

(* 3) パーマキアン文献では ①について $c_1=5/4-\mu$ 、②について $c_1=1-\mu^2$ 、③について $c_1=1-\mu/2$ になっているが、本文のようにするのが妥当ではないかと思われる。

引用テキスト/文献:

- (1) 松尾「圧縮性流体力学(内部流れの理論と解析)」(理工学社)
- (2) JSME 「機械工学便覧」基礎編 α 4 流体工学
- (3) JSME「気液 2 相流技術ハンドブック」(コロナ社)
- (4) 横山「水撃入門」(日新出版)
- (5) 水擊計算資料(逸文)